

Как мы уже говорили, особый интерес представляет исследование поведения гравитационных возмущений метрики Шварцшильда, являющихся собой гравитационные волны, т.е. частный случай поля со спином  $s = 2$ .

Остановимся на этом случае более подробно.

### § 3.2. Гравитационные возмущения метрики Шварцшильда

Рассмотрим малые возмущения шварцшильдовской метрики, следуя в основном анализу Торна (1976).

В соответствии с общим подходом, изложенным в § 3.1, произвольное возмущение метрики может быть разложено по тензорным сферическим гармоникам, характеризуемым числами  $l, m$  (где  $|m| \leq l$ ), а также четностью  $\pi = (-1)^l$  для "четных" и  $\pi = (-1)^{l+1}$  для "нечетных" возмущений.

Возмущение с  $l = 0$  описывает изменение массы черной дыры. Возмущение с  $l = 1$  описывает добавление малого углового момента (вращения черной дыры); мы остановимся на этом позже\*). Оба эти типа возмущений не эволюционируют со временем.

Рассмотрим радиационные мультиполи с  $l \geq s$ . Для анализа удобно ввести новую радиальную координату [Уилер (1955)]

$$r_* = r + r_g \ln(r/r_g - 1). \quad (3.2.1)$$

При фиксированных  $l \geq 2, m, \pi$  имеется единственная динамическая переменная  $\Phi$ , зависящая только от  $r_*$ ,  $t$  и  $l$  (индексы у  $\Phi$  мы опускаем), которая в отсутствие источников поля удовлетворяет уравнению Редже – Уилера (1957):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_*^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{c^2 \partial t^2} = V^{(2)} \Phi, \quad (3.2.2)$$

где  $V^{(2)}$  задается (3.1.2c). Переменная  $r_*$  меняется от  $-\infty$  (когда  $r \rightarrow r_g$ ) до  $+\infty$  (когда  $r \rightarrow \infty$ ). Потенциал  $V^{(2)}$ , записанный в координатах  $r_*$ , обладает следующими свойствами: он заметно отличается от нуля только при  $r_*$  в окрестности нуля ( $r \approx 1,5 r_g$ ); при  $r_* \rightarrow \pm \infty$  он быстро убывает. Таким образом,  $V^{(2)}(r_*)$  имеет характер потенциального барьера. Поэтому уравнение (3.2.2) описывает одномерное прохождение волны через потенциальный барьер. Свойства решения этой задачи хорошо известны. Волны с длиной, много меньшей ширины барьера ( $\lambda \ll r_g$ ), свободно проходят сквозь него. Волны с  $\lambda \approx r_g$  частично проходят сквозь барьер, частично отражаются. Наконец, волны с  $\lambda \gg r_g$  полностью отражаются от барьера.

Для волны частоты  $\omega$  (частоты  $\omega$ , вообще говоря, комплексные, мнимая часть описывает затухание или нарастание амплитуды волны) зависимость от времени определяется множителем  $e^{i\omega t}$ . Для каждого радиационного мультиполя  $l \geq 2$  и некоторых специальных значений частот  $\omega$  существуют решения уравнений (3.2.2), в которых нет входящих волн ни с  $r_* = -\infty$ ,

\*). Мы не рассматриваем здесь нефизическое возмущение, связанное с малым изменением положения черной дыры как целого в данной системе отсчета.

Таблица 1

|          | $l = 2$                                      | $l = 3$  | $l = 4$  |
|----------|--|--|--|
| $\omega$ | $0,37367 + 0,08896i$<br>$0,34844 + 0,27469i$ | $0,59945 + 0,09271i$<br>$0,58201 + 0,28116i$<br>$0,42629 + 0,37273i$ | $0,80918 + 0,09416i$<br>$0,79657 + 0,28439i$<br>$0,56010 + 0,42329i$ |

ни с  $r_* = +\infty$ . Это так называемые *квазинормальные моды* колебаний черной дыры. Соответствующие частоты называются *собственными частотами*. На существование таких решений было указано Чандрасекаром и Детвилем (1975а). В этой же работе они нашли собственные частоты для нескольких мультиполей, приведенные в табл. 1. (Эти частоты выражены в единицах  $[GM/c^3]^{-1} = 2\pi(32312 \text{ Гц}) (M/M_\odot)^{-1}$ .) Все перечисленные в таблице собственные частоты имеют положительные мнимые части. Это означает, что колебания затухают с течением времени. Если  $\omega = \sigma + \alpha i$ , то зависимость от времени определяется в виде  $e^{i\omega t} = e^{i\sigma t - \alpha t}$  и затухание амплитуды колебаний при фиксированном  $r_*$  записывается так:

$$\frac{\text{амплитуда после одного колебания}}{\text{начальная амплитуда}} = \exp\left(-\frac{2\pi\alpha}{\sigma}\right). \quad (3.2.3)$$

Для самой медленно затухающей моды  $l = 2$  это отношение равно 0,22. Затухающие  $\Phi$ -волны собственных колебаний частично уходят на бесконечность ( $r_* = +\infty$ ), частично — в черную дыру ( $r_* = -\infty$ ).

