

T_+ -область) правее R_1 и расширяющееся вещество шара левее R_1 (см. рис. 8). Заметим, что в расширяющейся T_+ -области не может попасть никакой сигнал, никакая частица с пространственной бесконечности (вообще из области с $r > r_g$). Такие области пространства-времени называют *белыми дырами* [Новиков (1964*^b), Нееман (1965)]. Они не могут возникнуть во Вселенной в результате коллапса какого-либо объекта, но в принципе могли бы существовать в расширяющейся Вселенной с самого начала ее расширения. Подробнее этот круг вопросов рассматривается в § 13.2.

В заключение параграфа еще раз подчеркнем, что с математической точки зрения невозможно продолжать решение за истинную сингулярность пространства-времени $r = 0$. Таким образом, ОТО не может дать ответа на вопрос, что будет после сжатия до $r = 0$ в T_- -области или что было до начала расширения из $r = 0$ в T_+ -области (и даже сказать, корректна ли постановка таких вопросов). С физической точки зрения ясно, что вблизи $r = 0$ существенные квантовые процессы уже для самого пространства-времени (что не описывается ОТО). Мы вернемся к этому в гл. 13.

§ 2.7. Вечные черные и белые дыры

На первый взгляд кажется возможным существование в пустом пространстве вечной черной дыры, т.е. такой черной дыры, которая не возникает в результате сжатия массы (как изображено на рис. 6 и 7), а всегда существует в виде, показанном на рис. 1 и 3. В таком пространстве-времени всегда есть сфера Шварцшильда и нет сжимающегося вещества шара.

Удивительным образом оказывается, что такого образования — "чистой" вечной черной дыры — в принципе быть не может. Дело заключается в следующем. Картина или, как говорят, карта пространства-времени, представленная на рис. 1 (или рис. 3), не охватывает всего пространства-времени. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим частицу, свободно движущуюся по радиусу от сферы Шварцшильда. Ее мировая линия в сжимающейся системе Леметра определяется выражением

$$\begin{aligned} \text{const} = & -\frac{R}{r_g} + \frac{2cT}{r_g} - 4\left(\frac{3}{2}\frac{R - cT}{r_g}\right)^{1/3} + \\ & + 2\ln\left\{\frac{\left[\frac{3}{2}(R - cT)\right]^{1/3} + r_g^{1/3}}{\left[\frac{3}{2}(R - cT)\right]^{1/3} - r_g^{1/3}}\right\} \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

и изображена на рис. 10. Продолженная в прошлое, она асимптотически подходит к линии $r = r_g$, не пересекая ее. По времени T системы отсчета Леметра частица существует от $T = -\infty$. Однако мы знаем, что по собственному времени частицы путь от r_g до любого конечного r занимает конечный промежуток. Таким образом, рис. 10 не охватывает всей прошлой истории рассмотренной частицы от $\tau = -\infty$ по ее собственным часам. Ведь история одиничной (т.е. не взаимодействующей с другими частицами —

скажем не рождающейся, например, во взаимодействиях) частицы не обрывается на сфере Шварцшильда. Мировая линия такой частицы должна либо продолжаться бесконечно по ее собственному времени, либо обрываться на истинной сингулярности пространства-времени, где вступают в силу новые физические законы. Значит, карта неполна, не покрывает всего пространства-времени.

Можно ли построить всюду пустое пространство-время с вечной черной дырой, которое полно в том смысле, что охватывает все истории в всех движущихся в нем частиц? Оказывается, можно, хотя в нем, как мы увидим, будет представлена не только вечная черная дыра, но и вечная белая дыра.

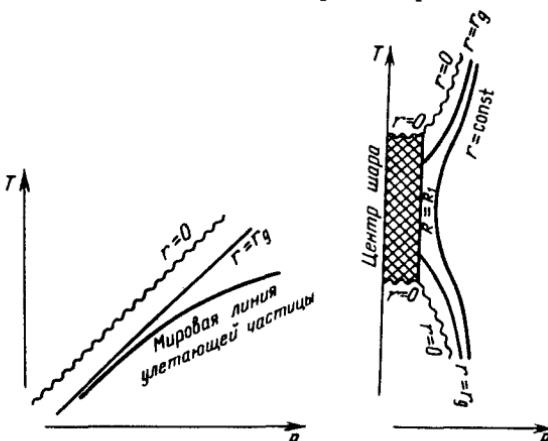


Рис. 10. Мировая линия частицы, улетающей от сферы Шварцшильда, в сжимающихся координатах Леметра

Рис. 11. Расширение шара из-под сферы Шварцшильда с последующим сжатием под сферу. Область внутри шара заштрихована

Чтобы естественно подойти к такому построению, рассмотрим белую дыру с расширяющимся пылевым шаром. Представим, что энергия движения частиц шара такова, что поверхность шара не разлетается в бесконечность, а, достигнув максимального радиуса, снова сжимается до размеров r_g , а затем коллапсирует до $r = 0$.

