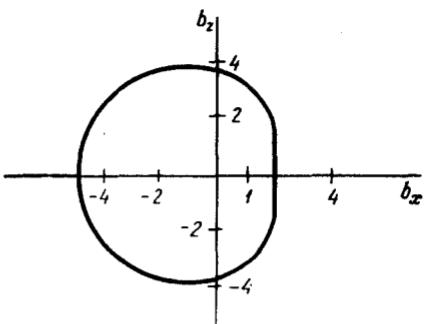


Рис. 33. Сечение захвата для частиц, движущихся перпендикулярно оси вращения черной дыры с $a = M$ и $v_\infty \rightarrow 0$. Масштаб по осям – в единицах $M(1/v_\infty)$



$\tilde{b}_\parallel = b_\parallel/M$, $\tilde{a} = a/M$. Тогда \tilde{b}_\parallel находится как решение уравнения

$$(1 - \tilde{a})^2 q_0^4 + 4(5\tilde{a}^2 - 4)q_0^3 - 8\tilde{a}^2(6 + \tilde{a}^2)q_0^2 - 48\tilde{a}^4 q_0 - 16\tilde{a}^6 = 0, \quad (4.6.3)$$

где $q_0 = v_\infty^2 (\tilde{b}_\parallel^2 - \tilde{a}^2)$. Для $\tilde{a} = 1$

$$\tilde{b}_\parallel = 3,85 \left(\frac{1}{v_\infty} \right) M, \quad \sigma_\parallel = 14,8 \pi \left(\frac{1}{v_\infty} \right)^2 M^2. \quad (4.6.4)$$

Рассмотрим теперь ультрарелятивистские частицы. Прицельные параметры захвата b_\perp для движения экваториальной плоскости даются следующими формулами:

$$\frac{b_\perp^+}{M} = 8 \cos^3 \left[\frac{1}{3} (\pi - \arccos \tilde{a}) \right] + \tilde{a} \quad (4.6.5)$$

для движения с положительным моментом и

$$\frac{b_\perp^-}{M} = -8 \cos^3 \left(\frac{1}{3} \arccos |\tilde{a}| \right) + \tilde{a} \quad (4.6.6)$$

для движения с отрицательным моментом.

Площадь сечения захвата для этого случая

$$\sigma_\perp = 24,3 \pi M^2. \quad (4.6.7)$$

Для фотонов, летящих параллельно оси вращения черной дыры с $\tilde{a} = 1$, соответственно

$$\frac{b_\parallel}{M} = 2(1 + \sqrt{2}), \quad \sigma_\parallel = 23,3 \pi M^2. \quad (4.6.8)$$

Сравнение сечений захвата, приведенных в этом параграфе, с данными § 2.9 показывает, что вращающаяся дыра захватывает падающие частицы менее эффективно, чем невращающаяся с той же массой.

§ 4.7. Волновые поля вокруг вращающейся черной дыры

Аналогично тому, как изучались слабые (не возмущающие фоновую метрику) волновые поля в метрике Шварцшильда, исследуется эта же задача и в метрике Керра. Главная сложность здесь связана с тем, что метрика обладает лишь осевой (а не сферической, как шварцшильдовская) симметрией. Картер, нашедший четвертый интеграл и разделивший

переменные в уравнениях геодезических в метрике Керра (см. § 4.5), показал, что уравнение для массивного (заряженного) поля со спином нуль в этой метрике также допускает разделение переменных [Картер (1968b)]. Тюкольскому (1972) удалось расцепить систему уравнений для компонент безмассового поля для спина 1 и 2 и свести эти уравнения к одному производящему волновому уравнению для комплексной скалярной функции. Аналогичный результат был получен Тюкольским (1973) для безмассового поля спина 1/2 [см. также Унру (1973)]. Это производящее уравнение в координатах Бойера – Линдквиста (4.2.1) – (4.2.2) имеет вид

$$\left[\left(\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \varphi} - \left(\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta^{s+1} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - 2s \left(\frac{a(r - M)}{\Delta} + \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} - 2s \left(\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right) \frac{\partial}{\partial t} + s^2 \operatorname{ctg}^2 \theta - s \right] \Psi_{(s)} = 0.$$

Здесь s – спин поля. Свойство разделения переменных в этом уравнении означает, что решение $\Psi_{(s)}$ можно записать в виде

$$\Psi_{(s)} = e^{i\omega t + im\varphi} \Phi(r) S(\theta).$$

Сфериодальные волновые функции $S(\theta)$ были подробно изучены в работе Факерелла и Кросмана (1977). Как и в случае метрики Шварцшильда, решение $\Psi_{(s)}$ производящего уравнения позволяет определить все компоненты рассматриваемого безмассового поля.

