

выражение  $ds$  из (2.2.1) с  $d\theta = d\varphi = 0$  и получим

$$\Delta T = \frac{1}{c} \int_{r_g}^{r_1} \sqrt{\left| \frac{g_{00}}{(dr/c dt)^2} + g_{11} \right|} dr. \quad (2.3.8)$$

Для вычисления  $\Delta T$  подставляем в (2.3.8)  $dr/dt$  из (2.3.5). Легко показать, что интеграл сходится, интервал  $\Delta T$  конечен. Для частного случая  $E = mc^2$ , когда частица падает с параболической (второй космической) скоростью (т.е.  $dr/dt = 0$  при  $r \rightarrow \infty$ ), получаем для времени падения от  $r_1$  до  $r$ :

$$\Delta T = \frac{2}{3} \frac{r_g}{c} \left[ \left( \frac{r_1}{r_g} \right)^{3/2} - \left( \frac{r}{r_g} \right)^{3/2} \right]. \quad (2.3.9)$$

Мы видели, что для далекого наблюдателя время падения частицы  $\Delta t$  бесконечно, по часам же на самой частице  $\Delta T$  конечно. С физической точки зрения этот неожиданный на первый взгляд результат можно интерпретировать следующим образом. Часы на падающей к  $r_g$  частице замедляют свой ход по отношению к часам на бесконечности: во-первых, из-за замедления хода времени в гравитационном поле (2.2.5), а во-вторых, из-за лоренцева сокращения времени, когда их скорость  $v \rightarrow c$  при  $r \rightarrow r_g$ . Поэтому бесконечный по  $t$  интервал становится конечным по  $T$ .

#### § 2.4. Пространство-время внутри сферы Шварцшильда

Тот факт, что собственное время падения частиц до сферы Шварцшильда конечно, подсказывает способ построения системы отсчета, которую можно продолжить при  $r < r_g$ . Надо связать систему отсчета со свободно падающими частицами. При этом на гравитационном радиусе в такой системе заведомо не возникнут бесконечные ускорения  $F$  и соответствующие бесконечные силы, так как частицы системы свободно падают, находятся в невесомости и  $F$  тождественно везде равно нулю. Наиболее простая система отсчета такого рода состоит из свободно падающих частиц, имеющих на пространственной бесконечности нулевую скорость [система отсчета Леметра (1933); см. также Рылов (1961\*)]. Движение этих частиц описывается уравнением (2.3.9).

Чтобы перейти к этой системе отсчета, выберем в качестве координаты времени время  $T$ , отсчитываемое часами на падающих частицах. В некоторый момент  $T = \text{const}$ , который мы примем за  $T = 0$ , совокупность свободно падающих частиц находится на разных  $r_1$ . В качестве радиальной координаты в их системе отсчета можно выбрать эти значения  $r_1$ , маркирующие частицы и неизменные в дальнейшем для каждой из них.

Тогда квадрат интервала в системе свободно падающих частиц запишется в виде

$$ds^2 = -c^2 dT^2 + \frac{r_1 dr_1^2}{r_g \left[ \left( \frac{r_1}{r_g} \right)^{3/2} - \frac{3}{2} \frac{c T}{r_g} \right]^{2/3}} + \\ + \left[ \left( \frac{r_1}{r_g} \right)^{3/2} - \frac{3}{2} \frac{c T}{r_g} \right]^{4/3} r_g^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.4.1)$$

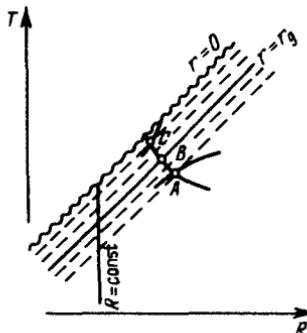


Рис. 1. Пространство-время Шварцшильда в координатах Леметра. Пунктир – линия  $r = \text{const}$ ;  $ABC$  – мировая линия фотона, падающего в черную дыру. В точках  $A, B, C$  показаны отрезки мировых линий фотонов, движущихся в противоположную сторону

