
ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ ВОКРУГ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

§ 3.1. Слабые поля в метрике Шварцшильда

В этой главе мы опишем эволюцию физических полей во внешнем поле сферической черной дыры. Зная эту эволюцию, можно с успехом изучать различного рода процессы, связанные с черными дырами. К таким процессам относятся, например, излучение гравитационных, электромагнитных и других волн частицами, падающими в черную дыру, несферический гравитационный коллапс при ее образовании, рассеяние ею падающих извне волн разной природы и т.д.

Мы будем считать поля слабыми в том смысле, что их тензор энергии-импульса слабо искажает метрику черной дыры, и будем пренебрегать этим обратным влиянием на фоновую метрику.

Далее, мы остановимся здесь только на "классических" полях с нулевой массой покоя и целочисленным спином (для других полей будет указана литература). Разумеется, следуя общему плану книги, в этой главе мы рассматриваем только классическую теорию полей, оставляя обсуждение квантовой теории до гл. 9, 10.

Мы приведем постановку задачи, укажем метод ее решения и физические выводы. Полная математическая трактовка вопроса дана в книге Чандрасекара (1983), физически ясное изложение основных положений — в книге Мизнера, Торна, Уилера (1973) и в обзоре Торна (1972).

Особый интерес представляют гравитационные возмущения метрики Шварцшильда, которые являются частным случаем рассматриваемых здесь полей. Мы остановимся на них подробно в §§ 3.2 и 3.3. Изложение физики этого вопроса особенно четко дано в обзоре Торна (1976).

Рассмотрение поведения неклассических полей (нейтринного, пионного и т.д.) читатель найдет в работах Хартля (1971, 1972), Тетельбойма (1972а, б, с), Бекенштейна (1972а, б), Детвилиера (1980), Сибгатуллина (1984*), Чандрасекара (1979 б, 1983).

В книге Сибгатуллина (1984*), помимо эволюции нейтринных полей, излагаются многие аспекты математической теории волновых процессов вблизи черной дыры. Особое внимание уделяется электрически заряженным черным дырам, о чем мы будем говорить позже (см. гл. 8). В указанных работах имеется подробная библиография оригинальных статей.

Рассмотрим слабое поле нулевой массы покоя и с целочисленным спином s во внешней метрике Шварцшильда. Для $s = 2$ это слабые гравитационные возмущения на фоне метрики.

Оказывается, для каждого поля можно найти полный набор калиброчно-инвариантных динамических переменных — функций $\Phi^{(s)}$, определенных во внешнем пространстве-времени черной дыры, таких, что

- (1) $\Phi^{(s)}$ и $\partial\Phi^{(s)}/\partial t$ могут быть произвольно заданы в начальный момент;
 (2) после задания (1) эволюция $\Phi^{(s)}$ полностью определяется одним волновым уравнением;

(3) известные $\Phi^{(s)}$ позволяют вычислить все параметры исследуемого поля путем применения к $\Phi^{(s)}$ дифференциальных операторов и алгебраических преобразований;

(4) известен метод, по которому по заданным параметрам исследуемого поля (в любой калибровке) можно найти $\Phi^{(s)}$.

Знание $\Phi^{(s)}$ эквивалентно знанию эволюции исследуемого поля. Таким образом, задача сводится к нахождению $\Phi^{(s)}$. Полное решение этой задачи было получено в результате усилий многих физиков — см. Редже, Уилер (1957), Эдельстейн, Вишвешвара (1970), Зерилли (1970 а, б), Прайс (1972 а, б), Торн (1972), Пресс, Бардин (1971), Бардин, Пресс (1973), Монкриф (1974 а), Чандрасекар, Детвилер (1975 а). Современное изложение этого вопроса см. в книге Чандрасекара (1983).

Общий путь решения состоит в следующем. Рассматриваемое поле разлагается на сферические гармоники (для $s = 0$ это скалярные гармоники, для $s = 1$ — векторные, для $s = 2$ — тензорные и т.д.). Каждая сферическая гармоника характеризуется, в частности, номером мультиполя l . Для монополя $l = 0$, для диполя $l = 1$ и т.д. Мультиполи с $l < s$ не эволюционируют со временем, и мы будем рассматривать нетривиальные мультиполи с $l \geq s$. Эти мультиполи носят название радиационных.

