Однако для области внутри горизонта – ни сразу после коллапса, ни с течением времени – метрика не стремится к решению Керра. Поэтому оно (внутри горизонта) не описывает внутренность реальной вращающейся черной дыры (подробно о строении черных дыр внутри горизонта будет говориться в гл. 12). Подчеркнем, что все рассмотренные выше свойства пространства-времени черной дыры справедливы только, если $M \geqslant |a|$. В противном случае в решении исчезает горизонт, и оно уже не описывает черную дыру. Появляются "патологические" особенности [Хокинг, Эллис (1973)], и вряд ли это решение может иметь какое-либо отношение к реальности. С физической точки зрения для образования объекта с $M < |a|$ требовалось бы сжатие вращающегося тела, обладающего столь большим угловым моментом, что при размерах $r \approx r_+$ линейная скорость вращения должна была бы превышать скорость света. Везде в дальнейшем (для незаряженной черной дыры) мы считаем $M \geqslant |a|$.

§ 4.5. Небесная механика вращающейся черной дыры

Рассмотрим движение по геодезическим пробных частиц в поле тяготения вращающейся черной дыры. В общем случае траектории довольно сложны, так как поле не обладает сферической симметрией. Подобное изложение вопроса см. Бардин и др. (1972), Стюарт и Уолкер (1973), Руффини, Уилер (1971), Мизнер, Торн, Уилер (1973), Шапиро, Тюкольский (1983), Дымникова (1986*). Важные аспекты гравитационного захвата частиц вращающейся черной дырой рассмотрены в работах Дымниковой (1982), Бичака, Стачлика (1976). В приведенных работах можно найти ссылки на многочисленные оригинальные статьи.

Движение пробных частиц мы рассматриваем по отношению к "абсолютному" пространству, введенному нами в § 4.2, т.е. по отношению к жесткой решетке хронометрической системы отсчета, описываемой координатами Боейра – Линдквиста (см. § 4.3).

Первые интегралы движения записываются в виде

$$\rho^2 \frac{dr}{d\lambda} = \{[E(r^2+a^2) - L_z a]^2 - \Delta[m^2 r^2 + (L_z - aE)^2 + Q^*]\}^{1/2}, \tag{4.5.1}$$

$$\rho^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \left\{Q^* - \cos^2\theta\left[a^2(m^2 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2\theta}\right]\right\}^{1/2}, \tag{4.5.2}$$

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = -\left(aE - \frac{L_z}{\sin^2\theta}\right) + \frac{a}{\Delta}[E(r^2+a^2) - L_z a], \tag{4.5.3}$$

$$\rho^2 \frac{dt}{d\lambda} = -a(aE\sin^2\theta - L_z) + \frac{r^2+a^2}{\Delta}[E(r^2+a^2) - L_z a]. \tag{4.5.4}$$

Здесь m – масса покоя пробной частицы, $\lambda = \tau/m$, где τ – собственное время частицы, E – постоянная энергия пробной частицы, L_z – постоянная проекция момента импульса частицы на ось вращения черной дыры, Q^* –

найденный Картером (1968а) интеграл движения*):

$$Q^* = p_\theta^2 + \cos^2\theta\,[a^2(m^2 - E^2) + \sin^{-2}\theta L^2{}_z], \tag{4.5.5}$$

где p_θ – θ-компонента 4-импульса пробной частицы. Движению ультрарелятивистской частицы соответствует предельный переход $m \to 0$.

Рассмотрим сначала характерные особенности движения частиц в экваториальной плоскости вращающейся черной дыры. Выражения для $dr/d\lambda$ и $d\varphi/d\lambda$ в этом случае могут быть записаны в виде [Шапиро, Тюкольский (1983)]

$$r^3\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2(r^3 + a^2r + 2Ma^2) - 4aMEL_z - (r - 2M)L_z^2 - m^2r\Delta, \tag{4.5.6}$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{(r - 2M)L_z + 2aME}{r\Delta}. \tag{4.5.7}$$

