

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЧЕРНЫХ ДЫР

§ 5.1. Асимптотически плоские пространства.

Диаграммы Пенроуза

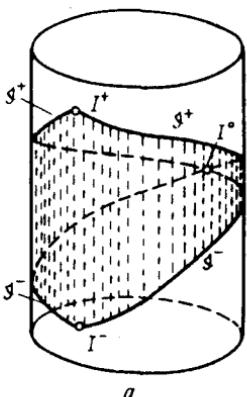
До сих пор при описании свойств черных дыр мы ограничивались рассмотрением метрики Шварцшильда и метрики Керра, а соответствующее пространство-время было стационарным и обладало дополнительным свойством симметрии. Исследование геодезических (отвечающих движению пробных частиц и лучей света) и волновых полей в этих метриках позволило нам описать ряд интересных и важных особенностей протекания физических эффектов в поле таких черных дыр. Естественно, возникает вопрос: а существуют ли черные дыры, отличные от описанных? Каковы их свойства? Чтобы ответить на эти вопросы, прежде всего требуется распространить приведенное выше определение на общий случай, когда пространство-время уже не является стационарным. Такое обобщение очевидно. Резонно и в общем случае называть черной дырой область пространства-времени, откуда невозможен выход к отдаленному наблюдателю никаких, несущих информацию сигналов.

Для придания строгого смысла этому определению следует лишь уточнить, о каком классе наблюдателей идет речь и что на геометрически инвариантном языке означает понятие "отдаленный". Необходимые уточнения легко сделать в том физически важном случае, когда вещества и источники поля вдали от черной дыры отсутствуют, так что при удалении от нее геометрия пространства-времени все меньше отличается от плоской. Пространство-время, обладающее этим свойством, называют асимптотически плоским.

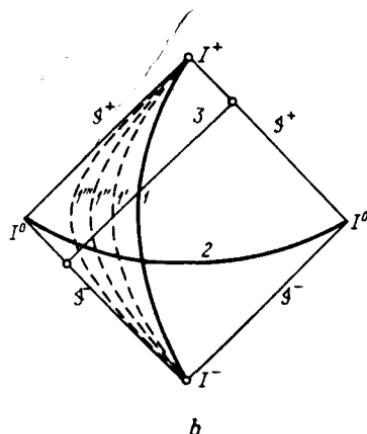
При изучении черных дыр необходимость строгих определений для, казалось бы, наглядных понятий очевидна, ибо само существование этих объектов принципиально меняет структуру пространства-времени и его глобальные свойства по сравнению с плоским пространством-временем Минковского. Так, например, в пространстве-времени Шварцшильда имеется сингулярность, не все нулевые геодезические уходят на бесконечность. Заметим, что такой геодезической является, например, круговая орбита светового луча при $r = 1,5 r_g$, причем эта геодезическая целиком лежит вне черной дыры. Особо сложные ситуации могут возникать при формировании черных дыр, их динамическом взаимодействии и слиянии. Полуинтуитивных, наглядных соображений тут явно недостаточно.

Строгое определение асимптотически плоских пространств было предложено Пенроузом (1963). К этому определению можно прийти посредством следующих рассуждений.

Рассмотрим сначала, как устроено на бесконечности плоское пространство-время Минковского M . Для этого поступим обычным в геометрии



a



b

Рис. 49а. Конформная структура пространства-времени Минковского

Рис. 49б. Диаграмма Пенроуза пространства-времени Минковского. На диаграмме изображены времеподобные (I, I', \dots), пространственно-подобная (2) и световая (3) геодезические

способом — сделаем необходимое конформное преобразование, приближающее бесконечно удаленные точки на конечное расстояние. Перейдем сначала от обычных сферических координат t, r, θ, φ в пространстве-времени M к новым координатам $\psi, \xi, \theta, \varphi$ с помощью следующего преобразования:

$$t + r = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\psi + \xi), \quad \theta = \theta, \quad (5.1.1a)$$

$$t - r = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\psi - \xi), \quad \varphi = \varphi, \quad (5.1.1b)$$

$$-\pi/2 \leq \psi - \xi \leq \psi + \xi \leq \pi/2.$$

Тогда интервал ds^2 записывается в виде

$$ds^2 = \Omega^{-2} d\tilde{s}^2, \quad d\tilde{s}^2 = -d\psi^2 + d\xi^2 + \sin^2 \xi d\omega^2, \quad (5.1.2a)$$

$$d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

где

$$\Omega = 2 \cos \frac{1}{2}(\psi + \xi) \cos \frac{1}{2}(\psi - \xi). \quad (5.1.2b)$$