Прайс (1972 а, б) показал, что для каждого радиационного мультиполя любого поля со спином s существует скалярное поле $\Phi_l^{(s)}$, зависящее только от r и t , такое, что его дифференцированием и алгебраическими операциями можно получить все компоненты исходного поля данной мультипольности. Каждая такая скалярная функция $\Phi_l^{(s)}$ удовлетворяет уравнению [см. также (3.2.1)]

$$\frac{\partial^2 \Phi_l^{(s)}}{\partial r_*^2} - \frac{\partial^2 \Phi_l^{(s)}}{c^2 dt^2} = V_l^{(s)}(r) \Phi_l^{(s)}, \quad (3.1.1)$$

где $V_l^{(s)}(r)$ — эффективный потенциал, определяющий эволюцию поля $\Phi^{(s)}$. Этот эффективный потенциал зависит от l и s (и, конечно, также от r и M).

Для скалярного, векторного и тензорного полей соответственно

$$V_l^{(0)} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[\frac{r_g}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right], \quad (3.1.2a)$$

$$V_l^{(1)} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad (3.1.2b)$$

$$V_l^{(2)} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[-\frac{3r_g}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right]. \quad (3.1.2c)$$

Несмотря на разную форму этих потенциалов, они не сильно отличаются друг от друга, их асимптотики при $r \rightarrow r_g$ и $r \rightarrow \infty$ и другие свойства, определяющие эволюцию волновых полей, сходны. Поэтому эволюция радиационных мультиполей полей с разными s также оказывается сходной. Вследствие этого для многих задач достаточно рассмотреть поведение какого-либо одного поля.

Как мы уже говорили, особый интерес представляет исследование поведения гравитационных возмущений метрики Шварцшильда, являющихся собой гравитационные волны, т.е. частный случай поля со спином $s = 2$.

Остановимся на этом случае более подробно.

§ 3.2. Гравитационные возмущения метрики Шварцшильда

Рассмотрим малые возмущения шварцшильдовской метрики, следуя в основном анализу Торна (1976).

В соответствии с общим подходом, изложенным в § 3.1, произвольное возмущение метрики может быть разложено по тензорным сферическим гармоникам, характеризуемым числами l, m (где $|m| \leq l$), а также четностью $\pi = (-1)^l$ для "четных" и $\pi = (-1)^{l+1}$ для "нечетных" возмущений.

Возмущение с $l = 0$ описывает изменение массы черной дыры. Возмущение с $l = 1$ описывает добавление малого углового момента (вращения черной дыры); мы остановимся на этом позже*). Оба эти типа возмущений не эволюционируют со временем.

Рассмотрим радиационные мультиполи с $l \geq s$. Для анализа удобно ввести новую радиальную координату [Уилер (1955)]

$$r_* = r + r_g \ln(r/r_g - 1). \quad (3.2.1)$$

При фиксированных $l \geq 2, m, \pi$ имеется единственная динамическая переменная Φ , зависящая только от r_* , t и l (индексы у Φ мы опускаем), которая в отсутствие источников поля удовлетворяет уравнению Редже – Уилера (1957):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_*^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{c^2 \partial t^2} = V^{(2)} \Phi, \quad (3.2.2)$$

где $V^{(2)}$ задается (3.1.2c). Переменная r_* меняется от $-\infty$ (когда $r \rightarrow r_g$) до $+\infty$ (когда $r \rightarrow \infty$). Потенциал $V^{(2)}$, записанный в координатах r_* , обладает следующими свойствами: он заметно отличается от нуля только при r_* в окрестности нуля ($r \approx 1,5 r_g$); при $r_* \rightarrow \pm \infty$ он быстро убывает. Таким образом, $V^{(2)}(r_*)$ имеет характер потенциального барьера. Поэтому уравнение (3.2.2) описывает одномерное прохождение волны через потенциальный барьер. Свойства решения этой задачи хорошо известны. Волны с длиной, много меньшей ширины барьера ($\lambda \ll r_g$), свободно проходят сквозь него. Волны с $\lambda \approx r_g$ частично проходят сквозь барьер, частично отражаются. Наконец, волны с $\lambda \gg r_g$ полностью отражаются от барьера.

Для волны частоты ω (частоты ω , вообще говоря, комплексные, мнимая часть описывает затухание или нарастание амплитуды волны) зависимость от времени определяется множителем $e^{i\omega t}$. Для каждого радиационного мультиполя $l \geq 2$ и некоторых специальных значений частот ω существуют решения уравнений (3.2.2), в которых нет входящих волн ни с $r_* = -\infty$,

*). Мы не рассматриваем здесь нефизическое возмущение, связанное с малым изменением положения черной дыры как целого в данной системе отсчета.