§ 2.3. Радиальное движение пробных частиц в поле Шварцшильда

Рассмотрим прежде всего движение вдоль радиуса фотона, всегда летящего с фундаментальной скоростью c. Практически по тому же закону будет двигаться любая ультрарелятивистская частица. Для такой частицы $ds = 0$. Для радиального движения $d\theta = d\varphi = 0$. Подставляя в (2.2.1) $ds = d\theta = d\varphi = 0$, находим закон движения

$$\frac{dr}{dt} = \pm c\left(1 - \frac{r_g}{r}\right). \tag{2.3.1}$$

Напомним, что dr/dt – это скорость изменения координаты r с течением времени t далекого наблюдателя (а не физического времени τ в данной точке), т.е. это координатная, а не физическая скорость. Физическая скорость есть изменение физического расстояния dx [см. (2.2.2)] с физическим временем τ [см. (2.2.5)]: $\dfrac{dx}{d\tau} = \pm \dfrac{\sqrt{g_{11}}dr}{\sqrt{-g_{00}}dt} = \pm c$. Разумеется, физическая скорость фотона (в любой системе отсчета) всегда равна c.

С точки зрения далекого наблюдателя (по его часам) изменение физического радиального расстояния dx с течением t есть

$$\frac{dx}{dt} = \pm c\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2}. \tag{2.3.2}$$

Таким образом, для далекого наблюдателя луч вблизи r_g движется медленнее, при $r \to r_g$ имеем $dx/dt \to 0$. Разумеется, это отражает замедление течения времени вблизи r_g – см. (2.2.5).

Сколько времени по часам далекого наблюдателя понадобится фотону, чтобы, двигаясь по радиусу от $r = r_1$, достигнуть r_g? Проинтегрируем для этого уравнение (2.3.1):

$$t = \frac{r_1 - r}{c} + \frac{r_g}{c}\ln\left(\frac{r_1 - r_g}{r - r_g}\right) + t_0. \tag{2.3.3}$$

Здесь r_1 – положение фотона в момент t_0. Выражение (2.3.3) показывает, что при $r \to r_g$ $t \to \infty$. С какого бы r_1 ни начинал свое падение фотон, по часам далекого наблюдателя время t достижения фотоном r_g бесконечно.

Как изменяется энергия фотона при движении по радиусу? Энергия пропорциональна частоте. Рассмотрим изменение частоты. Пусть в некоторой точке с $r = r_1$ происходят вспышки с интервалом Δt. Так как поле статично, то эти вспышки придут к наблюдателю с $r = r_2$ с тем же интервалом Δt. Интервалы собственного времени в этих двух точках относятся как $\dfrac{\Delta\tau_1}{\Delta\tau_2} = \dfrac{\sqrt{-g_{00}(r_1)}\,\Delta t}{\sqrt{-g_{00}(r_2)}\,\Delta t}$, а частоты ω, следовательно, относятся как

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\Delta\tau_2}{\Delta\tau_1} = \sqrt{\frac{g_{00}(r_2)}{g_{00}(r_1)}} = \sqrt{\frac{1 - r_g/r_2}{1 - r_g/r_1}}. \tag{2.3.4}$$

Частота кванта уменьшается при выходе из поля тяготения и увеличивается

при движении к центру. Это явление называют соответственно красным и фиолетовым гравитационным смещением.

Рассмотрим радиальное движение нерелятивистских частиц в вакууме. Исследуем сначала свободное движение, когда на частицу не действуют никакие негравитационные силы (свободное падение, движение по геодезической линии). Интегрирование уравнения для геодезических в случае $d\theta = d\varphi = 0$ [см. Богородский (1962*)] приводит к выражению

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{(1 - r_g/r)\,[(E/mc^2)^2 - 1 + r_g/r]^{1/2}}{E/mc^2}\,c. \qquad (2.3.5)$$

Здесь E – константа движения, описывающая полную энергию частицы, включая ее массу покоя m. Если частица покоится вне поля тяготения на бесконечности, то $E = mc^2$. В общем случае величина E/mc^2 может быть и больше и меньше единицы, но E для частицы вне сферы радиуса r_g всегда положительна.

На больших расстояниях $r \gg r_g$ для нерелятивистских частиц $\left|\frac{E - mc^2}{mc^2}\right| \ll 1$ и выражение (2.3.5) переписывается в виде

$$\frac{m(dr/dt)^2}{2} = (E - mc^2) + \frac{GmM}{r}. \qquad (2.3.6)$$

Величина $\mathcal{E} = E - mc^2$ является энергией частицы в ньютоновской теории (где в энергию не включается масса покоя), и все выражение (2.3.6) приобретает вид закона сохранения энергии в ньютоновской теории.

