кую сетку *нельзя осуществить материальными телами* ("сварить" из прутьев). Такая сетка вблизи черной дыры двигалась бы по отношению к любому наблюдателю (с времениподобной мировой линией) со скоростью больше световой.

Несмотря на указанные особенности, мы по-прежнему можем представлять наши пространственные сечения $t = \text{const}$ как "абсолютное" жесткое пространство (напоминающее ньютоновское), а переменную t – как единое во всем "пространстве" "время" (при этом, естественно, необходимо помнить все сделанные выше оговорки).

В ОТО в произвольном гравитационном поле подобное разбиение пространства-времени на семейство 3-мерных пространственных сечений (вообще говоря, с меняющейся от сечения к сечению геометрией) и единое "время", нумерующее эти сечения, называют "3 + 1"-расщеплением пространства-времени*), или кинеметрическим методом [Владимиров (1982*)]. Этот метод особенно удобен, когда все пространственные сечения идентичны, и можно рассматривать движения частиц, электромагнитные процессы и др., происходящие на этой неизменной "сцене" в едином "времени" t. Как уже отмечалось, в этом случае наши "наглядные" представления о пространстве и времени из повседневного опыта помогают нашей интуиции.

Мы будем использовать кинеметрический метод при изучении процессов вокруг стационарных черных дыр. В качестве пространственных сечений выбираются сечения $t = \text{const}$ в системе (4.2.1); t – временна́я координата.

§ 4.3. Хронометрическая система отсчета и система отсчета локально невращающихся наблюдателей

Рассмотрим прежде всего геометрические свойства нашего "абсолютного" пространства. Они описываются трехмерной метрикой, получающейся из (4.2.1), если положить $dt = 0$. В этом трехмерном "абсолютном" пространстве в фиксированный момент единого "времени" $t = \text{const}$ можно рассматривать распределение трехмерных векторных полей, вычислять, например, трехмерную дивергенцию векторного поля $\boldsymbol{A}$ и т.д. Изменение вектора $\boldsymbol{A}$ со "временем" t в фиксированной точке "абсолютного" пространства дается производной $\partial \boldsymbol{A}/\partial t$.

Рассмотрим теперь систему отсчета наблюдателей, которые покоятся в "абсолютном" пространстве $t = \text{const}$, т.е. неподвижно "сидят" на нашей жесткой, недеформирующейся решетке. Эту систему называют хронометрической [Владимиров (1982*)], лагранжевой [Торн, Макдональд (1982) и Макдональд, Торн (1982)] или киллинговой. Посмотрим, какие силы, вызванные наличием вращающейся черной дыры, действуют в этой системе.

Трехмерные компоненты вектора ускорения $\widetilde{F}_i$ в координатах r, θ, φ [ускорение "свободного падения"; см. (П.61)] определяются выражения-

---

) Существует другой способ "3 + 1"-расщепления, когда первоначально выбирают не 3-мерные сечения, а конгруэнцию времениподобных линий. Такой метод получил название хронометрического [Зельманов (1956)].

ми [Владимиров (1982*)]

$$\tilde{F}_r = \frac{M(\rho^2 - 2r^2)}{\rho^2(\rho^2 - 2Mr)}, \qquad \tilde{F}_\theta = \frac{Mra^2 \sin 2\theta}{\rho^2(\rho^2 - 2Mr)}, \qquad \tilde{F}_\varphi = 0. \tag{4.3.1}$$

Все величины в данной хронометрической системе отсчета мы будем обозначать с тильдой, чтобы не путать с величинами, используемыми в дальнейшем.

Физические компоненты ускорения суть *)

$$\tilde{F}_{\hat{r}} = \frac{M(\rho^2 - 2r^2)\sqrt{\Delta}}{\rho^3(\rho^2 - 2Mr)}, \quad \tilde{F}_{\hat{\theta}} = \frac{Mra^2 \sin 2\theta}{\rho^3(\rho^2 - 2Mr)}, \qquad \tilde{F}_{\hat{\varphi}} = 0. \tag{4.3.2}$$

Система отсчета наших наблюдателей жесткая, в ней тензор скоростей деформации [см (П.60)] равен нулю:

$$\tilde{D}_{ik} = 0. \tag{4.3.3}$$

Тензор угловой скорости вращения (П.59) есть

$$\tilde{A}_{r\varphi} = -\frac{Ma(\rho^2 - 2r^2)\sin^2\theta}{\rho(\rho^2 - 2Mr)^{3/2}}, \qquad \tilde{A}_{\theta\varphi} = -\frac{Mra \sin 2\theta}{\rho(\rho^2 - 2Mr)^{3/2}}, \qquad \tilde{A}_{r\theta} = 0. \tag{4.3.4}$$

