

соотношениями:

$$\tilde{u} = \left(\frac{r}{r_g} - 1 \right)^{1/2} e^{r/2r_g} \operatorname{ch} \frac{ct}{2r_g}, \quad \text{при } r > r_g, \quad (2.7.14)$$

$$\tilde{v} = \left(\frac{r}{r_g} - 1 \right)^{1/2} e^{r/2r_g} \operatorname{sh} \frac{ct}{2r_g}$$

$$\tilde{u} = \left(1 - \frac{r}{r_g} \right)^{1/2} e^{r/2r_g} \operatorname{sh} \frac{ct}{2r_g}, \quad \text{при } r < r_g. \quad (2.7.15)$$

$$\tilde{v} = \left(1 - \frac{r}{r_g} \right)^{1/2} e^{r/2r_g} \operatorname{ch} \frac{ct}{2r_g}$$

В областях R'' и T_+ аналогичные соотношения получаются путем замены $\tilde{u} \rightarrow -\tilde{u}$, $\tilde{v} \rightarrow -\tilde{v}$. Система Крускала удобна тем, что в ней радиальные нулевые геодезические изображаются прямыми линиями, наклоненными под углом 45° к осям координат.

§ 2.8. Небесная механика в поле тяготения черной дыры

Вернемся к обсуждению процессов во внешнем по отношению к сфере Шварцшильда пространстве черной дыры. В этом параграфе мы рассмотрим движение пробных частиц по геодезическим вокруг черной дыры. Вопрос этот давно и тщательно проанализирован, вошел в учебники и монографии [см. Зельдович, Новиков (1971*), Мизнер, Торн, Уилер (1973)]. Мы ограничимся здесь кратким обсуждением именно тех особенностей движения, которые специфичны для черной дыры, а не просто для сильного поля тяготения (скажем, вокруг нейтронной звезды).

Будем рассматривать движение частиц во внешнем пространстве по отношению к системе отсчета Шварцшильда по часам наблюдателя на бесконечности (см. § 2.2). Так как поле тяготения сферически-симметрично, то траектория частицы плоская, и можно считать, что она лежит в плоскости $\theta = \pi/2$. Уравнения движения имеют вид

$$\left(\frac{dr}{c dt} \right)^2 = \frac{(1 - r_g/r)^2 [\tilde{E}^2 - (1 - r_g/r)(1 + \tilde{L}^2 r_g^2/r^2)]}{\tilde{E}^2}, \quad (2.8.1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{(1 - r_g/r)\tilde{L}r_g}{\tilde{E}r^2}. \quad (2.8.2)$$

Здесь \tilde{E} – удельная энергия частицы (на единицу собственной энергии mc^2), m – масса частицы, \tilde{L} – удельный угловой момент (измеренный в единицах mcr_g). Обе величины сохраняются при движении. Физическая скорость частицы v , измеренная находящимся рядом наблюдателем по его часам τ , непосредственно связана с энергией \tilde{E} , что следует из (2.8.1) – (2.8.2):

$$\tilde{E}^2 = (1 - r_g/r)(1 - v^2/c^2)^{-1}. \quad (2.8.3)$$

Рис. 15. Эффективный потенциал черной дыры

Качественные особенности движения частицы выявляются следующим образом. Приравнивая dr/dt нулю, можно найти точки наибольшего приближения частицы к черной дыре и наибольшего удаления от нее. Правая часть (2.8.1) равна нулю, когда выполняется равенство

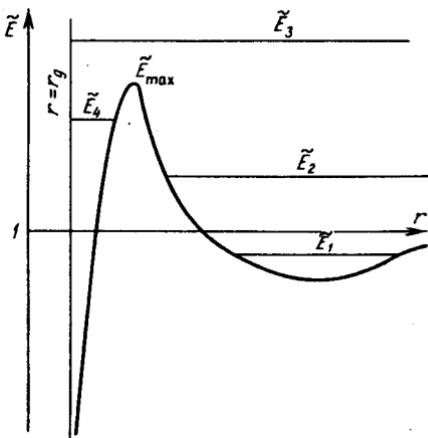
$$\tilde{E}^2 = (1 - r_g/r)(1 + \tilde{L}^2 r_g^2/r^2). \quad (2.8.4)$$

Это выражение иногда называют эффективным потенциалом. Типичная кривая (2.8.4) для фиксированного \tilde{L} изображена на рис. 15.