Согласно формуле (2.3.5) удельная энергия E/mc^2 частицы на поверхности шара должна быть меньше единицы, чтобы $dr/dt = 0$ при некотором r . В решении Толмена (2.6.1) – (2.6.4) такой разлет до конечного радиуса соответствует выбору $f(R) < 0$. Качественно пространство-время с расширяющимся, а затем сжимающимся пылевым шаром изображено на рис. 11. В этом пространстве-времени имеется сначала белая дыра, а затем возникает черная дыра. Обратим внимание на то, что на рисунке линии $r = 0$ и $r = r_g$ в данном решении изображаются уже не прямыми, как в случае движения с параболической скоростью (см. рис. 6, 8).

Будем уменьшать удельную энергию E/mc^2 частиц на поверхности шара. Полную массу шара M , а значит, и величину r_g считаем фиксированными, т.е. с уменьшением E/mc^2 мы уменьшаем долю кинетической энергии разлета в полной энергии Mc^2 шара. Тогда шар будет разлетаться до все мень-

Рис. 12. Граница шара расширяется только до сферы Шварцшильда и затем сжимается

ших радиусов. Наконец, при $E/mc^2 = 0$ разлет шара происходит до $r = r_g$. Пространство-время тогда качественно выглядит так, как показано на рис. 12.

Что будет, если константу E уменьшать и дальше, делая ее отрицательной? На первый взгляд это физически бессмысленно, а формально ведет к увеличению максимального радиуса разлета r , что определяется приравниванием нулю dr/dt в формуле (2.3.5). В действительности ничего бессмысленного в такой операции нет. Чтобы в этом разобраться, обратимся к формулам (2.6.1) – (2.6.4). Будем считать, что пылевой шар, эволюция которого рассматривается, однороден. Тогда внутри шара метрика пространства-времени соответствует метрике однородной изотропной Вселенной. В решении (2.6.1) – (2.6.4) такая метрика отвечает выбору функций

$$f(R) = -\sin^2 R, \quad (2.7.2)$$

$$F(R) = a \sin^3 R, \quad (2.7.3)$$

где a – масштабный фактор, определяемый плотностью ρ_{\max} внутри шара в момент максимального расширения:

$$a = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G \rho_{\max}}}. \quad (2.7.4)$$

Вещество шара продолжается до граничного значения координаты $R = R_1$. Значение R_1 может лежать в пределах $0 < R_1 \leq \pi$. Вне шара, в вакууме (при $R > R_1$), частицы, осуществляющие систему отсчета, свободно движутся по радиальным геодезическим. Метрика определяется следующими функциями [Новиков (1963*, 1964*a)]:

$$f(R) = -\frac{1}{(R + \operatorname{ctg} R_1 - R_1)^2 + 1}, \quad (2.7.5)$$

$$F(R) = r_g. \quad (2.7.6)$$

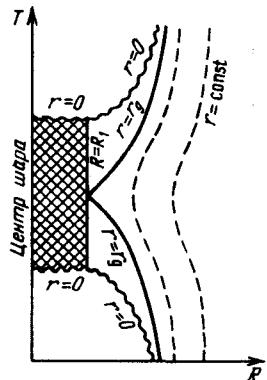
В этой ситуации

$$r_g = a \sin R_1. \quad (2.7.7)$$

Сумма масс покоя частиц, из которых состоит шар, определяемая произведением плотности на объем шара, есть

$$M_* = \frac{3}{4} \frac{ac^2}{G} \left(R_1 - \frac{1}{2} \sin 2R_1 \right). \quad (2.7.8)$$

Величина M (гравитационная масса) характеризует полную энергию частиц шара, включая гравитационную. Если граничная координата R_1 лежит в пределах $\pi/2 < R_1 < \pi$, то внутренность шара представляет собой так



называемый *полузамкнутый мир* [см. Зельдович, Новиков (1975*) ; там же ссылки на предыдущие работы]. В этих условиях увеличение граничного значения R_1 (добавление новых слоев вещества) увеличивает M_* , но уменьшает M (из-за сильного гравитационного дефекта массы).