В качестве радиальной координаты в рассматриваемой системе удобно использовать не  $r_1$ , а

$$R = \frac{2}{3} r_g \left( \frac{r_1}{r_g} \right)^{3/2}. \quad (2.4.2)$$

Квадрат интервала (2.4.1) теперь перепишется в виде

$$ds^2 = -c^2 dT^2 + \left[ \frac{3}{2} \frac{(R - cT)}{r_g} \right]^{2/3} + \\ + \left[ \frac{3}{2} \frac{(R - cT)}{r_g} \right]^{4/3} r_g^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.4.3)$$

Система отсчета с интервалом (2.4.3) – система Леметра – действительно не имеет никаких особенностей на сфере Шварцшильда. Чтобы убедиться в этом, запишем в явном виде связь между координатами Шварцшильда и Леметра:

$$r = \left[ \frac{3}{2} \frac{(R - cT)}{r_g} \right]^{2/3} r_g, \quad (2.4.4)$$

$$t = \frac{r_g}{c} \left\{ -\frac{2}{3} \left( \frac{r}{r_g} \right)^{3/2} - 2 \left( \frac{r}{r_g} \right)^{1/2} + \ln \left[ \frac{(r/r_g)^{1/2} + 1}{(r/r_g)^{1/2} - 1} \right] + \frac{R}{r_g} \right\}. \quad (2.4.5)$$

Приравнивая в (2.4.4)  $r = r_g$ , находим уравнение для положения сферы Шварцшильда в системе Леметра:

$$r_g = \frac{3}{2} (R - cT). \quad (2.4.6)$$

Выражения для всех  $g_{\alpha\beta}$  в (2.4.3) на сфере Шварцшильда вполне регулярны, не имеют никаких особенностей. Вычисление всех отличных от нуля инвариантов кривизны 4-мерного пространства-времени также показывает отсутствие на сфере Шварцшильда каких-либо особенностей. Система Леметра продолжается при  $r < r_g$ . Пространство-время в координатах  $R, T$  Леметра изображено на рис. 1 (угловые координаты  $\theta, \varphi$  не важны в силу симметрии). Система продолжима вплоть до  $r = 0$ , т.е. [см. (2.4.4)]  $R =$

$= cT$ . Здесь имеется истинная особенность пространства-времени — бесконечная кривизна. Это видно, например, из того факта, что инвариант кривизны  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} \rightarrow \infty$  при  $R - cT \rightarrow 0$ . Бесконечность указанного инварианта означает бесконечность приливных гравитационных сил.

Как видно из рисунка, каждая свободно падающая частица с  $R = \text{const}$  в системе Леметра движется с течением  $T$  к меньшим  $r$ . За конечное время  $T$  частица достигает  $r_g$ , падает дальше и достигает истинной особенности  $r = 0^*$ ). Продолжить пространство-время за сингулярность нельзя; здесь бесконечны приливные гравитационные силы, разрушающие любые частицы. Вблизи  $r = 0$  существенны квантовые эффекты гравитационного поля, о чём мы будем говорить в гл. 12.

На рис. 1 нанесены также мировые линии радиальных световых лучей. Они определяются из (2.4.3) условием  $ds = 0, d\theta = d\varphi = 0$ :

$$c \frac{dT}{dR} = \pm \sqrt{\frac{r_g}{\frac{3}{2}(R - cT)}}^{1/3}. \quad (2.4.7)$$

Положение световых конусов на рис. 1 сразу показывает, почему сфера Шварцшильда играет особую роль в системе отсчета Шварцшильда и вообще в сферическом поле тяготения. Дело в том, что при  $r > r_g$  мировые линии  $r = \text{const}$  (здесь и далее мы считаем  $\theta = \text{const}, \varphi = \text{const}$ ) лежат внутри светового конуса, т.е. они времениподобны; линия  $r = r_g$  совпадает с мировой линией фотона, т.е. светоподобна; наконец, при  $r < r_g$  мировые линии  $r = \text{const}$  пространственноподобны.