Точкам на бесконечности в пространстве-времени Минковского соответствуют значения $\psi + \xi$ и $\psi - \xi$, равные $\pm \pi/2$. Метрика ds^2 при этих значениях координат теряет смысл, но конформная ей метрика $d\tilde{s}^2$ при этом регулярна *). Изучая конформную структуру на многообразии (5.1.1) с границей, мы изучаем тем самым конформную структуру пространства-времени Минковского, включая бесконечность. Напомним, что при иссле-

*.) При $\xi = 0$ и $\xi = \pi$ метрика $d\tilde{s}^2$ имеет устранимые координатные сингулярности.

довании общих свойств пространства-времени именно конформная структура важна, так как она определяет причинные свойства окрестности точек, в том числе и свойства световых конусов.

Метрика $d\tilde{s}^2$ является метрикой 4-мерного цилиндра $S^3 \times E^1$ (рис. 49а). Неравенства (5.1.1b) вырезают на цилиндре область, соответствующую M , на рис. 49а она заштрихована (разумеется, мы можем изобразить только две из четырех координат, θ и φ опущены). Если вырезать из цилиндра область M , разрезать ее в точке I^0 и развернуть на плоскость, то получим рис. 49б. В таком виде обычно изображают конформный мир Минковского. Это – так называемая *диаграмма Пенроуза* для M . Надо помнить, что на рис. 49б левая и правая точки I^0 совпадают, т.е. должны быть "склеены".

На диаграмме Пенроуза все времениподобные кривые начинаются в точке I^- и заканчиваются в точке I^+ , а все пространственные сечения проходят через I^0 . Поэтому I^- называют *временной бесконечностью прошлого*, I^+ – *временной бесконечностью будущего*, I^0 – *пространственной бесконечностью*.

Все нулевые геодезические в M начинаются на границе \mathcal{I}^- (на световом конусе будущего точки I^-) и заканчиваются на \mathcal{I}^+ (на световом конусе прошлого точки I^+). Границы \mathcal{I}^- и \mathcal{I}^+ называют соответственно *световой бесконечностью прошлого* и *световой бесконечностью будущего*. Мы видим, что границами M являются "бесконечности" \mathcal{I}^- , \mathcal{I}^+ и точки I^-, I^+, I^0 .

С помощью диаграмм Пенроуза удобно изучать глобальную структуру пространства-времени и в случае, когда геометрия существенно отличается от плоской. При этом принято использовать координаты, в которых световые лучи изображаются прямыми линиями с наклоном 45° (этим свойством обладают, в частности, использованные выше координаты ψ , ξ). В таких координатах особенно наглядна причинная структура, определяемая расположением локальных световых конусов. Само собой разумеется, что на двумерных диаграммах Пенроуза изображается геометрия определенных двумерных сечений пространства-времени.

Вернемся теперь к вопросу о бесконечно удаленных наблюдателях. Мировые линии таких наблюдателей, покоящихся в точках r, r', r'', r''' ($r < r' < r'' < r'''$), изображены на рис. 49б линиями l, l', l'', l''' соответственно. Чем больше величина r , тем ближе к \mathcal{I}^- и \mathcal{I}^+ проходит соответствующая линия. В пределе $r \rightarrow \infty$ она стремится к \mathcal{I}^- и \mathcal{I}^+ . Поэтому логично называть бесконечно удаленными границами M именно \mathcal{I}^- и \mathcal{I}^+ . Заметим, что фактор Ω в (5.1.2), осуществляющий конформное преобразование, обращается в нуль на $\mathcal{I} \equiv \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{I}^-$, а его градиент

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial x^\mu} \right|_l \neq 0 \text{ является световым вектором, касательным к образующим}$$

поверхности \mathcal{I} .

Для исследования мира вблизи \mathcal{I} бывает удобно пользоваться вместо (5.1.1) другими координатами. Заметим, что интервал в мире Минковского может быть записан с использованием запаздывающей световой

координаты $u = t - r$:

$$ds^2 = -du^2 - 2du dr + r^2 d\omega^2. \quad (5.1.3)$$

Далее, сделав преобразование $\rho = r^{-1}$, можно записать метрику в следующем конформном виде:

$$ds^2 = \Omega^{-2} d\tilde{s}^2, \quad d\tilde{s}^2 = -\rho^2 du^2 + 2du d\rho + d\omega^2, \\ \Omega = \rho = r^{-1}. \quad (5.1.4)$$

В этих координатах поверхность \mathcal{Y}^+ описывается уравнением $\rho = 0$. Точка на \mathcal{Y}^+ с координатами u_0, θ_0, φ_0 отвечает переходу к пределу $r \rightarrow \infty$ вдоль выходящего светового луча $u = u_0, \theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0$. Координаты (5.1.4), однако, неприменимы для описания \mathcal{Y}^- . Аналогичным образом, путем замены u на опережающую световую координату $v = t + r$, можно описать \mathcal{Y}^- .