Метод разделения переменных был использован для анализа устойчивости метрики Керра [Пресс, Тюкольский (1973), Стюарт (1975)] и для изучения рассеяния электромагнитного, гравитационного и нейтринного полей на керровской черной дыре [Старобинский, Чурилов (1973*), Тюкольский, Пресс (1974), Чандрасекар, Детвилер (1975b, 1976), Детвилер (1977), Чандрасекар (1979b)].

В уравнении Дирака с ненулевой массой не удавалось разделить переменные до тех пор, пока Чандрасекар (1976) не предложил новый метод, в котором разделение переменных производилось до расцепления системы уравнений. Пэйдж (1976c) и Туп (1976) распространяли этот подход на случай дираковского уравнения для массивных заряженных частиц. Взаимодействующие электромагнитные и гравитационные возмущения в метрике Керра – Ньюмена рассматривались в работах Ли (1976), Читра (1976), Факерелла и Кросмана (1976). Полное изложение математической теории распространения физических полей в пространстве-времени врашающейся черной дыры читатель найдет в книге Чандрасекара (1983), где также имеются дальнейшие ссылки на оригинальные работы.

Здесь мы ограничимся только кратким описанием основных идей, методов и физическими выводами. Особое внимание будет уделено, как и в случае сферической черной дыры, распространению гравитационных волн, а также явлению суперрадиации, специальному для вращающейся черной дыры.

Начнем с рассмотрения распространения гравитационных волн.

Чандрасекар, Детвилер (1975б, 1976) и Детвилер (1977) показали, что гравитационные возмущения вокруг вращающейся черной дыры с массой M и параметром a могут быть определены с помощью решения следующего скалярного уравнения:

$$\frac{d^2\Phi}{dr_*^2} - V(r, M, a, l, m, \omega)\Phi = 0. \quad (4.7.1)$$

Здесь r_* – обобщенная "черепашья" координата, введенная Уилером (1955):

$$dr_* = \Delta^{-1}(r^2 + a^2)dr. \quad (4.7.2)$$

Величина $r_* \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$ и $r_* \rightarrow -\infty$ при $r = r_+$. Потенциальный барьер V , помимо r, M, a , зависит от величин l и m , соответствующих сфероидальным гармоническим индексам, и от частоты ω . Конкретная форма этой зависимости дана в цитированных выше работах. Зависимость от времени каждой гармоники дается функцией $\exp(i\omega t)$. Уравнение (4.7.1) справедливо вне источника возмущений. При наличии источника правая часть (4.7.1) отлична от нуля. Конкретные выражения для правой части (4.7.1) даны Детвилером (1977).

Зная решение уравнения (4.7.1), можно вычислить компоненты возмущения метрического тензора. Таким образом, как и в случае невращающейся черной дыры, все сводится к анализу решений скалярного уравнения (4.7.1). Подчеркнем, что в случае метрики Керра (в отличие от метрики Шварцшильда) потенциальный барьер V зависит от m и ω .

Асимптотика общего решения уравнения (4.7.1) может быть записана в следующем виде:

вдали от черной дыры ($r_* \rightarrow \infty$)

$$\Phi \sim A_{out} e^{-i\omega r_*} + A_{in} e^{i\omega r_*}; \quad (4.7.3)$$

вблизи горизонта ($r_* \rightarrow -\infty$)

$$\Phi \sim B_{out} e^{-ikr_*} + B_{in} e^{ikr_*} \quad (4.7.4)$$

(здесь $k = \omega + am/2Mr_+$).

Квадраты абсолютных величин A и B (сами эти величины, вообще говоря, комплексные) пропорциональны потокам энергии входящих и выходящих волн – соответственно на бесконечности и на горизонте.

Рассмотрим прежде всего квазинормальные моды колебаний вращающейся черной дыры [Детвилер (1980)].

Как и в случае невращающейся черной дыры, это такие моды колебаний, при которых нет волн, идущих от бесконечности ($r_* = \infty$), и нет волн, идущих от горизонта ($r_* = -\infty$), т.е.

