вещество, вообще говоря, движется (радиально), т.е. имеются потоки энергии. Иногда удобно выбирать другие системы отсчета, например, сопутствующие (в которых нет потоков энергии) или какие-то другие (но сферически-симметричные). Все такие системы обладают следующим свойством. Точки, составляющие какую-либо систему, движутся по радиусу относительно другой системы. Связь между различными системами отсчета, сохраняющими свойства сферической симметрии, задается преобразованиями

$$\tilde{x}^0 = \tilde{x}^0(x^0, x^1), \tag{2.1.3}$$

$$\tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^0, x^1), \tag{2.1.4}$$

$$\tilde{\theta} = \theta, \qquad \tilde{\varphi} = \varphi. \tag{2.1.5}$$

Тильда обозначает координаты в новой системе отсчета. Выражение (2.1.4) описывает радиальное движение точек новой системы отсчета (с координатами $\tilde{x}^1 = \text{const}$) относительно старой. После выбора (2.1.4), задающего новую систему отсчета, выбор (2.1.3), определяющий координату времени в новой системе, всегда может быть сделан таким образом, что компонента $\tilde{g}_{01}$ не появится и общее выражение для ds^2 будет иметь вид

$$ds^2 = \tilde{g}_{00}(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1) d\tilde{x}^{0\,2} + \tilde{g}_{11}(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1) d\tilde{x}^{1\,2} + \\ + \tilde{g}_{22}(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1)(d\tilde{\theta}^2 + \sin^2\tilde{\theta}\, d\tilde{\varphi}^2). \tag{2.1.6}$$

Заметим, что выражение для $\tilde{g}_{22}$ может быть записано в виде

$$\sqrt{\tilde{g}_{22}} = x^1(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1), \tag{2.1.7}$$

где $x^1 = x^1(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1)$ есть решение (2.1.3), (2.1.4) относительно x^1. Оно описывает радиальное движение точек старой системы (с координатами $x^1 = \text{const}$) относительно новой.

§ 2.2. Сферически-симметричное поле тяготения в вакууме

Рассмотрим теперь сферическое поле тяготения в вакууме. Решение уравнений Эйнштейна для этого случая было найдено Шварцшильдом (1916) и имеет следущий вид [см. Ландау, Лифшиц (1973*)]:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2); \tag{2.2.1}$$

G – постоянная тяготения Ньютона, M – масса источника поля.

Важнейшее свойство этого решения состоит в том, что оно не зависит от временной координаты t, а только от r, и определяется одним параметром M – полной массой тяготеющего источника, создающего поле. Даже если в источнике поля есть радиальные движения (сохраняющие сферическую симметрию), поле в вакууме, вне вещества, остается постоянным [это утверждение носит название *теоремы Биркгофа* (1923)]. Вдали от центра тяготения (при $r \to \infty$) пространство-время переходит в плоское пространство-время Минковского с метрикой (2.1.1). Координаты t, r, θ, φ, в которых записано выражение (2.2.1), носят название *координат*

Шварцшильда, а система отсчета, образуемая ими, – *системы отсчета Шварцшильда.* В малой окрестности каждой точки пространства можно ввести для обычных измерений длины локальную декартову систему координат (x, y, z):

$$\delta x = \sqrt{g_{11}}\, dr = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1/2} dr, \tag{2.2.2}$$

$$\delta y = \sqrt{g_{22}}\, d\theta = r\, d\theta, \tag{2.2.3}$$

$$\delta z = \sqrt{g_{33}}\, d\varphi = r \sin\theta\, d\varphi. \tag{2.2.4}$$

Множитель $(1 - 2GM/c^2 r)^{-1/2}$ в (2.2.2) описывает искривленность трехмерного пространства.

Физическое время τ, текущее в данной точке r, определяется выражением

$$d\tau = \frac{\sqrt{-g_{00}}}{c}\, dx^0 = \sqrt{-g_{00}}\, dt = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2} dt. \tag{2.2.5}$$

Вдали от центра тяготения (при $r \to \infty$) имеем $d\tau = dt$, т.е. t – это физическое время наблюдателя на бесконечности.

При меньших r время τ течет все медленнее по сравнению со временем t на бесконечности. При $r \to 2GM/c^2$ имеем $d\tau \to 0$.