Эти выражения являются аналогом уравнений (2.8.1) – (2.8.2) для шварцшильдовской черной дыры. Анализ особенностей движения производится точно таким же способом, как в § 2.8. В частности, приравнивая правую часть уравнения (4.5.6) нулю и решая его относительно E, получаем "эффективный потенциал". Экстремумы эффективного потенциала соответствуют круговому движению. Выражения для $E_{\text{круг}}$ и $L_{\text{круг}}$ имеют в этом случае вид ($m = 1$)

$$E_{\text{круг}} = \frac{r^2 - 2Mr \pm a\sqrt{Mr}}{r(r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr})^{1/2}}, \tag{4.5.8}$$

$$L_{\text{круг}} = \pm\frac{\sqrt{Mr}(r^2 \mp 2a\sqrt{Mr} + a^2)}{r(r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr})^{1/2}}. \tag{4.5.9}$$

Здесь и в приводимых ниже формулах верхние знаки соответствуют обращению частицы в ту же сторону, в которую вращается черная дыра, нижние – в противоположную, поэтому будем всюду считать $a \geqslant 0$.

Радиус ближайшей к черной дыре круговой орбиты, по которой движение происходит со скоростью света, есть

$$r_{\text{фотона}} = 2M\left\{1 + \cos\left[\frac{2}{3}\arccos\left(\mp\frac{a}{M}\right)\right]\right\}. \tag{4.5.10}$$

Эта орбита неустойчива.

Неустойчивая круговая орбита, на которой $E_{\text{круг}} = m$, определяется выражением

$$r_{\text{связ}} = 2M \mp a + 2M^{1/2}(M \mp a)^{1/2}. \tag{4.5.11}$$

Эти значения радиуса являются минимумами периастров всех параболических орбит. Если орбита частицы, прилетающей в экваториальной плоскости из бесконечности, где ее скорость $v_\infty \ll c$, подходит к черной дыре ближе, чем $r_{\text{связ}}$, то частица захватывается черной дырой. Значение радиуса r_0 периастра параболической орбиты определяется параметром $\tilde{L}$

*) Этот интеграл движения связан с существованием в метрике Керра тензорного поля Киллинга (П.17) [Картер (1968а, 1973а, 1977), Уолкер, Пенроуз (1970)].

Таблица 2

Орбита	$a = 0$	$a = M$	
		$L > 0$	$L < 0$
$r_{\text{фотона}}$	1,5	0,5	2
$r_{\text{связ}}$	2	0,5	2,92
$r_{\text{гр}}$	3	0,5	4,5

Таблица 3

Орбита	$a = 0$	$a = M$	
		$L > 0$	$L < 0$
E/m	$\sqrt{8/9}$	$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{25/27}$
$(m - E)/m$	0.0572	0,423	0.0377
$\lvert L \rvert /mM$	$2\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	$22/3\sqrt{3}$

частицы:

$$r_0 = M[\tilde{L}^2 + \sqrt{\tilde{L}^4 - (2\tilde{L} - a/M)^2}], \tag{4.5.11a}$$

причем $|\tilde{L}| < 1 + \sqrt{1 \mp a/M}$.

Наконец, радиус граничной окружности, отделяющей устойчивые круговые орбиты от неустойчивых, дается выражением

$$r_{\text{гр}} = M\{3 + Z_2 \mp [(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)]^{1/2}\}, \tag{4.5.12}$$

где

$$Z_1 = 1 + (1 - a^2/M^2)^{1/3}[(1 + a/M)^{1/3} + (1 - a/M)^{1/3}],$$

$$Z_2 = (3a^2/M^2 + Z_1^2)^{1/2}.$$

В табл. 2 приведены значения рассмотренных выше величин для предельно быстро вращающейся черной дыры $a = M$ в сравнении со случаем $a = 0$ (в единицах $r_g = 2GM/c^2$). Заметим, что при $a \to M$ инвариантное расстояние от точки r до горизонта r_+, равное $\int_{r_+}^{r} \frac{dr'}{\Delta(r')^{1/2}}$, расходится. Поэтому, хотя при $L > 0$ радиусы r всех трех орбит стремятся к одному и тому же значению r_+, это вовсе не означает, что все орбиты в этом пределе совпадают друг с другом и лежат на горизонте [см. Бардин и др. (1972)].