$$A_{in} = B_{out} = 0. \quad (4.7.5)$$

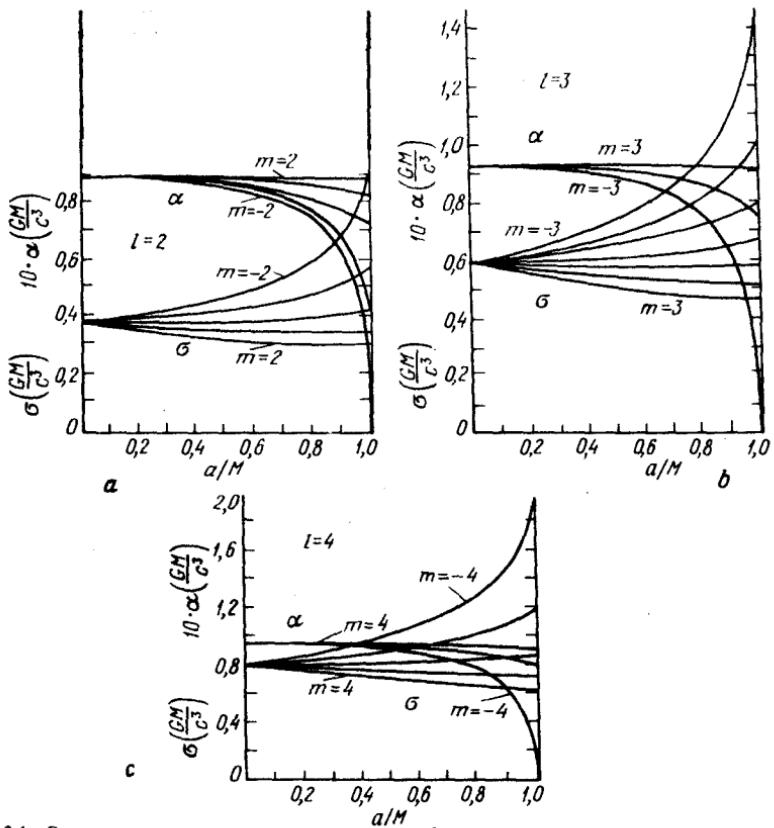


Рис. 34. Резонансные частоты $\omega = \sigma + \alpha i$ как функция параметра a для разных l и m

Условие (4.7.5) возможно только для определенных (резонансных) частот. Резонансные частоты квазинормальных мод были найдены Детвилем (1980). На рис. 34 показана зависимость резонансных частот от параметра a . Напомним, что зависимость от времени каждой гармоники определяется функцией $\exp(i\omega t)$. При $a \neq 0$ частоты зависят от m .

Обратимся теперь к излучению гравитационных волн при движении частицы в поле врачающейся черной дыры. Начнем с частицы, падающей вдоль оси симметрии z с нулевой скоростью на бесконечности ($v_\infty = 0$) [см. Сасаки, Накамура (1981), Накамура, Сасаки (1981), Накамура, Хоуган (1983)].

На рис. 35 показан спектр излучения частицы массы m , падающей в дыру с $a/M = 0.99$, для разных мод $l = 2, 3, 4$. Для сравнения пунктиром показан спектр излучения в случае радиального падения частицы в шварцшильдовскую черную дыру ($a = 0$).

Необходимо отметить два обстоятельства. Во-первых, основная излученная энергия приходится на "звоновое" излучение нормальных мод. Во-вторых, из-за того, что большинство резонансных частот имеют большее значение при $a/M = 0.99$, чем при $a = 0$, максимумы излучения также сдвинуты в сторону больших частот.

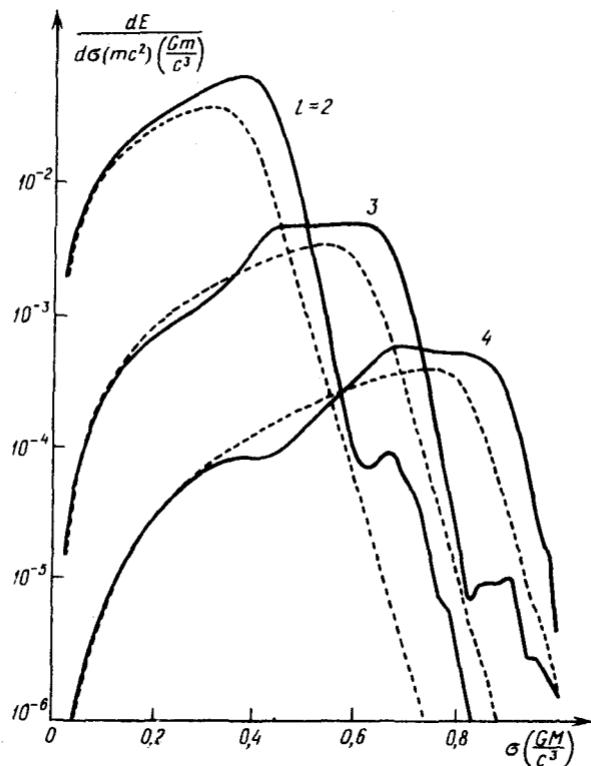


Рис. 35. Полный спектр гравитационного излучения на разных модах l частицы массы m с $v_\infty = 0$, падающей вдоль оси вращения в черную дыру с $a/M = 0,99$ (сплошные линии) и $a = 0$ (пунктир)