Вычислим теперь ускорение свободного падения тела, первоначально покоящегося в системе Шварцшильда (или имеющего малую скорость $v \ll c$). Используя формулу (П. 63) (см. Приложение), находим

$$F = \sqrt{F_i F^i} = \frac{GM}{r^2 (1 - 2GM/c^2 r)^{1/2}}. \tag{2.2.6}$$

Ускорение направлено по радиусу. При $r \to 2GM/c^2$ ускорение становится бесконечным. Особенность течения времени при $r \to 2GM/c^2$ [см. (2.2.5)] и особенность в выражении для ускорения F [см. (2.2.6)] показывают, что в системе отсчета Шварцшильда при этом значении r имеется физическая особенность*). Значение $r = r_g \equiv 2GM/c^2$ называют *радиусом Шварцшильда* (или гравитационным радиусом; см. с. 5), а сферу с радиусом r_g – *сферой Шварцшильда.* Мы в дальнейшем подробно рассмотрим смысл физической особенности при $r = r_g$. Сейчас отметим следующее.

Система отсчета Шварцшильда статична, не деформируется [$g_{\alpha\beta}$ не зависят от t, $g_{0i} = 0$, $D_{ik} = 0$; см. (П.60)]. Она может мыслиться как координатная решетка, "сваренная" из невесомых жестких стержней, заполняющих пространство вокруг черной дыры. Мы можем изучать движение частиц по отношению к этой решетке, эволюцию физических полей в разных ее

---

*) Выражение (2.2.6) определяет ускорение, а $\mathcal{F}_0 = Fm$ – силу, действующую на тело массы m и измеряемую наблюдателем, расположенным рядом с этим телом в точке r_0. Если тело удерживается невесомой, абсолютно жесткой нитью, то значение силы, прилагаемой к свободному концу нити в точке r_1, будет равно

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 \sqrt{\frac{g_{00}(r_0)}{g_{00}(r_1)}}.$$

При стремлении r_0 к $2Gm/c^2$ $\mathcal{F}_0 \to \infty$, в то время как $\mathcal{F}_1$ остается конечной.

точках и т.д. Таким образом, решетка Шварцшильда в какой-то степени напоминает решетку жестких координат в неизменном ньютоновском пространстве нерелятивистской физики. Разумеется, геометрия 3-мерного пространства Шварцшильда вокруг тяготеющего центра неевклидова, в отличие от евклидова ньютоновского пространства нерелятивистской физики. Но в остальном свойства очень схожи*). Это помогает работе нашей интуиции.

Когда мы говорим о движении частиц в поле Шварцшильда, об эволюции полей, мы подразумеваем движение и эволюцию полей в этом аналоге абсолютного ньютоновского пространства**). Наличие критического радиуса в сферическом поле в вакууме $r_g = 2GM/c^2$, где ускорение свободного падения становится бесконечным, показывает, что для меньших $r \leqslant r_g$ такую жесткую, недеформирующуюся решетку продолжить нельзя, там уже нет недеформирующегося пространства – аналога ньютоновского пространства. Тот факт, что на r_g величина F обращается в бесконечность, подсказывает нам, что при $r \leqslant r_g$ все системы должны быть нежесткими в том смысле, что $g_{\alpha\beta}$ должны зависеть от времени, системы должны деформироваться (все тела должны падать к центру). Дальше мы убедимся, что так оно и есть в действительности.

Заметим, что указанные особенности не означают, что в геометрии 4-мерного пространства-времени имеется какая-либо сингулярность типа бесконечной кривизны и тому подобное. Мы увидим далее, что пространство-время здесь вполне регулярно и особенности на r_g означают физические особенности только в системе отсчета Шварцшильда, т.е. означают невозможность продолжить ее как жесткую, недеформирующуюся (не падающую к центру) при $r \leqslant r_g$.

В заключение отметим, что величина r_g крайне мала даже для небесных тел. Так, для массы, равной массе Земли, r_g = 0,9 см, для массы, равной массе Солнца, r_g = 3 км. При $r \gg r_g$ поле Шварцшильда есть обычное ньютоновское поле тяготения с ускорением свободного падения $F = GM/r^2$, а искривленность 3-мерного пространства крайне мала. Так как размеры обычных небесных тел (и вообще обычных тел) много больше r_g, то вне тел их поле тяготения есть ньютоновское поле***). Внутри этих тел решение Шварцшильда неприменимо и поле тяготения, разумеется, также с огромной точностью является ньютоновским.

Как мы увидим далее, сферическая черная дыра возникает, когда невращающееся сферическое тело сжимается до размеров меньше гравитационного радиуса. Но прежде чем рассмотреть этот процесс возникновения черной дыры, необходимо познакомиться с законами радиального движения пробных частиц в поле Шварцшильда.

---

*) В § 4.2 мы подробно рассмотрим эти вопросы.

**) Напомним, что в общем случае несферических полей тяготения, меняющихся во времени, никакого неизменного 3-мерного пространства ввести нельзя, что затрудняет и наглядные представления, и вычисления.

***) Исключением являются нейтронные звезды и черные дыры.