Отличие тензора $\tilde{A}_{ik}$ от нуля означает, что гироскопы, покоящиеся в нашей системе отсчета, прецессируют относительно нее, а значит, и относительно далеких объектов, так как наша жесткая система вдали переходит в лоренцеву. Тензор $\tilde{A}_{ik}$ пропорционален удельному угловому моменту черной дыры и отражает наличие "вихревого" гравитационного поля, вызванного ее вращением.

Подчеркнем следующее важное отличие внешнего поля черной дыры с вращением от случая без вращения.

Если черная дыра не вращается, условие t = const означает физическую одновременность во всем внешнем пространстве для наблюдателей, в нем покоящихся (относительно жесткой системы отсчета). В случае вращающейся черной дыры наличие компоненты g_{0i} в жесткой системе отсчета не позволяет, как известно [см. Ландау, Лифшиц (1973*)], ввести в ней понятие одновременности. Обычно о событиях, для которых t одинаково, говорят как об одновременных по времени далекого наблюдателя. Но это вовсе не означает физической одновременности, определяемой синхронизацией часов путем посылки и приема световых сигналов.

Примечательно, что компоненты $\tilde{F}_r$, $\tilde{F}_\theta$, и компоненты $\tilde{A}_{ik}$, и вычисленная с их помощью угловая скорость прецессии гироскопа $\tilde{\Omega}_{\text{пр}}$ [см. (П.62)] обращаются в бесконечность, а компонента g_{00} в (4.2.1) (определяющая темп течения времени) обращается в нуль при

$$\rho^2 - 2Mr = r^2 + a^2\cos^2\theta - 2Mr = 0 \tag{4.3.5}$$

---

*) $\tilde{F}_{\hat{i}}$ – компоненты вектора ускорения, непосредственно измеряемые наблюдателем, покоящимся в данной системе отсчета. В формуле (4.3.2) они даны в локальной декартовой системе координат с осями вдоль направлений r, θ, φ.

или при $r = r_1$, где r_1 определяется соотношением

$$r_1 = M + \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}. \tag{4.3.6}$$

Указанные свойства означают, что в этом месте в системе отсчета имеется *физическая* особенность, и продолжить систему отсчета ближе к черной дыре нельзя, т.е. невозможно, чтобы наблюдатели покоились относительно нашей сетки*). Причина этого формально та же, что и в поле Шварцшильда на $r = r_g$: мировая линия наблюдателя $r = \text{const}, \theta = \text{const}, \varphi = \text{const}$ перестает быть времениподобной, что видно из смены знака g_{00} при $r < r_1$. Однако имеется существенная разница по сравнению с полем Шварцшильда.

В невращающейся черной дыре при $r < r_g$, чтобы получить мировую линию, лежащую внутри светового конуса, достаточно было сделать преобразование

$$dr = d\tilde{r} + A_1 dt. \tag{4.3.7}$$

Тогда при подходящем выборе $A_1 = A_1(r)$ линия $\tilde{r} = \text{const}, \varphi = \text{const}, \theta = \text{const}$ будет времениподобна. Это означает, что при $r < r_g$ тела обязаны двигаться *по радиусу* к центру, а r_g — граница изолированной черной дыры.

В случае вращающейся черной дыры при $r < r_1$ [мы считаем $\Delta > 0$; см. (4.2.1)] преобразование вида (4.3.7) не позволяет получить времениподобную мировую линию. Однако преобразование вида

$$d\varphi = d\tilde{\varphi} - \Omega_1 dt \tag{4.3.8}$$

позволяет это сделать (Ω_1 зависит от r и θ). Этот факт означает, что при $r < r_1$ и $\Delta > 0$ все тела обязаны участвовать во вращении вокруг черной дыры (в сторону, определяемую знаком a; см. далее) относительно жесткой координатной сетки, простирающейся до бесконечности. Что же касается движения по радиусу r, то в области $r < r_1, \Delta > 0$ тела могут двигаться как с уменьшением, так и с увеличением r.