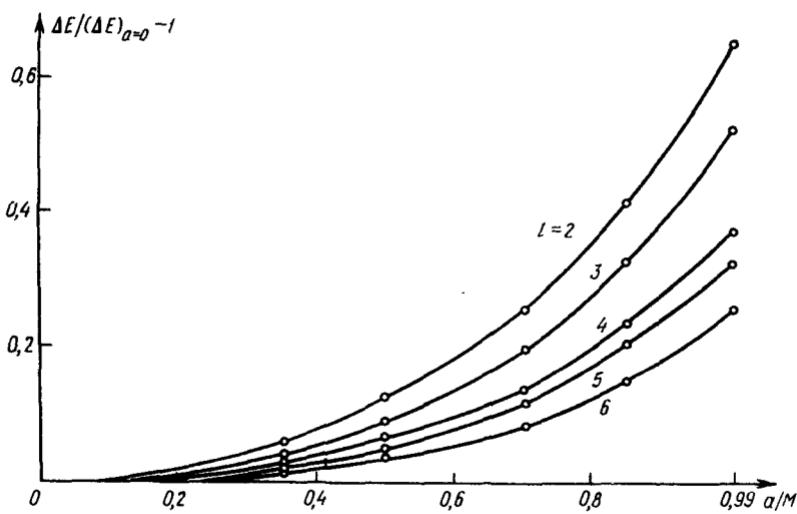


Рис. 36. Отношение полной излученной энергии на разных модах l частицы с $v_\infty = 0$, падающей вдоль оси вращения черной дыры с данным параметром a , к энергии, излученной при падении в невращающуюся черную дыру

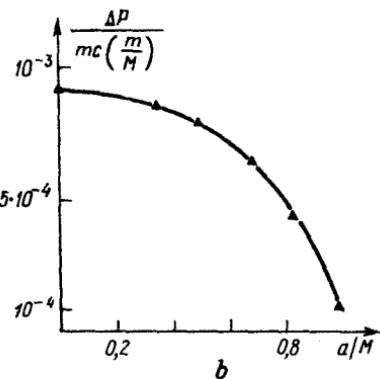
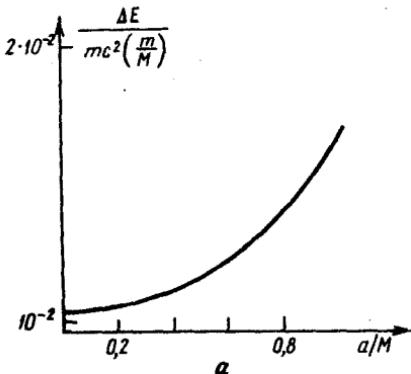


Рис. 37. Зависимость полной энергии (а) и импульса (б), излученных частицей с массой m и $v_\infty = 0$, падающей вдоль оси вращения, от параметра a

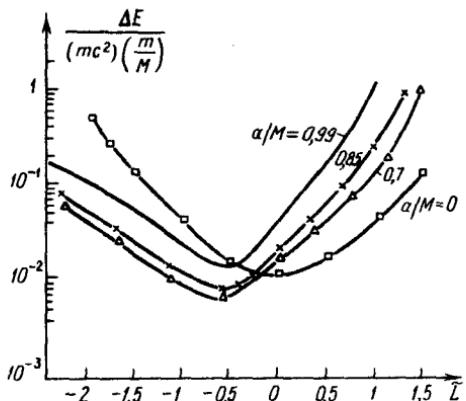


Рис. 38. Полная излученная энергия при падении частиц с $v_\infty = 0$ в экваториальной плоскости черной дыры с разными a как функция углового момента частицы \tilde{L} .

На рис. 36 приведена зависимость энергии, излучаемой на данной моде l , от параметра a черной дыры. Наконец, на рис. 37 показаны полная излученная энергия ΔE (а) и импульс ΔP (б) в зависимости от a . Напомним: излучение ΔP возникает из-за того, что падающая частица, подлетая к черной дыре, излучает гравитационные волны главным образом в направлении своего движения.

Перейдем теперь к случаю движения частицы в экваториальной плоскости вращающейся черной дыры [Кожима, Накамура (1983, 1984а, б)]. Рис. 38 показывает полное количество излученной энергии для частиц, имеющих не слишком большой угловой момент и в конце концов захватывающихся черной дырой (с разными значениями a) *). При $a/M \neq 0$ видна асимметрия графиков для положительных и отрицательных \tilde{L} . Прежде все-

*) Подчеркнем, что расчеты проводятся без учета обратного влияния излучения на движение частицы, поэтому они перестают быть справедливыми при $|\tilde{L}|$, близких к критическим значениям, определяющим захват частицы. При этих значениях \tilde{L} частица делает много оборотов вокруг черной дыры вблизи критической орбиты (см. §§ 4.5, 4.6), и необходим учет накапливающегося обратного влияния излучения на движение.

Случай $|\tilde{L}| > \tilde{L}_{\text{ср}}$ рассмотрен далее.

