

Второе и третье слагаемые в скобке можно сделать сколько угодно малым ( $m \rightarrow 0$  соответствует переходу к ультрарелятивистской частице,  $dr/d\lambda \rightarrow 0$  соответствует переходу к движению в азимутальном направлении). Тогда условия отрицательности  $E$  соответствует выбору точек внутри эргосферы  $r < r_1$ . Если  $m \neq 0$  и  $dr/d\lambda \neq 0$ , это накладывает добавочные ограничения.

Выражение (4.5.13) справедливо только для  $\theta = \pi/2$ . Можно показать, что орбиты с отрицательным  $E$  возможны внутри эргосферы при любом  $\theta \neq 0$ . Наличие орбит с  $E < 0$  делает возможным механические процессы, ведущие к извлечению "вращательной энергии" черной дыры. Такие процессы были открыты Пенроузом (1969). Подробно это явление и физические следствия из него будут обсуждаться в § 8.1.

Рассмотрим теперь некоторые движения пробных частиц не в экваториальной плоскости и прежде всего нерелятивистских частиц, движущихся с параболической скоростью ( $v_\infty = 0$ ) и нулевым угловым моментом ( $L = 0$ ). Такие частицы будут падать с постоянным  $\theta$  и увлекаться во вращение вокруг черной дыры в широтном направлении с угловой скоростью (4.3.11), т.е. угловой скоростью движения локально "невращающихся наблюдателей".

Таким образом, в системе отсчета локально "невращающихся наблюдателей" эти частицы в каждой точке падают радиально.

Другой важный случай представляет падение ультрарелятивистских частиц (фотонов), которые на бесконечности движутся с  $d\theta/d\lambda = 0$  и  $L_z = aE \sin^2\theta$ . Для них уравнения (4.5.1) – (4.5.4) сводятся к следующим:

$$\frac{dr}{d\lambda} = -E, \quad \frac{d\theta}{d\lambda} = 0, \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{aE}{\Delta}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{(r^2 + a^2)E}{\Delta}. \quad (4.5.14)$$

Мировые линии этих фотонов используются при построении системы координат Керра (§ 4.4).

#### § 4.6. Гравитационный захват частиц вращающейся черной дырой

По аналогии с § 2.9 рассмотрим гравитационный захват частиц вращающейся черной дырой [обзор см. Дымникова (1986 \*)].

Прицельный параметр  $b_\perp$  захвата нерелятивистской частицы, движущейся в экваториальной плоскости, определяется выражением

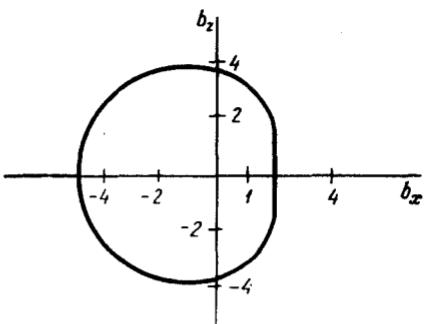
$$b_\perp = \pm 2M \frac{1}{v_\infty} \left( 1 + \sqrt{1 \mp \frac{a}{M}} \right). \quad (4.6.1)$$

Форма сечения захвата для случая падения частиц перпендикулярно оси вращения черной дыры с  $a = M$  показана на рис. 33 [Юнг (1976)]. Площадь сечения захвата для этого случая

$$\sigma_\perp = 14,2\pi(1/v_\infty)^2 M^2. \quad (4.6.2)$$

Для частиц, падающих параллельно оси вращения, прицельный параметр  $b_\parallel$  захвата может быть найден следующим образом. Введем обозначения

Рис. 33. Сечение захвата для частиц, движущихся перпендикулярно оси вращения черной дыры с  $a = M$  и  $v_\infty \rightarrow 0$ . Масштаб по осям – в единицах  $M(1/v_\infty)$



$\tilde{b}_\parallel = b_\parallel/M$ ,  $\tilde{a} = a/M$ . Тогда  $\tilde{b}_\parallel$  находится как решение уравнения

$$(1 - \tilde{a})^2 q_0^4 + 4(5\tilde{a}^2 - 4)q_0^3 - 8\tilde{a}^2(6 + \tilde{a}^2)q_0^2 - 48\tilde{a}^4 q_0 - 16\tilde{a}^6 = 0, \quad (4.6.3)$$

где  $q_0 = v_\infty^2 (\tilde{b}_\parallel^2 - \tilde{a}^2)$ . Для  $\tilde{a} = 1$

$$\tilde{b}_\parallel = 3,85 \left( \frac{1}{v_\infty} \right) M, \quad \sigma_\parallel = 14,8 \pi \left( \frac{1}{v_\infty} \right)^2 M^2. \quad (4.6.4)$$

Рассмотрим теперь ультрарелятивистские частицы. Прицельные параметры захвата  $b_\perp$  для движения экваториальной плоскости даются следующими формулами:

$$\frac{b_\perp^+}{M} = 8 \cos^3 \left[ \frac{1}{3} (\pi - \arccos \tilde{a}) \right] + \tilde{a} \quad (4.6.5)$$

для движения с положительным моментом и

$$\frac{b_\perp^-}{M} = -8 \cos^3 \left( \frac{1}{3} \arccos |\tilde{a}| \right) + \tilde{a} \quad (4.6.6)$$

для движения с отрицательным моментом.

Площадь сечения захвата для этого случая

$$\sigma_\perp = 24,3 \pi M^2. \quad (4.6.7)$$

Для фотонов, летящих параллельно оси вращения черной дыры с  $\tilde{a} = 1$ , соответственно

$$\frac{b_\parallel}{M} = 2(1 + \sqrt{2}), \quad \sigma_\parallel = 23,3 \pi M^2. \quad (4.6.8)$$

Сравнение сечений захвата, приведенных в этом параграфе, с данными § 2.9 показывает, что вращающаяся дыра захватывает падающие частицы менее эффективно, чем невращающаяся с той же массой.

#### § 4.7. Волновые поля вокруг вращающейся черной дыры

Аналогично тому, как изучались слабые (не возмущающие фоновую метрику) волновые поля в метрике Шварцшильда, исследуется эта же задача и в метрике Керра. Главная сложность здесь связана с тем, что метрика обладает лишь осевой (а не сферической, как шварцшильдовская) симметрией. Картер, нашедший четвертый интеграл и разделивший