Движение частицы происходит с постоянной удельной энергией и изображается на рис. 15 горизонталью. Так как числитель (2.8.1) должен быть положительным, то отрезок горизонтали, изображающей движение частицы, лежит выше кривой (2.8.4). Пересечение горизонтали с эффективным потенциалом определяет точки наибольшего приближения к черной дыре и наибольшего удаления от нее. Траектория движения частицы не является коническим сечением и, вообще говоря, не замкнута. На рис. 15 приведены горизонтали для типичных движений. Горизонталь $\tilde{E}_1 < 1$ отвечает движению в ограниченной области пространства между r_1 и r_2 — аналог эллиптического движения ньютоновской теории (пример такой траектории показан на рис. 16a)*. Горизонталь $\tilde{E}_2 > 1$ соответствует приходу частицы из бесконечности и уходу снова на бесконечность (аналог гиперболического движения). Пример траектории показан на рис. 16b).

Наконец, горизонталь \tilde{E}_3 не пересекает потенциальной кривой, проходя выше ее максимума \tilde{E}_{\max} , и соответствует падению частицы в черную дыру (гравитационный захват). Этот тип движения не существует в ньютоновской теории и характерен для черной дыры. Траектория такого движения показана на рис. 16c. Гравитационный захват (см. следующий параграф) возможен из-за наличия максимума в эффективном потенциале. Такого максимума нет на соответствующей кривой ньютоновской теории.

Кроме перечисленных выше движений возможно еще движение частицы вблизи черной дыры, соответствующее горизонтали \tilde{E}_4 на рис. 15. Эта горизонталь может лежать как ниже, так и выше единицы (последнее — в случае $\tilde{E}_{\max} > 1$), простираясь от r_g до пересечения с кривой $\tilde{E}(r)$. Она изображает движение частицы, которая, например, сначала удаляется от черной дыры, достигает r_{\max} (в точке пересечения \tilde{E}_4 и $\tilde{E}(r)$), а затем вновь падает к черной дыре и поглощается ею (рис. 16d).



*) Если вся орбита лежит достаточно далеко от черной дыры, то она представляет собой эллипс, медленно поворачивающийся в плоскости движения.

Чтобы уйти на бесконечность, тело должно иметь энергию $\tilde{E} \geq 1$. Из уравнения (2.8.3) находим, что выражение для второй космической скорости есть ($v_{2\text{косм}}$ соответствует $\tilde{E} = 1$)

$$v_{2\text{косм}} = c \sqrt{r_g/r} = \sqrt{2GM/r}, \quad (2.8.5)$$

что совпадает с выражением ньютоновской теории.

Заметим, что в ньютоновской теории в поле точечной массы вторая космическая скорость гарантирует уход на бесконечность независимо от

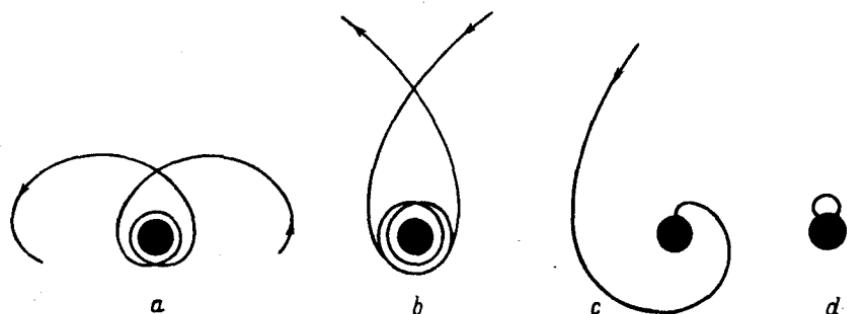


Рис. 16. Траектории частицы с энергиями \tilde{E}_1 (a), \tilde{E}_2 (b), \tilde{E}_3 (c) и \tilde{E}_4 (d)

направления движения. В случае черной дыры это не так. Здесь возможны траектории, заканчивающиеся в черной дыре (типа \tilde{E}_4 или \tilde{E}_3 на рис. 15, последняя — если частица движется к черной дыре). Это явление выше мы назвали гравитационным захватом.