го, минимумы графиков для $a/M \geq 0,7$ лежат при $\tilde{L} \approx -1$ (а не $\tilde{L} = 0$, как в случае $a = 0$). Это связано с тем, что частицы с отрицательным \tilde{L} вблизи черной дыры уменьшают тангенциальную составляющую своей скорости чтобы орбитальное движение стало направленным в сторону вращения чер

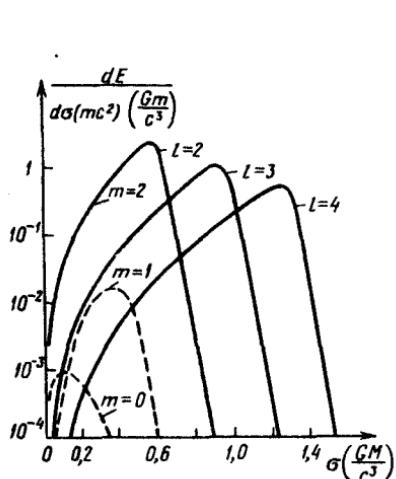


Рис. 39. Полный спектр излучения на разных модах для частицы с $\tilde{L} = 1.3$, падающей в экваториальной плоскости черной дыры с $a/M = 0.85$

Рис. 40. То же, что и на рис. 39, но при $\tilde{L} = -2.25$

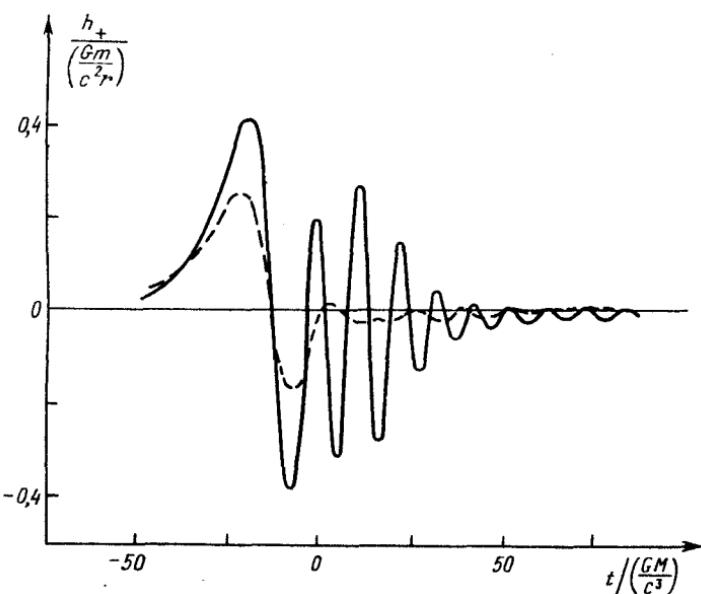
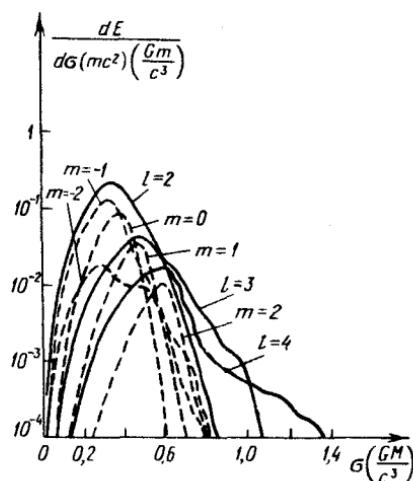


Рис. 41. Форма гравитационной волны h_+ для $l = 2$ в экваториальной плоскости и с $\varphi = 0$ для тех же условий, что и на рис. 39 (сплошная линия) и рис. 40 (пунктир)

ной дыры. В результате частицы с малым по модулю отрицательным \tilde{L} имеют меньшую скорость, чем, например, с $\tilde{L} = 0$, и общее количество излученной энергии у них меньше. Для частиц с большим по модулю отрицательным \tilde{L} излучение в основном определяется величиной углового момента, и ΔE возрастает с ростом $|\tilde{L}|$.

Основная асимметрия графика зависимости ΔE от \tilde{L} , проявляющаяся в том, что при одинаковом модуле \tilde{L} при $\tilde{L} > 0$ излучается больше энергии, чем при $\tilde{L} < 0$, связана со следующим обстоятельством (согласно интерпретации Кожими и Накамуры). При захвате частицы черной дырой (как в рассматриваемом случае) возбуждаются собственные колебания черной дыры. В случае движения частицы в сторону вращения последней сильнее всего возбуждаются колебания мод с $m = -l$ (для фиксированного l) *). Но, согласно рис. 34, мнимая часть ω наименьшая именно для $m = -l$. Значит, и затухание этой моды будет минимальным, и она в результате даст основной вклад в излучение (это явно видно из рис. 39, где для $l = 2$ показаны вклады от разных m).

Таким образом, сильнее всего возбуждается мода с наименьшим затуханием.

В случае частицы с отрицательным \tilde{L} сильнее всего возбуждаются моды с $m = l$ (для фиксированного l). Но они, согласно рис. 34, и быстрее всего затухают! В результате вклад от разных m оказывается сравнимым (рис. 40), а общее количество высвеченной энергии заметно меньше, чем в предыдущем случае. Разница в излучении черной дыры при захвате частицы, движущейся в сторону ее вращения, и частицы, движущейся против вращения, хорошо видна также на рис. 41, где изображено изменение со временем возмущения гравитационного поля в волне. В первом случае имеется более длительное "звуковое" излучение и длина волны короче, чем во втором случае (модули \tilde{L} примерно одинаковы).