Наша цель – исследование эволюции шара, когда мы сообщаем его частичам все меньшую и меньшую удельную энергию. Это значит, что мы будем брать все меньшее и меньшее отношение M/M_* . Для выяснения того, что при этом получается, можно поступить двояко – брать разные отношения M/M_* , фиксируя неизменной либо M , либо M_* . Выбор имеет только методическое значение. Так как нас будет интересовать метрика вне шара, мы зафиксируем M , определяющую внешнюю метрику.

Проследим при этом, как будет происходить эволюция во времени границы шара $r(R_1, T)$ для каждого фиксированного R_1 и какова метрика вне шара. Отношение M/M_* определяется (2.7.7) и (2.7.8):

$$\frac{M}{M_*} = \frac{2}{3} \sin^3 R_1 (R_1 - \sin R_1 \cos R_1)^{-1}. \quad (2.7.9)$$

Эволюция границы шара описывается отношением радиуса наибольшего расширения границы r_{\max} к гравитационному радиусу r_g :

$$r_{\max}/r_g = \sin^{-2} R_1. \quad (2.7.10)$$

Когда $R_1 \ll \pi/2$, отношение M/M_* лишь немного меньше единицы, и картина эволюции качественно выглядит так, как показано на рис. 11 ($r_{\max}/r_g \gg 1$).

Когда $R_1 = \frac{\pi}{2}$, $\frac{M}{M_*} = \frac{4}{3\pi} \left(\frac{r_{\max}}{r_g} = 1 \right)$, и ситуация показана на рис. 12.

При $R_1 > \pi/2$ шар является полузамкнутым миром, отношение M/M_* уменьшается с приближением R_1 к π . Это соответствует $E < 0$ в (2.3.5). Теперь метрика выглядит так, как показано на рис. 13.

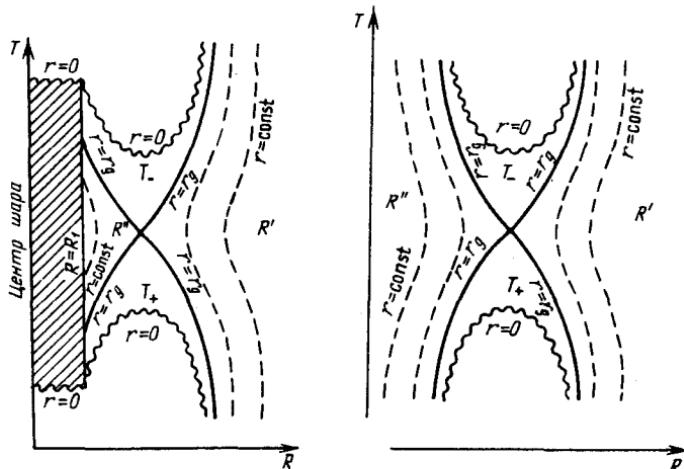


Рис. 13. Расширение и сжатие полузамкнутого мира

Рис. 14. Всюду пустое пространство-время с белой и черной дырой

Появилась новая качественная особенность. Отношение r_{\max}/r_g снова больше единицы. Но граница шара теперь не появляется из-под сферы с радиусом r_g в пространстве внешнего наблюдателя R' . Появилась новая область R'' , которая вне шара во всем идентична R' .

При $R_1 \rightarrow \pi$ граница R_1 все больше сдвигается влево на рис. 13, оставляя свободной все большую часть R'' . Отношение r_{\max}/r_g стремится к бесконечности, а отношение M/M^* — к нулю.

Если перейти к пределу $R_1 = \pi$, то область, занятая веществом, исчезнет вовсе, все пространство-время теперь пустое (рис. 14). В нем есть белая дыра T_+ , черная дыра T_- и два идентичных внешних пространства R' и R'' , переходящие в евклидовы на пространственной бесконечности. Это пространство-время полно в том смысле, что любая геодезическая теперь либо продолжается неограниченно, либо заканчивается истинной сингулярностью.

Система отсчета, охватывающая все пространство-время на рис. 14, описывается решением вида (2.7.5) — (2.7.6), где начало отсчета R удобно выбрать в минимуме функции $f(R)$. Тогда

$$f(R) = -\frac{1}{R^2 + 1}, \quad F = r_g, \quad -\infty < R < \infty. \quad (2.7.11)$$

Впервые полное, всюду пустое пространство-время, изображенное на рис. 14, было построено Сингом (1950), затем Фронделом (1959), Крускалом (1960), Жекересом (1960). Физические соображения, приведенные выше, и решение (2.7.11) получены Новиковым (1962**b*, 1963*).