Важным частным случаем движения частицы вокруг черной дыры является движение по окружности. При этом тождественно $dr/dt \equiv 0$. На рис. 15 такое движение изображается точкой в экстремуме кривой эффективного потенциала. Положение точки в минимуме соответствует устойчивому движению, в максимуме — неустойчивому. Последнее движение не имеет аналога в ньютоновской теории и специфично для черной дыры. Реальное движение точки с \tilde{E} , равной \tilde{E}_{\max} для данного \tilde{L} , т.е. по неустойчивой кривой орбите, конечно, невозможно, как и всякое неустойчивое движение. Однако, если движение частицы изображается горизонталью $\tilde{E} = \text{const}$, подходящей близко к \tilde{E}_{\max} , то частица будет совершать много оборотов вокруг черной дыры при r , соответствующем положению \tilde{E}_{\max} , прежде чем орбита удалится от этого значения r . Примером такого движения может служить орбита на рис. 16b.

Форма и положение потенциальной кривой $\tilde{E}(r)$ — разные для разных \tilde{L} ; соответствующие кривые для некоторых значений \tilde{L} показаны на рис. 17.

Минимумы и максимумы $\tilde{E}(r)$ имеются на кривых с $\tilde{L} > \sqrt{3}$. При $\tilde{L} < \sqrt{3}$ кривая $\tilde{E}(r)$ монотонна. Таким образом, движение по круговым орбитам возможно лишь для $\tilde{L} > \sqrt{3}$. При этом минимумы кривых лежат при $r > 3r_g$. Следовательно, устойчивые круговые орбиты могут существовать лишь для $r > 3r_g$ [Хаджихара (1931)]. Ближе этого расстояния имеются только

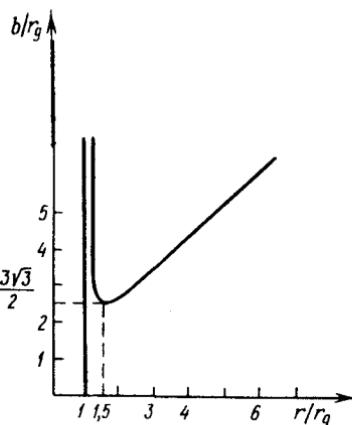
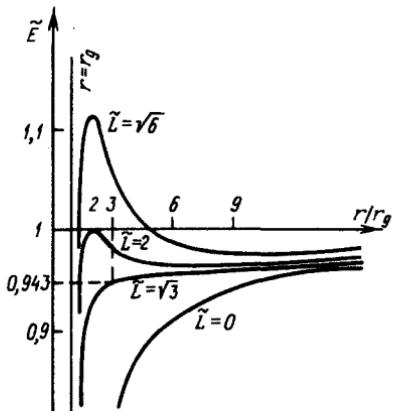


Рис. 17. Эффективный потенциал для разных значений \tilde{L}

Рис. 18. Положение экстремумов по r траектории ультрарелятивистской частицы в зависимости от прицельного расстояния b

неустойчивые круговые орбиты, соответствующие максимумам кривых \tilde{E}_{\max} . При $\tilde{L} \rightarrow \infty$ координаты максимумов \tilde{E}_{\max} уменьшаются до $r = 1,5 r_g$. Ближе $r = 1,5 r_g$ невозможны даже неустойчивые круговые движения.

Критической круговой орбите, отделяющей устойчивые движения от неустойчивых, соответствует $r = 3r_g$. Скорость движения частиц по ней $v = c/2$. Энергия частицы при этом $\tilde{E} = \sqrt{8/9} \approx 0,943$. Это движение с максимальной возможной энергией связи $E \approx 0,057 mc^2$. При круговом движении по (неустойчивым) орбитам с $r < 3r_g$ скорость v растет с уменьшением r от $c/2$ до c на последней круговой орбите при $r = 1,5 r_g$. При движении с $r = 2r_g$ энергия частицы $\tilde{E} = 1$ и, следовательно, значение круговой скорости совпадает со значением второй космической скорости. При еще меньших r последняя по величине меньше круговой. Никакого парадокса в этом нет, ибо круговое движение здесь неустойчиво, и малейшее возмущение (дающее импульс по направлению от черной дыры) переводит частицу на орбиту, уходящую в бесконечность, т.е. соответствующую гиперболическому движению.