Наконец, на рис. 42 показано излучение углового момента ΔL и импульса ΔP в зависимости от \tilde{L} для черных дыр с разными a .

Перейдем теперь к рассмотрению излучения гравитационных волн частицей, движущейся в плоскости $\theta = \pi/2$, имеющей нулевую скорость на бесконечности и угловой момент \tilde{L} , достаточно большой для того, чтобы не быть захваченной черной дырой (случай рассеяния). Данная задача рассмотрена в работе Кожими, Накамуры (1984b).

Напомним, что в случае невращающейся черной дыры при рассеянии нерелятивистской частицы собственные моды колебаний черной дыры не возбуждались (см. § 3.3). Периастр траектории таких частиц лежит вне потенциального барьера для гравитационных волн, а излучаемые движущейся частицей волны имеют слишком низкую частоту, чтобы проникнуть сквозь барьер и возбудить собственные колебания черной дыры. Однако в случае вращающейся черной дыры частота излучаемых частицей гравитационных волн в периастре, равная удвоенной угловой скорости движения

*) Выбор знака m соответствует рис. 34 и статье Детвилера (1980); в работах Кожими и Накамуры выбор знака противоположный.

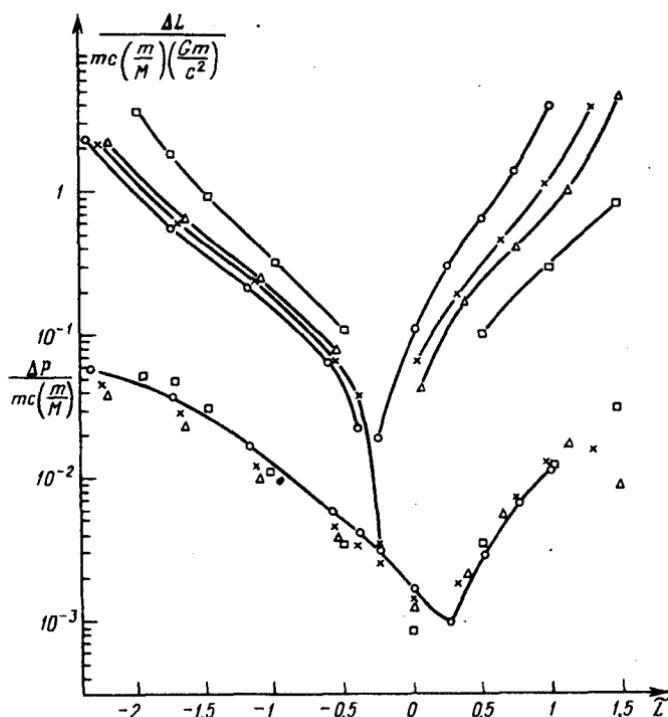


Рис. 42. Полные излученные угловой момент и импульс для тех же условий, что и на рис. 38: кружочки – $a/M = 0,99$, крестики – 0,85, треугольники – 0,7, квадраты – 0

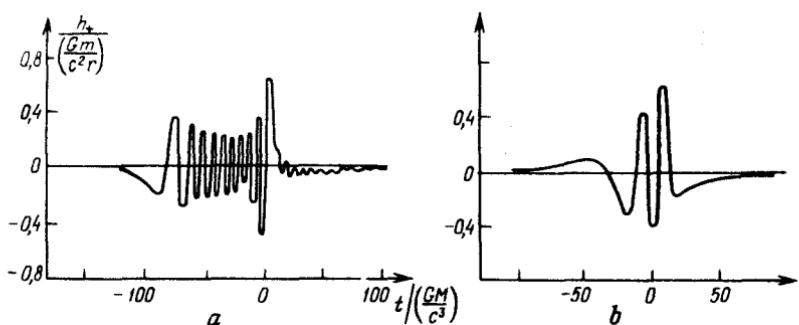


Рис. 43. Форма гравитационной волны h_+ для $l = 2$, $m = -2$ в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$ и вдоль направления наperiастра траектории частицы при рассеянии частицы $\varphi = 0$ с $v_\infty = 0$ в поле черной дыры с $a/M = 0,99$: а) $\tilde{L} = 2,21$; в) $\tilde{L} = 2,6$

частицы, может быть близкой к собственной частоте и достаточной для ее возбуждения. Это возможно при положительном \tilde{L} , лишь немногим превышающем критическое значение захвата.