Итак, мы получили всюду пустое пространство с присутствием белой и черной дыр (обязательно вместе!). Эти дыры можно назвать "вечными", так как с точки зрения внешних наблюдателей, покоящихся в R' и R'' , эти дыры существуют всегда.

Физический смысл второго "внешнего пространства" R'' выяснен выше, когда рассматривалась эволюция шара со все меньшей удельной энергией M/M^* . Вопрос о том, могут ли реально существовать вечные черные и белые дыры (подобные рис. 14), совсем лишенные вещества, будет рассмотрен в § 13.2 в связи с вопросом устойчивости белых дыр.

В заключение этого параграфа приведем систему координат, предложенную Крускалом (1960) и Жекересом (1960). Она, как и система (2.7.11), покрывает все пространство-время вечных белой и черной дыр. В этих координатах интервал записывается в виде

$$ds^2 = \frac{4r_g^3}{r} e^{-r/r_g} (-d\tilde{v}^2 + d\tilde{u}^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.7.12)$$

где r — функция \tilde{v} и \tilde{u} :

$$\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{r/r_g} = \tilde{u}^2 - \tilde{v}^2. \quad (2.7.13)$$

Связь координат \tilde{u} и \tilde{v} с r и t в областях R' и T_- дается следующими

соотношениями:

$$\tilde{u} = \left(\frac{r}{r_g} - 1 \right)^{1/2} e^{r/2r_g} \operatorname{ch} \frac{ct}{2r_g}, \quad \text{при } r > r_g, \quad (2.7.14)$$

$$\tilde{v} = \left(\frac{r}{r_g} - 1 \right)^{1/2} e^{r/2r_g} \operatorname{sh} \frac{ct}{2r_g}$$

$$\tilde{u} = \left(1 - \frac{r}{r_g} \right)^{1/2} e^{r/2r_g} \operatorname{sh} \frac{ct}{2r_g}, \quad \text{при } r < r_g. \quad (2.7.15)$$

$$\tilde{v} = \left(1 - \frac{r}{r_g} \right)^{1/2} e^{r/2r_g} \operatorname{ch} \frac{ct}{2r_g}$$

В областях R'' и T_+ аналогичные соотношения получаются путем замены $\tilde{u} \rightarrow -\tilde{u}$, $\tilde{v} \rightarrow -\tilde{v}$. Система Крускала удобна тем, что в ней радиальные нулевые геодезические изображаются прямыми линиями, наклоненными под углом 45° к осям координат.

§ 2.8. Небесная механика в поле тяготения черной дыры

Вернемся к обсуждению процессов во внешнем по отношению к сфере Шварцшильда пространстве черной дыры. В этом параграфе мы рассмотрим движение пробных частиц по геодезическим вокруг черной дыры. Вопрос этот давно и тщательно проанализирован, вошел в учебники и монографии [см. Зельдович, Новиков (1971*), Мизнер, Торн, Уилер (1973)]. Мы ограничимся здесь кратким обсуждением именно тех особенностей движения, которые специфичны для черной дыры, а не просто для сильного поля тяготения (скажем, вокруг нейтронной звезды).

Будем рассматривать движение частиц во внешнем пространстве по отношению к системе отсчета Шварцшильда по часам наблюдателя на бесконечности (см. § 2.2). Так как поле тяготения сферически-симметрично, то траектория частицы плоская, и можно считать, что она лежит в плоскости $\theta = \pi/2$. Уравнения движения имеют вид

$$\left(\frac{dr}{c dt} \right)^2 = \frac{(1 - r_g/r)^2 [\tilde{E}^2 - (1 - r_g/r)(1 + \tilde{L}^2 r_g^2/r^2)]}{\tilde{E}^2}, \quad (2.8.1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{(1 - r_g/r)\tilde{L}r_g}{\tilde{E}r^2}. \quad (2.8.2)$$

Здесь \tilde{E} – удельная энергия частицы (на единицу собственной энергии mc^2), m – масса частицы, \tilde{L} – удельный угловой момент (измеренный в единицах mcr_g). Обе величины сохраняются при движении. Физическая скорость частицы v , измеренная находящимся рядом наблюдателем по его часам τ , непосредственно связана с энергией \tilde{E} , что следует из (2.8.1) – (2.8.2):

$$\tilde{E}^2 = (1 - r_g/r)(1 - v^2/c^2)^{-1}. \quad (2.8.3)$$