Вот почему система Шварцшильда, образованная частицами с  $r = \text{const}$ , не может быть продолжена при  $r < r_g$ .

Рассматриваемая ситуация оказывается характерной для общей теории относительности и отличает ее от обычной теории поля в плоском пространстве. Для решения уравнений Эйнштейна необходимо выбрать определенные координаты. С этой целью обычно вводятся дополнительные условия, фиксирующие вид метрики. При этом из-за возможной сложной глобальной структуры пространства-времени в общей теории относительности (например, нетривиальной его топологии) нельзя, вообще говоря, гарантировать, что выбранные координаты покрывают все пространство-время. Именно с этой ситуацией мы столкнулись выше, при попытке описать полное сферически-симметричное пространство-время в координатах кривизны (2.1.2). Общий прием, позволяющий установить, действительно ли полученное решение описывает все пространство-время или только часть его, состоит в изучении поведения пробных частиц и лучей света. Если за конечное собственное время (или при конечном значении аффинного параметра для фотонов) некоторые из частиц достигают "границы" выбранной координатной системы, а физические особенности в этих "конечных" точках траекторий частиц отсутствуют, то эта координатная система неполна. Изменив координатные условия и перейдя к метрике (2.4.1), нам удалось покрыть

\* ) Тот факт, что линии  $r = \text{const}$  в координатах  $R, T$  изображаются прямыми, связан со специальным выбором  $R$  [см. (2.4.2)]. Этим, в частности, объясняется выбор координаты  $R$  вместо  $r_1$ .

большую область пространства-времени и, в частности, описать возможные события, происходящие под гравитационным радиусом. Обсуждение вопроса о том, является ли координатная система Леметра действительно полной и описывает ли метрика (2.4.1) все пространство-время, мы отложим до § 2.7, а пока вернемся к обсуждению свойств сферы Шварцшильда и области пространства-времени, лежащей внутри нее. [Общее обсуждение затронутых вопросов см. Хокинг, Эллис (1973).]

Самая примечательная особенность сферы Шварцшильда заключается в следующем. Из точек  $r > r_g$  луч света, идущий наружу (направо на рис. 1), движется к все большим  $r$  и уходит на пространственную бесконечность. Для точек с  $r < r_g$  оба луча (и идущий налево, и идущий направо) движутся к все меньшим  $r$ , не уходят на пространственную бесконечность, а "упираются" в сингулярность  $r = 0$ . Мировая линия любой частицы обязана лежать внутри светового конуса. Поэтому при  $r < r_g$  все частицы обязаны двигаться к  $r = 0$  – это есть направление в будущее. Движение к большим  $r$  в области  $r < r_g$  невозможно [см. Финкельштейн (1958)]. Подчеркнем, что сказанное относится не только к свободно падающим частицам (т.е. движущимся по геодезическим), но и к частицам, имеющим любое ускорение. Никакое излучение, никакие частицы не выходят к далекому внешнему наблюдателю из-под сферы Шварцшильда.

Мы определили в (2.2.1)  $r$  так, чтобы  $g_{22} = r^2$ , т.е. как радиальную координату в системе координат кривизны [см. (2.1.1)]. Так же формально определяется  $r$  и внутри сферы Шварцшильда, хотя здесь линия  $r = \text{const}$  пространственноподобна и не может служить радиальной пространственной координатой. При  $r < r_g$  величина  $g_{22}$  всегда зависит от времени, притом монотонно в любой системе, определяемой соотношениями (2.1.3) – (2.1.5). Все системы отсчета при  $r < r_g$  нестатичны, оба радиальных луча света идут только к меньшим  $r$  (а значит, к меньшим  $g_{22}$ ). Области пространства-времени с таким свойством называют *T-областями* [Новиков (1962\*<sup>a</sup>, 1964\*<sup>a</sup>)]. Область пространства-времени вне сферы Шварцшильда называют *R-областью*.