Так, на рис. 43а и в показаны возмущения метрики в волне для случая движения вокруг черной дыры с $a/M = 0,99$ и $\tilde{L} = 2,21$ и $2,6$. Во втором

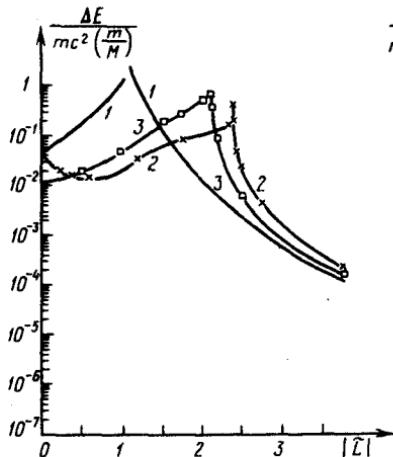


Рис. 44

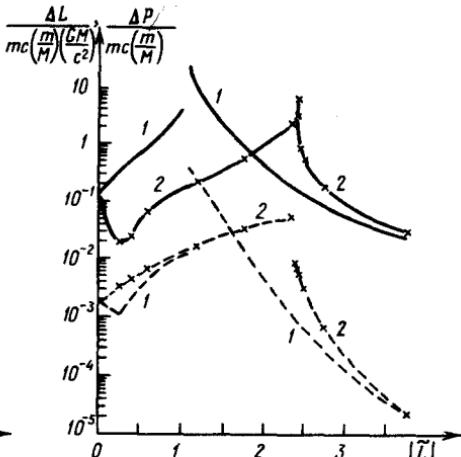


Рис. 45

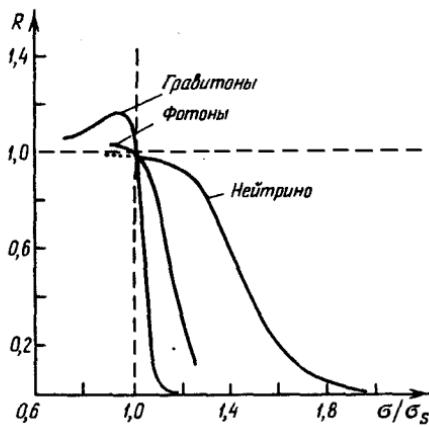


Рис. 46

Рис. 44. Полная излученная энергия при падении частицы с $v_\infty = 0$ в экваториальной плоскости черной дыры как функция $|\tilde{L}|$: 1 – $\tilde{L} > 0$, $a/M = 0,99$; 2 – $\tilde{L} < 0$, $a/M = 0,99$; 3 – $a = 0$

Рис. 45. Полные излученные угловой момент (сплошная линия) и импульс (пунктир). Обозначения те же, что и на рис. 44

Рис. 46. Зависимость коэффициента отражения R от частоты σ

случае никакого "звукового" излучения нет. В первом случае в след за незатухающим звуком волн, связанных с продолжительным кружением частицы около критической окружности захвата, видно затухающее "звуковое" излучение. Простая оценка показывает, что в первом случае частота излучения гравитационных волн частицей в перигалактике примерно совпадает с собственной частотой моды $l = -m = 2$.

На рис. 44 и 45 приведены зависимости излученной энергии, углового момента и импульса от \tilde{L} для черной дыры с $a/M = 0,99$.

В § 8.1 нами будет рассмотрено интереснейшее явление, называемое суперрадиацией. Его теорию логично рассматривать после изложения общей теории черных дыр (гл. 6). Но, с другой стороны, явление суперрадиации относится к распространению волн в окрестности врачающейся черной дыры. Поэтому здесь мы лишь кратко изложим физическую суть явления и приведем его численные характеристики.

Будем рассматривать процесс облучения вращающейся черной дыры какой-либо волной (например, гравитационной), имеющей определенную частоту ω и мультипольность. Как уже было показано для случая шварцшильдовской черной дыры, при этом возможно (в общем случае) частичное проникновение волны сквозь потенциальный барьер и поглощение ее черной дырой, частичное рассеяние на бесконечность (§ 3.2). При этом амплитуда рассеянной волны всегда меньше (или равна) амплитуды падающей, так как часть волны поглощается черной дырой. Рассмотрение этого вопроса в случае вращающейся черной дыры показывает, что при определенных параметрах облучающей волны возможно увеличение амплитуды рассеянной волны по сравнению с падающей. Это и есть явление суперрадиации [Зельдович (1970*)]. Добавочная энергия при этом черпается из "вращательной энергии" черной дыры. В § 8.1 будет показано, что для возникновения суперрадиации необходимо, чтобы частота волны лежала в пределах

$$0 < \omega < \omega_s, \quad (4.7.6)$$

где

$$\omega_s = -\frac{am}{2Mr_*} \quad (4.7.7)$$

(m – отрицательное).

Расчет явления суперрадиации сводится к анализу свойств решения уравнений типа (4.7.1) [см., например, Чандрасекар (1979б)]. На рис. 46, заимствованном из цитированной работы, приводятся графики, показывающие зависимость коэффициента отражения R от частоты падающей волны для волн разной природы (R есть отношение квадрата амплитуд отраженной и падающей волн). Из рисунка видно, что для гравитационных и электромагнитных волн при $\omega < \omega_s$ $R > 1$, т.е. имеется суперрадиация. В то же время для нейтрино суперрадиация отсутствует. Причина последнего факта проанализирована в работах Мартеллини, Тревеса (1977), Чандрасекара (1979б), Айера, Кумара (1979).