Таким образом, *предел статичности* r_1 в случае вращающейся дыры имеет совсем другую природу, чем в поле Шварцшильда. Здесь тела неизбежно вовлекаются во вращение, но r_1 — не горизонт событий, так как из этой области можно выйти наружу. Горизонт событий в метрике (4.2.1) находится при $\Delta = 0$, т.е. при $r = r_+$, где

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}. \tag{4.3.9}$$

Область $r_+ < r < r_1$ называют *эргосферой*.

Таким образом, жесткая статическая (неподвижная по отношению к далекому наблюдателю) система отсчета из материальных тел не простирается до r_+. Предел статичности расположен вне горизонта и совпадает с ним на полюсе (рис. 30). Важной особенностью статической системы отсчета является, как сказано выше, прецессия в ней гироскопов. Наша система в каждой своей точке вращается относительно местной лоренцевой системы. Разумеется, это отражает тот факт, что вращение черной дыры меняет состояние движения локальных лоренцевых систем, увлекая их во вращение вокруг черной дыры. Качественно это явление давно известно в теории уже в случае слабого поля тяготеющего вращающегося тела [Тирринг, Лензе (1918)].

---

*) Саму координатную сетку, конечно, можно продолжить ближе к черной дыре, но она уже неосуществима материальными телами.

Введем теперь во внешнем поле вращающейся черной дыры систему отсчета, которая в указанном смысле не вращается относительно местной лоренцевой системы. Эта система получила название системы отсчета локально невращающихся наблюдателей. Конечно, такая система не может быть уже жесткой. С этой целью проведем конгруэнцию мировых линий, всюду ортогональных выбранным нами пространственным сечениям $t = \text{const}$. Эти времениподобные линии по определению лишены кручения и образуют искомую систему отсчета. Наблюдатели, покоящиеся в ней, называются

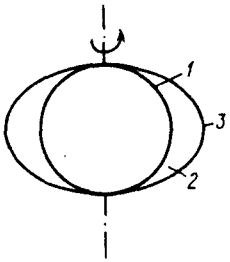

Рис. 30. Вращающаяся черная дыра: *1* – горизонт, *2* – эргосфера, *3* – предел статичности

локально невращающимися наблюдателями [иногда эту систему отсчета также называют эйлеровой; см. Торн, Макдональд (1982)]. Такие наблюдатели движутся относительно сетки системы Бойера – Линдквиста, т.е. движутся в "абсолютном" пространстве*). Это движение происходит при постоянных $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ с постоянной (по времени) угловой скоростью по φ. Если определять угловую скорость ω по универсальному времени t (время далекого покоящегося наблюдателя), то

$$\omega \equiv \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g_{\varphi t}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{2Mar}{(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta}, \tag{4.3.10}$$

где $g_{\varphi t}$ и $g_{\varphi\varphi}$ берутся из (4.2.1).

Если же измерять угловую скорость по часам самого движущегося наблюдателя, то

$$\Omega_\tau = \frac{\omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2\omega g_{t\varphi} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}}}. \tag{4.3.11}$$

Линейная физическая скорость движения локально невращающихся наблюдателей относительно жесткой системы есть

$$v_\varphi = \frac{2Mra\sin\theta}{\rho^2\sqrt{\Delta}}. \tag{4.3.12}$$

---

*) Несколько замечаний о терминологии. Она не единообразна не только у разных авторов, но иногда у одного и того же. Так, в работе Макдональда и Торна (1982) "абсолютным жестким" пространством названо то пространство, которое мы описали в § 4.2, и сказано, что локально невращающиеся наблюдатели движутся в этом пространстве [см. раздел 2 их работы перед формулой (2.6)]. В работе же Торна (1985) абсолютным называется пространство, сопутствующее локально невращающимся наблюдателям, и говорится, что они неподвижны в "абсолютном" пространстве [см. Торн (1985), с. 11]. Мы везде придерживаемся первой точки зрения.

По-разному, как мы видели, называют хронометрическую систему отсчета (см. с. 54). Весь этот "разнобой" носит исторический характер, однако авторы надеются, что в ближайшее время установится некое единообразие.

Как и следовало ожидать, эта скорость обращается в скорость света на пределе статичности $r = r_1$ и превосходит ее в эргосфере.