Рассмотрим движение ультрарелятивистской частицы. Оно соответствует в (2.8.1), (2.8.2) пределу $v \rightarrow c$, и поэтому $\tilde{E} \rightarrow \infty$ и $\tilde{L} \rightarrow \infty$. При этом надо помнить, что отношение \tilde{E}/\tilde{L} всегда равно отношению r_g/b , где b —прицельное расстояние частицы на бесконечности. Учтя это, получаем вместо (2.8.1), (2.8.2)

$$\left(\frac{dr}{c dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2 \left[1 - \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\right] \quad (2.8.6)$$

$$\frac{d\varphi}{c dt} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{b}{r^2}. \quad (2.8.7)$$

Формулы (2.8.6), (2.8.7) описывают искривление траектории ультрарелятивистской частицы и луча света, движущихся вблизи черной дыры.

Приравнивая квадратную скобку в (2.8.6) нулю, получаем положение точек экстремумов траектории как функцию радиуса r . Соответствующая кривая $b(r)$ показана на рис. 18. Знак b зависит от направления облета; будем считать b положительным. Движение ультрарелятивистской частицы с заданным b изображается на этом рисунке горизонталью $b = \text{const}$. Частица приближается к черной дыре, огибает ее на минимальном расстоянии, соответствующем точке пересечения $b = \text{const}$ с правой ветвью кривой $b(r)$, и снова улетает в бесконечность. Если пересечение происходит вблизи минимума $b_{\min} = 3\sqrt{3}r_g/2$, то частица может сделать много оборотов, прежде чем улетит в бесконечность. Точно минимуму кривой $b(r)$ соответствует (неустойчивое) движение по кругу с радиусом $r = 1,5 r_g$ со скоростью $v = c$. Заметим, что левая ветвь $b(r)$ на рис. 18 соответствует максимальному удалению ультрарелятивистской частицы, движущейся вблизи черной дыры и сначала удаляющейся от нее до $r < 1,5 r_g$, а потом снова падающей к ней. При этом параметр b , разумеется, не имеет прямого смысла прицельного расстояния на бесконечности, так как частица никогда на бесконечность не уходит. Этот параметр может быть выражен при заданной координате r через тангенс угла ψ между траекторией частицы и направлением на центр черной дыры:

$$b = \frac{r |\operatorname{tg} \psi|}{\sqrt{(1 - r_g/r)(1 + \operatorname{tg}^2 \psi)}}. \quad (2.8.8)$$

Если ультрарелятивистская частица подлетает к черной дыре из бесконечности и параметр b меньше критического значения $b_{\min} = 3\sqrt{3}r_g/2$, то такая частица попадает в черную дыру.

§ 2.9. Гравитационный захват

В этом параграфе мы рассматриваем движение пробной частицы, при котором ее траектория заканчивается в черной дыре. Такое движение может быть двух типов. Во-первых, траектория частицы начинается в бесконечности и заканчивается в черной дыре; во-вторых, траектория начинается и заканчивается в черной дыре. Разумеется, вылететь из черной дыры частица не может. Поэтому движение по траектории второго типа возможно только при выведении частицы на эту траекторию по негеодезической кривой или при рождении частицы вблизи черной дыры *).

Особый интерес представляет гравитационный захват частицы, прилетающей из бесконечности. Обсудим этот случай.

Как ясно из разобранных в предыдущем параграфе особенностей движения, для захвата необходимо, чтобы при заданном \tilde{L} прилетающей из бесконечности частицы ее энергия была больше максимума (\tilde{E}_{\max}) кривой $\tilde{E}(r)$. Рассмотрим гравитационный захват для двух предельных случаев — для частицы, имеющей на бесконечности скорость много меньше световой ($v_\infty/c \ll 1$), и для ультрарелятивистской на бесконечности частицы.

*) Конечно, частица может вылететь из белой дыры и упасть в черную — в случае, рассмотренном в § 2.7.