Наконец, отметим, что метрика Керра вне горизонта событий, по-видимому, стабильна относительно малых возмущений, как и метрика Шварцшильда [обзор проблемы см. Торн (1976)]. О неустойчивости этой метрики внутри горизонта событий см. § 12.4.

В заключение данного параграфа рассмотрим рассеяние параллельного пучка волн, падающих на вращающуюся черную дыру. Ко времени написания этой книги опубликованы только данные о рассеянии пучка гравитационных волн, параллельного оси вращения черной дыры [Хандлер, Метцнер (1980)]. Эта задача аналогична задаче о рассеянии волн шварцшильдовской черной дырой (см. § 3.5) и решается аналогичными методами. В приближении геометрической оптики рассеяние рассматривалось в предыдущем параграфе.

На рис. 47 [Хандлер, Метцнер (1980)] приведены дифференциальные сечения рассеяния гравитационных волн, падающих параллельно оси вращения черной дыры с $a/M = 0,9$. Положительные ω соответствуют круговой поляризации волн в сторону вращения черной дыры, отрицательные – противоположной круговой поляризации. Как видно из рисунка, основные

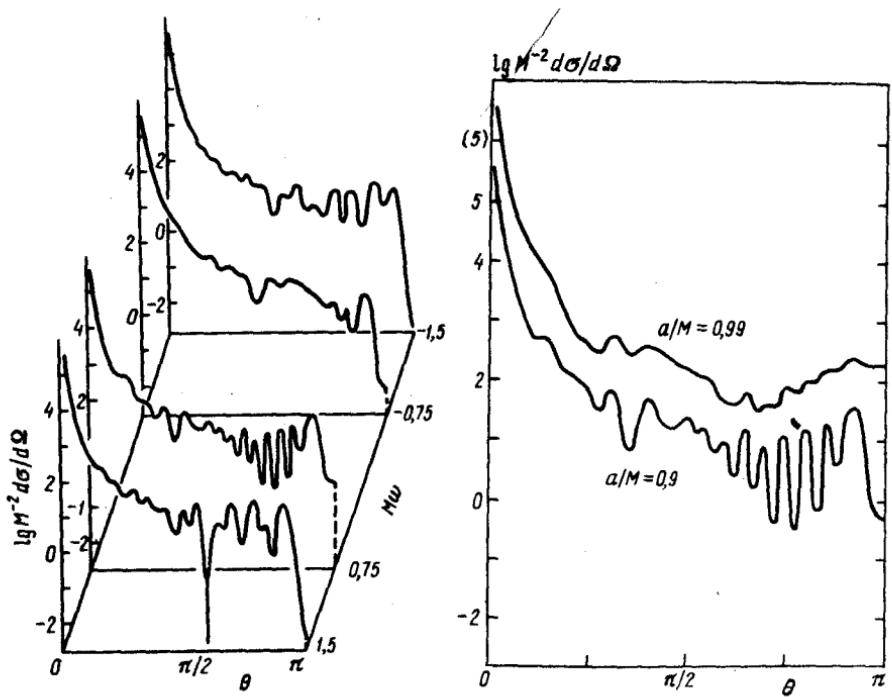


Рис. 47. Дифференциальное сечение рассеяния гравитационного излучения вращающейся черной дырой с $a/M = 0.9$ для различных частот ω

Рис. 48. Два дифференциальных сечения рассеяния гравитационного излучения с $M\omega = 0.75$ черной дырой с $a/M = 0.9$ и 0.99 . В последнем случае важно явление суперрадиации. Кривая для этой ситуации сдвинута вверх по оси ординат на единицу (для ясности изображения). Цифра 5 в скобках на оси ординат относится только к этой кривой

особенности дифференциального сечения аналогичны особенностям для случая невращающейся черной дыры, хотя и существенно усложнены вращением дыры. Полные сечения поглощения излучения σ следующие:

$M\omega$	0,75	1,5	-0,75	-1,5
σM^{-2}	36,5	62,5	88,7	80,3

Наконец, на рис. 48 показано дифференциальное сечение рассеяния для черной дыры с $a/M = 0,99$ и $M\omega = 0,75$. В этом случае явление суперрадиации весьма существенно. Полное сечение поглощения здесь отрицательно и равно $-15,8 M^2$. Сравнение этого случая с рассмотренным выше случаем $a/M = 0,9$, $M\omega = 0,75$ показывает, что суперрадиация добавляется к обычному рассеянию, "замывая" мнимумы на кривых. Особенно сильно это сказывается на величине сечения при рассеянии строго назад ($\theta = \pi$).