Наконец, приведем значения удельной энергии E/m, удельной энергии связи $(m - E)/m$ и удельного момента $|L|/mM$ пробной частицы на последней устойчивой орбите $r_{\text{гр}}$ (табл. 3).

Уравнение (4.5.6) показывает, что вблизи вращающейся черной дыры возможны движения частиц с отрицательным E. Решим его относительно E:

$$E = \frac{2aML + [L^2r^2\Delta + m^2r\Delta + r^3(dr/d\lambda)^2]^{1/2}}{r^3 + a^2r + 2Ma^2}. \tag{4.5.13}$$

Знак корня выбран положительным, так как это соответствует направлению 4-импульса частицы в будущее [Мизнер, Торн, Уилер (1973)]. Числитель (4.5.13) отрицателен, если $L < 0$, и первое слагаемое превышает корень квадратный из скобки.

Второе и третье слагаемые в скобке можно сделать сколько угодно малым ($m \to 0$ соответствует переходу к ультрарелятивистской частице, $dr/d\lambda \to 0$ соответствует переходу к движению в азимутальном направлении). Тогда условия отрицательности E соответствует выбору точек внутри эргосферы $r < r_1$. Если $m \neq 0$ и $dr/d\lambda \neq 0$, это накладывает добавочные ограничения.

Выражение (4.5.13) справедливо только для $\theta = \pi/2$. Можно показать, что орбиты с отрицательным E возможны внутри эргосферы при любом $\theta \neq 0$. Наличие орбит с $E < 0$ делает возможным механические процессы, ведущие к извлечению "вращательной энергии" черной дыры. Такие процессы были открыты Пенроузом (1969). Подробно это явление и физические следствия из него будут обсуждаться в § 8.1.

Рассмотрим теперь некоторые движения пробных частиц не в экваториальной плоскости и прежде всего нерялятивистских частиц, движущихся с параболической скоростью ($v_\infty = 0$) и нулевым угловым моментом ($L = 0$). Такие частицы будут падать с постоянным θ и увлекаться во вращение вокруг черной дыры в широтном направлении с угловой скоростью (4.3.11),т.е. угловой скоростью движения локально "невращающихся наблюдателей".

Таким образом, в системе отсчета локально "невращающихся наблюдателей" эти частицы в каждой точке падают радиально.

Другой важный случай представляет падение ультрарелятивистских частиц (фотонов), которые на бесконечности движутся с $d\theta/d\lambda = 0$ и $L_z = aE\sin^2\theta$. Для них уравнения (4.5.1)–(4.5.4) сводятся к следующим:

$$\frac{dr}{d\lambda} = -E, \quad \frac{d\theta}{d\lambda} = 0, \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{aE}{\Delta}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{(r^2 + a^2)E}{\Delta}. \qquad (4.5.14)$$

Мировые линии этих фотонов используются при построении системы координат Керра (§ 4.4).

§ 4.6. Гравитационный захват частиц вращающейся черной дырой

По аналогии с § 2.9 рассмотрим гравитационный захват частиц вращающейся черной дырой [обзор см. Дымникова (1986 *)].

Прицельный параметр $b_\perp$ захвата нерелятивистской частицы, движущейся в экваториальной плоскости, определяется выражением

$$b_\perp = \pm 2M \frac{1}{v_\infty} \left(1 + \sqrt{1 \mp \frac{a}{M}}\right). \qquad (4.6.1)$$

Форма сечения захвата для случая падения частиц перпендикулярно оси вращения черной дыры с $a = M$ показана на рис. 33 [Юнг (1976)]. Площадь сечения захвата для этого случая

$$\sigma_\perp = 14{,}2\pi(1/v_\infty)^2 M^2. \qquad (4.6.2)$$

Для частиц, падающих параллельно оси вращения, прицельный параметр $b_\parallel$ захвата может быть найден следующим образом, Введем обозначения