Подчеркнем еще раз, что собственное время локально невращающихся наблюдателей τ отличается от универсального "времени" t. Связь между ними дается функцией "длительности" α:

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)_{\text{н.н}} \equiv \alpha = \left(\frac{\rho^2\Delta}{A}\right)^{1/2}. \tag{4.3.13}$$

Приведем выражения для вектора ускорения свободного падения в системе локально невращающихся наблюдателей:

$$F_r = \frac{M}{\rho^2\Delta\Delta_1}[(r^2+a^2)^2(a^2\cos^2\theta - r^2) + 4Mr^3a^2\sin^2\theta],$$

$$F_\theta = a^2\sin 2\theta\,\frac{Mr(r^2+a^2)}{\rho^2\Delta}, \tag{4.3.14}$$

$$F_\varphi = 0,$$

где $\Delta_1 = \rho^2(r^2+a^2) + 2Mra^2\sin^2\theta$.

Вектор $\boldsymbol{F}$ связан с α соотношением

$$\boldsymbol{F} = -\nabla\ln\alpha. \tag{4.3.15}$$

Тензор скоростей деформации системы записывается в виде

$$D_{rr} = D_{r\theta} = D_{\theta\theta} = D_{\varphi\varphi} = 0,$$

$$D_{r\varphi} = -Ma[2r^2(r^2+a^2) + \rho^2(r^2-a^2)]\sin^2\theta(\rho^3\sqrt{\Delta\Delta_1})^{-1}, \tag{4.3.16}$$

$$D_{\theta\varphi} = 2Mra^3\sin^3\theta\cos\theta\sqrt{\Delta}(\rho^3\sqrt{\Delta_1})^{-1},$$

а тензор $A_{ik} = 0$.

Рассматриваемая система отсчета не имеет никаких особенностей на пределе статичности и продолжается в эргосфере вплоть до границы черной дыры $r = r_+$. При $r \leqslant r_+$, помимо вращения вокруг черной дыры, необходимо происходит еще и падение по r. Система локально невращающихся наблюдателей при $r = r_+$ имеет физическую особенность: $F_r \to \infty$ при $r \to r_+$ [см. формулу (4.3.14)].

При приближении к горизонту событий угловая скорость обращения локально невращающихся наблюдателей стремится к пределу:

$$\omega_+ = c^3a/2GMr_+. \tag{4.3.17}$$

Этот предел постоянен на горизонте и не зависит от θ. Его называют угловой скоростью вращения черной дыры (или горизонта) Ω^H.

На пространственной бесконечности система отсчета локально невращающихся наблюдателей переходит в ту же самую лоренцеву систему отсчета, что и система Бойера – Линдквиста (хронометрическая система).

В заключение параграфа остановимся на вопросе о "вращении" локально невращающихся наблюдателей и о прецессии гироскопов в системе отсчета, связанной с этими наблюдателями.

С одной стороны, система отсчета таких наблюдателей выбрана невращающейся, т.е. так, что $A_{ik} = 0$. Это значит, что отсутствует поворот системы относительно локально лоренцевой системы отсчета, а значит, и пре-

цессия гироскопа в системе отсчета локально невращающихся наблюдателей. С другой стороны, например, в книге Мизнера, Торна, Уилера (1973) говорится, что гироскопы прецессируют по отношению к локально невращающимся наблюдателям с угловой скоростью

$$\vec{\Omega}_{\text{пр}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}}}\left[\frac{\omega_{,\theta}}{\rho}\, e_{\hat{r}} - \frac{\Delta^{1/2}\omega_{,r}}{\rho}\, e_{\hat{\theta}}\right], \qquad (4.3.18)$$

где $e_{\hat{r}}$, $e_{\hat{\theta}}$ – единичные векторы вдоль r и θ соответственно, а величины $g_{\alpha\beta}$ берутся из выражения (4.2.1). Как совместить оба эти утверждения?

Парадокс разрешается следующим образом. Напомним, что движение малого элемента произвольной системы отсчета относительно локально

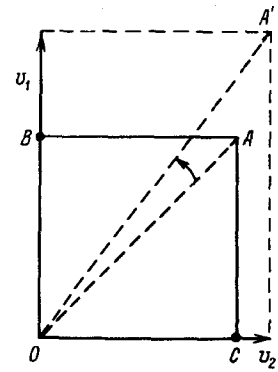

Рис. 31. Поворот диагонали OA при анизотропной деформации элемента объема вдоль направлений OB и OC

