Приравнивая квадратную скобку в (2.8.6) нулю, получаем положение точек экстремумов траектории как функцию радиуса r. Соответствующая кривая $b(r)$ показана на рис. 18. Знак b зависит от направления облета; будем считать b положительным. Движение ультрарелятивистской частицы с заданным b изображается на этом рисунке горизонталью $b = \text{const}$. Частица приближается к черной дыре, огибает ее на минимальном расстоянии, соответствующем точке пересечения $b = \text{const}$ с правой ветвью кривой $b(r)$, и снова улетает в бесконечность. Если пересечение происходит вблизи минимума $b_{\min} = 3\sqrt{3}\, r_g/2$, то частица может сделать много оборотов, прежде чем улетит в бесконечность. Точно минимуму кривой $b(r)$ соответствует (неустойчивое) движение по кругу с радиусом $r = 1{,}5\ r_g$ со скоростью $v = c$. Заметим, что левая ветвь $b(r)$ на рис. 18 соответствует максимальному удалению ультрарелятивистской частицы, движущейся вблизи черной дыры и сначала удаляющейся от нее до $r < 1{,}5\, r_g$, а потом снова падающей к ней. При этом параметр b, разумеется, не имеет прямого смысла прицельного расстояния на бесконечности, так как частица никогда на бесконечность не уходит. Этот параметр может быть выражен при заданной координате r через тангенс угла ψ между траекторией частицы и направлением на центр черной дыры:

$$b = \frac{r\,|\operatorname{tg}\psi|}{\sqrt{(1 - r_g/r)(1 + \operatorname{tg}^2\psi)}}. \tag{2.8.8}$$

Если ультрарелятивистская частица подлетает к черной дыре из бесконечности и параметр b меньше критического значения $b_{\min} = 3\sqrt{3}\ r_g/2$, то такая частица попадает в черную дыру.

§ 2.9. Гравитационный захват

В этом параграфе мы рассматриваем движение пробной частицы, при котором ее траектория заканчивается в черной дыре. Такое движение может быть двух типов. Во-первых, траектория частицы начинается в бесконечности и заканчивается в черной дыре; во-вторых, траектория начинается и заканчивается в черной дыре. Разумеется, вылететь из черной дыры частица не может. Поэтому движение по траектории второго типа возможно только при выведении частицы на эту траекторию по негеодезической кривой или при рождении частицы вблизи черной дыры *).

Особый интерес представляет гравитационный захват частицы, прилетающей из бесконечности. Обсудим этот случай.

Как ясно из разобранных в предыдущем параграфе особенностей движения, для захвата необходимо, чтобы при заданном $\tilde{L}$ прилетающей из бесконечности частицы ее энергия была больше максимума ($\tilde{E}_{\max}$) кривой $\tilde{E}(r)$. Рассмотрим гравитационный захват для двух предельных случаев – для частицы, имеющей на бесконечности скорость много меньше световой ($v_\infty/c \ll 1$), и для ультрарелятивистской на бесконечности частицы.

---

*) Конечно, частица может вылететь из белой дыры и упасть в черную – в случае, рассмотренном в § 2.7.

В первом случае $\tilde{E} = 1$. Кривая $\tilde{E}(r)$, имеющая $\tilde{E}_{max} = 1$, соответствует $\tilde{L}_{cr} = 2$ (см. рис. 17). Максимум этой кривой лежит при $r = 2r_g$. Значит, этот радиус является минимальным для периастров орбит частиц с $v_\infty = 0$, приходящих к черной дыре и снова уходящих на бесконечность. При $\tilde{L} \leqslant 2$ происходит гравитационный захват. Следовательно, прицельное расстояние, соответствующее захвату, $b_{cr} = \tilde{L}_{cr}/\tilde{E} = 2r_g(v_\infty/c)$. Сечение захвата нерелятивистской частицы

$$\sigma_{нерел} = \pi b_{cr}^2 = 4\pi(v_\infty/c)^2 r_g^2. \tag{2.9.1}$$

Для ультрарелятивистской частицы $b_{cr} = 3\sqrt{3}\, r_g/2$ и сечение захвата

$$\sigma_{рел} = \frac{27}{4}\pi r_g^2. \tag{2.9.2}$$

В связи с возможностью гравитационного захвата не всякая частица, имеющая скорость больше второй космической, улетает в бесконечность. Для этого надо еще, чтобы угол ψ между направлением на центр черной дыры и траекторией движения был больше некоторого критического значения ψ_{cr}. Этот критический угол для скорости, равной второй космической, дается выражением

$$\operatorname{tg}\psi_{cr,2косм} = \pm\frac{2\sqrt{(1 - r_g/r)r_g/r}}{\sqrt{1 - 4r_g/r(1 - r_g/r)}}. \tag{2.9.3}$$

Знак плюс выбирается для $r > 2r_g$ ($\psi_{cr} < 90°$), знак минус – для $r < 2r_g$ ($\psi_{cr} > 90°$).

Критический угол для ультрарелятивистской частицы определяется выражением

$$\operatorname{tg}\psi_{cr,рел} = \pm\frac{\sqrt{1 - r_g/r}}{\sqrt{r_g/r - 1 + \frac{4}{27}(r/r_g)^2}}. \tag{2.9.4}$$

Знак плюс выбирается для $r > 1{,}5\, r_g$, знак минус – для $r < 1{,}5\, r_g$.

§ 2.10. Движение частиц с учетом гравитационного излучения

Небесная механика в релятивистской теории отличается от ньютоновской, помимо уже рассмотренных особенностей, еще излучением гравитационных волн ускоренно движущимся телом. Вследствие этого энергия $\tilde{E}$ и угловой момент $\tilde{L}$ не являются строгими интегралами движения.

Излучение гравитационных волн вызывает торможение движущейся частицы (потерю энергии и углового момента). Сила торможения связана со взаимодействием пробной частицы массы m с собственным гравитационным полем и пропорциональна m^2, в то время как взаимодействие с внешним полем пропорционально mM. Поэтому при малых m/M сила "лучистого трения" является малой поправкой к основной силе и движение пробной частицы мало отличается от движения по геодезической.

Однако за длительные промежутки времени эти малые изменения могут, накапливаясь, приводить к существенному отклонению движения частицы от первоначальной траектории.