Как мы увидим далее, собственные колебания черной дыры интенсивно возбуждаются падающими в нее телами, возникают при несимметричном гравитационном коллапсе, образуя первоначально несимметричную черную дыру, которая с течением времени приходит в равновесное симметричное состояние (после осцилляций), и т.д.

Если в собственных частотах  $\alpha > 0$ , то осцилляции затухают; если  $\alpha < 0$ , то они нарастают. Последнее означает неустойчивость в собственных частотах в линейном приближении.

В приведенной выше таблице все  $\alpha > 0$ . Можно показать [см., например, Торн (1976)], что  $\alpha > 0$  для всех собственных частот. Однако это еще не означает, что сферические черные дыры устойчивы (в линейном приближении), так как квазинормальные моды не образуют полного набора динамических переменных. Но оказывается, что стабильность (в линейном приближении) сферической черной дыры может быть доказана для каждой мультипольной моды (т.е. для фиксированных  $l, m, \pi$ ) возмущений с помощью уравнений (3.2.2) [Торн (1976)]. Более того, можно показать [Торн (1976), Монкриф (1974а, б), Уолд (1979а, 1980), Чандрасекар (1983)], что всякое малое возмущение гравитационного поля вокруг сферической черной дыры с течением времени затухает. Гравитационные волны уносят это возмущение частично на бесконечность, частично — в черную дыру. Стабильность черной дыры для любой моды возмущений означает ее полную стабильность (естественно, в линейном приближении).

Гравитационное излучение, возникающее при возмущении поля черной дыры, например, при падении в нее тел или при образовании ее при слабо несимметричном коллапсе, можно разделить (условно) на три компоненты:

- 1) излучение, идущее непосредственно от источника возмущений;
- 2) излучение, возникающее при затухающих колебаниях квазинормальных мод, возбужденных источником возмущений, — "звоновое" излучение;
- 3) так называемые "хвосты" излучений, которые вызваны рассеянием гравитационных волн на эффективном потенциале.

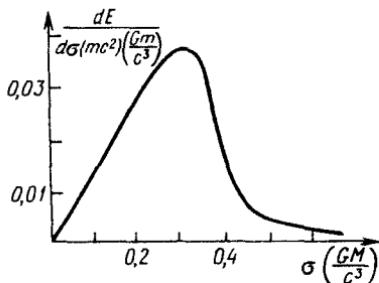
После прохождения излучения от источника наблюдатель вдали от черной дыры регистрирует "звоновое" излучение от квазинормальных мод колебаний черной дыры (эти моды испытывают экспоненциальное затухание) и затем "хвосты" излучения. Последние затухают значительно медленнее — уже по степенному закону. Такой закон является асимптотикой приближения черной дыры к равновесному состоянию. Ниже мы остановимся на этом подробнее (см. § 3.4); здесь же отметим, что амплитуда "хвостового" излучения ничтожна по сравнению с первыми двумя составляющими.

### § 3.3. Гравитационное излучение пробной частицы в поле черной дыры

Один из простейших видов возмущений — движение пробной частицы с массой  $m \ll M$  в поле тяготения черной дыры. Во всех случаях мы будем считать  $m/M$  настолько малым, что можно пренебречь обратным влиянием излучения на движение частицы.

Рассмотрим сначала гравитационное излучение частицы, падающей в черную дыру по радиусу с параболической скоростью ( $v_\infty = 0$ ). На рис. 19 и 20 приведены результаты численных расчетов Девиса и др. (1971, 1972); см. также Петрич и др. (1985).

Рис. 19. Спектр гравитационного излучения частицы (усредненный по всем направлениям), падающей радиально в черную дыру с  $v_\infty = 0$



На рис. 19 изображен спектр гравитационного излучения, усредненного по всем направлениям, измеряемый удаленным наблюдателем. Полное количество излученной энергии составляет  $\Delta E = 0,01 mc^2 (m/M)$ .

Рис. 20 показывает поле гравитационной волны (поперечные компоненты возмущений метрики) как функцию времени при фиксированном  $r$ . На рисунке ясно видно, как всплеск излучения, прямо приходящего от падающей частицы, постепенно переходит (в окрестности  $t = 0$ ) в излучение от квазинормальных мод колебаний (последующие затухающие осцилляции на графике). "Хвосты" излучения (которые должны доминировать при  $t \rightarrow \infty$ ) имеют слишком малую амплитуду и не могли быть получены в данном численном расчете.