Дадим более точное определение *R*- и *T*-областей. Рассмотрим пространство-время со сферической симметрией. При этом оно может содержать материю ( $T_{\alpha\beta} \neq 0$ ) или быть пустым. По определению сферически-симметричного поля тяготения его метрика всегда может быть записана в виде (2.1.2). Если в окрестности рассматриваемой точки мировая линия  $x^1 = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$  времениподобна, то эта точка принадлежит *R*-области. Если эта линия пространственноподобна, то рассматриваемая точка принадлежит *T*-области.

Вернемся к случаю сферически-симметричного поля тяготения в вакууме.

Помимо уже рассмотренной системы отсчета Леметра, для исследования областей как внутри, так и снаружи сферы Шварцшильда используются и другие системы отсчета. Здесь и в дальнейших параграфах мы приведем некоторые из них.

Прежде всего обратимся снова к системе координат (2.2.1). На сфере Шварцшильда эта система, как мы показали в § 2.2, сингулярна. Но при  $r$ , строго меньшем  $r_g$ , метрические коэффициенты  $g_{\alpha\beta}$  опять регулярны. Имеет ли эта система какой-либо прямой физический смысл при  $r < r_g$ ?

Оказывается, имеет [Новиков (1961\*)]. Координата  $r$  теперь (при  $r < r_g$ ) не может быть, как показано выше, радиальной пространственной координатой. Однако она может играть роль временной координаты, что прямо следует из выражения (2.2.1), где коэффициент при  $dr^2$  меняет знак при переходе через сферу Шварцшильда и при  $r < r_g$  отрицателен. С другой стороны, координата  $t$  теперь может служить пространственной радиальной координатой, коэффициент при  $dt^2$  положителен для  $r < r_g$ . Таким образом, координаты  $r$  и  $t$  при  $r < r_g$  поменялись ролями. Поменяем обозначения  $r = -c\tilde{T}$ ,  $t = \tilde{R}/c$  и перепишем (2.2.1) в виде

$$ds^2 = - \left[ \frac{r_g}{(-c\tilde{T})} - 1 \right]^{-1} c^2 d\tilde{T}^2 + \left[ \frac{r_g}{(-c\tilde{T})} - 1 \right] d\tilde{R}^2 + c^2 \tilde{T}^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.4.8)$$

$$0 < -c\tilde{T} < r_g, \quad -\infty < \tilde{R} < \infty. \quad (2.4.9)$$

Система отсчета (2.4.8) – (2.4.9) может быть осуществлена свободными пробными частицами, движущимися по геодезическим внутри сферы  $r = r_g$ . Трехмерное сечение  $\tilde{T} = \text{const}$  имеет бесконечную пространственную протяженность по координате  $\tilde{R}$ , а вдоль координат  $\theta$  и  $\varphi$  оно замкнуто и является в целом топологическим произведением сферы на прямую. Трехмерный объем этого сечения бесконечен. Система нестационарна, она сжимается вдоль  $\theta$  и  $\varphi$  (радиус сферы уменьшается от  $r_g$  до 0) и расширяется вдоль  $\tilde{R}$ . Собственное время ее существования конечно:

$$\tau = \int_{r_g/c}^0 \sqrt{-g_{00}} d\tilde{T} = \frac{\pi}{2} r_g. \quad (2.4.10)$$

Мировые линии частиц  $\tilde{R} = \text{const}$ , образующих систему, показаны на рис. 2 в координатах Леметра (2.4.3). Из рисунка видно, что частицы движутся внутри сферы Шварцшильда и система ни в коем случае не яв-

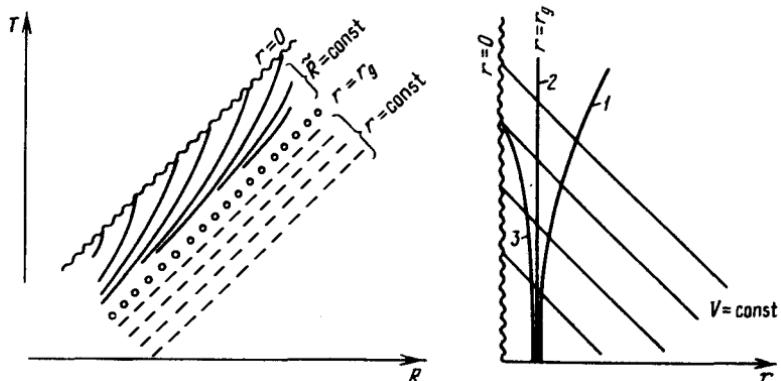


Рис. 2. Мировые линии частиц  $\tilde{R} = \text{const}$ , образующих систему отсчета (2.4.9) в координатах Леметра