сопутствующей лоренцевой системы состоит в повороте вокруг мгновенной оси вращения и деформации вдоль главных направлений тензора скоростей деформации. Если поворота нет ($A_{ik} = 0$), то дело сводится только к деформации. Гироскоп, центр масс которого неподвижен в системе отсчета, при этом не прецессирует относительно главных направлений тензора скоростей деформации. Если вдоль этих направлений провести линии, сопутствующие системе отсчета ("приклеенные" к ней), то гироскоп не изменит своей ориентации по отношению к ним. Однако это вовсе не значит, что при этом гироскоп не меняет ориентацию по отношению к любой линии, проведенной в данном элементе объема и сопутствующей системе отсчета. В самом деле, из рис. 31 видно, что при анизотропной деформации линии, наклоненные, например, под углом 45° к главным направлениям тензора деформации и "приклеенные" к системе отсчета, поворачиваются, приближаясь к направлению наибольшего расширения. По отношению к этим линиям гироскоп прецессирует, хотя $A_{ik} = 0$. Именно эта ситуация и имеет место в случае локально невращающихся наблюдателей в метрике Керра.

Рассмотрим локально невращающихся наблюдателей в экваториальной плоскости. Везде $A_{ik} = 0$, и, согласно формулам (4.3.16), отличной от нуля является лишь компонента $D_{r\varphi}$. Это значит, что мгновенные ориентации главных осей тензора деформации направлены под углом 45° к векторам $e_{\hat{r}}$ и $e_{\hat{\varphi}}$. Заметим, что координатные линии φ "приклеены" к системе отсчета. Гироскоп не поворачивается по отношению к главным осям, но,

согласно предыдущему замечанию, поворачивается по отношению к координатной линии φ, а значит, и к $e_{\hat{\varphi}}$ (и, следовательно, к перпендикулярному к нему вектору $e_{\hat{r}}$, который не "приклеен" к системе отсчета; см. далее).

Итак, если локально невращающийся наблюдатель все время будет ориентировать свой репер вдоль направлений $e_{\hat{r}}$, $e_{\hat{\varphi}}$ и $e_{\hat{\theta}}$, то гироскоп будет прецессировать по отношению к этому реперу согласно формуле (4.3.18), несмотря на то, что в системе наблюдателя $A_{ik} = 0$. Репер $e_{\hat{r}}, e_{\hat{\varphi}}, e_{\hat{\theta}}$ – естественный; прецессию гироскопа следует определять по отношению к нему, ибо он определяется симметрией пространства вокруг наблюдателя. Но можно ввести и другой репер, например репер, который также связан с локально невращающимся наблюдателем, но не поворачивается относительно мгновенно сопутствующей лоренцевой системы. В таком репере гироскопы, конечно, не прецессируют.

Заметим, наконец, что если в некоторый момент выбрать одну систему координатных линий, "приклеенных" к локально невращающимся наблюдателям и направленных строго по r, а другую систему – по φ, то с течением времени координатные линии по φ будут скользить вдоль самих себя в "абсолютном" пространстве, а линии, бывшие им перпендикулярными, будут "наматываться" на черную дыру, превращаясь в спирали, так как станут увлекаться более быстрым движением наблюдателей, ближе расположенных к черной дыре, т.е. эти линии будут поворачиваться по отношению к линиям φ.

§ 4.4. Пространство-время вращающейся черной дыры

Рассмотрим общие свойства пространства-времени вращающейся черной дыры, описываемого решением (4.2.1).

Введем систему координат, которая не обладает координатными особенностями нигде в пространстве-времени, кроме истинной сингулярности, аналогично тому, как мы это делали в пространстве-времени Шварцшильда*). В шварцшильдовском пространстве-времени в качестве координатных линий можно было использовать мировые линии фотонов, движущихся по радиусу к центру [см. (2.4.12)]. В случае вращающейся черной дыры также можно использовать мировые линии фотонов, движущихся к черной дыре. Однако теперь вблизи черной дыры траектории фотонов будут закручиваться вокруг нее, увлекаемые ее "вихревым" гравитационным полем. Следовательно, при наличии вращения черной дыры, помимо замены координаты [подобно (2.4.11)], надо еще ввести "кручение" по координате φ.

Оказывается, что наиболее простое выражение для метрики получается, если использовать мировые линии фотонов, которые на бесконечности движутся с постоянным θ и имеют проекцию момента импульса на ось вращения черной дыры $L_z = aE\sin^2\theta$ (см. следующий параграф), где E – энергия частицы на бесконечности. Можно показать, что переход к такой

*) Разумеется, мы не принимаем в расчет тривиальную координатную сингулярность на полюсе сферической системы координат, к которой все давно привыкли и смысл которой очевиден.