Напомним снова, что в выражении (2.3.5) dr/dt – это координатная (не физическая) скорость. Физическая скорость, измеряемая неподвижным в системе Шварцшильда наблюдателем, находящимся рядом со свободно движущимся телом, есть

$$\frac{dx}{d\tau} = \sqrt{\frac{g_{11}}{|g_{00}|}}\,\frac{dr}{dt} = \pm \frac{[(E/mc^2)^2 - 1 + r_g/r]^{1/2}}{E/mc^2}\,c. \qquad (2.3.7)$$

Если падающее тело приближается к r_g, то физическая скорость все время нарастает, и при $r \to r_g$ имеем $dx/d\tau \to c$. Скорость dx/dt по часам далекого наблюдателя стремится к нулю при $r \to r_g$, как и в случае движения фотона. Этот факт отражает замедление течения времени при $r \to r_g$.

Сколько времени длится падение тела от некоторой точки с $r = r_1$ до гравитационного радиуса r_g по часам далекого наблюдателя?

Время движения от r_1 до r_g определяется интегрированием выражения (2.3.5). Интеграл расходится при $r \to r_g$. Результат этот неудивителен, так как даже для света $\Delta t \to \infty$ при $r \to r_g$, а быстрее света ничто двигаться не может. Более того, характер расходимости Δt для падающего тела такой же, как для фотона, ибо при $r \to r_g$ скорость тела v всегда стремится к c. Очевидно, что, какие бы силы не действовали на частицу, время Δt достижения r_g всегда будет бесконечным, ибо и в этом случае всегда $v < c$. Таким образом, и свободное падение, и движение к r_g с любым ускорением всегда длятся бесконечное время по часам далекого наблюдателя.

Вернемся к свободно летящей частице. Каково время ΔT достижения r_g по часам на самой падающей частице? Оно находится по формуле $\Delta T = \frac{1}{c}\int_{r_g}^{r_1} |ds|$, где ds берется вдоль мировой линии частицы. Подставим

выражение ds из (2.2.1) с $d\theta = d\varphi = 0$ и получим

$$\Delta T = \frac{1}{c}\int_{r_g}^{r_1}\sqrt{\left|\frac{g_{00}}{(dr/c\,dt)^2} + g_{11}\right|}\,dr. \tag{2.3.8}$$

Для вычисления ΔT подставляем в (2.3.8) dr/dt из (2.3.5). Легко показать, что интеграл сходится, интервал ΔT конечен. Для частного случая $E = mc^2$, когда частица падает с параболической (второй космической) скоростью (т.е. $dr/dt = 0$ при $r \to \infty$), получаем для времени падения от r_1 до r:

$$\Delta T = \frac{2}{3}\frac{r_g}{c}\left[\left(\frac{r_1}{r_g}\right)^{3/2} - \left(\frac{r}{r_g}\right)^{3/2}\right]. \tag{2.3.9}$$

Мы видели, что для далекого наблюдателя время падения частицы Δt бесконечно, по часам же на самой частице ΔT конечно. С физической точки зрения этот неожиданный на первый взгляд результат можно интерпретировать следующим образом. Часы на падающей к r_g частице замедляют свой ход по отношению к часам на бесконечности: во-первых, из-за замедления хода времени в гравитационном поле (2.2.5), а во-вторых, из-за лоренцева сокращения времени, когда их скорость $v \to c$ при $r \to r_g$. Поэтому бесконечный по t интервал становится конечным по T.

§ 2.4. Пространство-время внутри сферы Шварцшильда

Тот факт, что собственное время падения частиц до сферы Шварцшильда конечно, подсказывает способ построения системы отсчета, которую можно продолжить при $r < r_g$. Надо связать систему отсчета со свободно падающими частицами. При этом на гравитационном радиусе в такой системе заведомо не возникнут бесконечные ускорения $\boldsymbol{F}$ и соответствующие бесконечные силы, так как частицы системы свободно падают, находятся в невесомости и $\boldsymbol{F}$ тождественно везде равно нулю. Наиболее простая система отсчета такого рода состоит из свободно падающих частиц, имеющих на пространственной бесконечности нулевую скорость [система отсчета Леметра (1933); см. также Рылов (1961*)]. Движение этих частиц описывается уравнением (2.3.9).

Чтобы перейти к этой системе отсчета, выберем в качестве координаты времени время T, отсчитываемое часами на падающих частицах. В некоторый момент $T = \text{const}$, который мы примем за $T = 0$, совокупность свободно падающих частиц находится на разных r_1. В качестве радиальной координаты в их системе отсчета можно выбрать эти значения r_1, маркирующие частицы и неизменные в дальнейшем для каждой из них.

Тогда квадрат интервала в системе свободно падающих частиц запишется в виде

$$ds^2 = -c^2 dT^2 + \frac{r_1 dr_1^2}{r_g\left[\left(\frac{r_1}{r_g}\right)^{3/2} - \frac{3}{2}\frac{cT}{r_g}\right]^{2/3}} + \left[\left(\frac{r_1}{r_g}\right)^{3/2} - \frac{3}{2}\frac{cT}{r_g}\right]^{4/3} r_g^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{2.4.1}$$