Рис. 3. Пространство-время Шварцшильда в координатах Эддингтона – Финкельштейна (2.4.12):  $V = \text{const}$  – мировые линии фотонов, падающих к  $r = 0$ ; 1, 2, 3 – мировые линии фотонов, движущихся в противоположном (по сравнению с  $V = \text{const}$ ) направлении

ляется продолжением системы Шварцшильда для  $r < r_g$  (ее мировые линии  $r = \text{const}$  показаны на том же рисунке). Время и пространственное радиальное направление в этих системах своеобразно меняются местами.

Приведем теперь систему отсчета, которая исторически была первой из построенных систем, не имеющих особенностей на  $r_g$  [Эддингтон (1924), Финкельштейн (1958)]. Эта система связана с фотонами, свободно движущимися по радиусу. Уравнение движения фотонов определяется выражением (2.3.3). Для фотонов, движущихся к центру,  $r$  уменьшается с ростом  $t$ . Выражение (2.3.3) для таких фотонов можно переписать в виде

$$t = -\frac{r}{c} - \frac{r_g}{c} \ln \left| \frac{r}{r_g} - 1 \right| + \frac{V}{c}. \quad (2.4.11)$$

Здесь  $V$  – константа, характеризующая радиальную координату фотона для фиксированного момента  $t$ .

В выражении (2.4.11) под логарифмом поставлен знак модуля, что обеспечивает применимость выражения и при  $r < r_g$ <sup>\*</sup>). Если мы возьмем множество фотонов при фиксированном  $t$  и припишем каждому фотону номер  $V$ , который в дальнейшем не меняется при движении фотона, то подобно тому, как в случае нерелятивистской частицы [см. (2.3.9)] мы выбирали  $r_1$  в качестве новой радиальной координаты, здесь можно выбрать  $V$  в качестве другой новой координаты. Правда, есть и существенное отличие – никакой наблюдатель не может двигаться вместе с фотоном и в этом смысле новая система не подходит, строго говоря, под определение системы отсчета. Но в некоторых случаях такая "система" из пробных фотонов бывает удобна. Надо только всегда помнить, что  $V$  – световая координата (не пространственная и не временная). В качестве второй координаты можно выбрать прежнюю координату  $r$ . Тогда, дифференцируя (2.4.11) и подставляя получающееся выражение для  $dt$  в (2.2.1), находим

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dV^2 + 2dVdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.4.12)$$

Выражение (2.4.12) регулярно на  $r = r_g$ . Действительно, коэффициент при  $dV^2$  обращается в нуль на  $r_g$ , но наличие члена  $2dVdr$  обеспечивает невырожденность этой системы координат. Пространство-время в координатах  $V, r$  изображено на рис. 3; при этом учтено, что система неортогональна и координатные линии образуют между собой постоянный угол  $45^\circ$  (на плоскости  $V, r$ ).

## § 2.5. Сжимающиеся и расширяющиеся $T$ -области

Рассмотренные выше свойства систем отсчета внутри сферы Шварцшильда в  $T$ -области весьма своеобразны. Действительно, мы видим, что все эти системы обязательно должны сжиматься по  $\theta$ - и  $\varphi$ -направлениям, а коэффициент  $g_{22}$  должен уменьшаться со временем (что эквивалентно уменьшению  $r$  со временем). По-другому этот факт можно сформулировать

<sup>\*</sup>) Всегда надо помнить об изменении смысла координат  $r$  и  $t$  при  $r < r_g$  (см. выше).