Исходя из того, что свойства асимптотически плоского пространства в окрестности "бесконечности" должны быть аналогичны свойствам пространства Минковского, Пенроуз (1963, 1964, 1965b, 1968) предложил следующие определения.

Сначала определяются так называемые асимптотически простые миры.

Пространство-время M с метрикой $g_{\mu\nu}$ называют *асимптотически простым*, если существуют другое, "нефизическое" пространство \tilde{M}^* с границей $\partial\tilde{M} \equiv \mathcal{Y}$ и регулярная метрика $\tilde{g}_{\mu\nu}$ на нем такие, что 1) $\tilde{M} \setminus \partial\tilde{M}$ конформно M , причем $g_{\mu\nu} = \Omega^{-2} \tilde{g}_{\mu\nu}$; 2) $\Omega|_{\partial\tilde{M}} > 0$, $\Omega|_{\partial\tilde{M}} = 0$, $\Omega_\mu|_{\partial\tilde{M}} \neq 0$; 3) каждая световая геодезическая в \tilde{M} начинается и оканчивается на $\partial\tilde{M}$.

Если в окрестности \mathcal{Y} метрика $g_{\mu\nu}$ удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна (или уравнениям Эйнштейна с тензором энергии-импульса, достаточно быстро убывающим на бесконечности) и выполнены естественные требования причинности и ориентируемости пространства-времени, то, как показал Пенроуз, асимптотически простое пространство обладает следующими свойствами:

1. Пространство M имеет топологию R^4 , а его граница \mathcal{Y} является светоподобной и состоит из двух несвязных компонент $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^+ \cup \mathcal{Y}^-$, каждая из которых имеет топологию $S^2 \times R^1$.

2. Образующими поверхностями \mathcal{Y}^\pm являются световые геодезические в пространстве \tilde{M} , касательные векторы к которым совпадают с $\tilde{g}^{\mu\nu} \Omega_\mu|_{\mathcal{Y}}$.

3. При удалении в бесконечность вдоль световой геодезической тензор кривизны в физическом пространстве M убывает, причем имеет место свойство так называемого *последовательного вырождения*. Мы не будем подробно останавливаться здесь на этом свойстве, детальное описание его можно найти в литературе [см., например, Сакс (1964), Сибгатуллин (1984*)].

Свойство 1 означает, что асимптотически простое пространство глобально устроено так же, как пространство Минковского. В частности, оно имеет сходную причинную структуру, и в нем "нет места" для черных дыр. Чтобы учесть возможность существования локализованных областей с

^{*}) Это пространство мы будем называть пространством Пенроуза.

сильным гравитационным полем, наличие которых не изменяет асимптотических (при $r \rightarrow \infty$) свойств пространства-времени, достаточно рассмотреть класс пространств, которые с помощью "вырезания" отдельных внутренних областей, содержащих те или иные особенности (связанные с сильным гравитационным полем), с последующим гладким "заклеиванием" образовавшихся "дыр" могут быть превращены в асимптотически простые пространства. Такие пространства получили название *асимптотически простых в слабом смысле*. Более строго, пространство M называют асимптотически простым в слабом смысле, если существует асимптотически простое пространство \tilde{M} такое, что для некоторого его открытого подмножества $K(\partial\tilde{M} \subset K)$ область $\tilde{M} \cap K$ изометрична подмножеству M . Асимптотически простые в слабом смысле пространства, в которых метрика в окрестности \mathcal{U} удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна (или уравнениям Эйнштейна с достаточно быстро убывающим тензором энергии-импульса), будем называть *асимптотически плоскими*.

Пространство-время Шварцшильда (2.2.1) и Керра (4.2.1) асимптотически плоские. Диаграммы Пенроуза для них изображены на рис. 50 с и 67. Метрика $d\tilde{s}^2$ пространства, конформного пространству-времени шварцшильдовской вечной черной дыры, может быть получена из метрики (2.7.12) путем перехода от координат Крускала \tilde{u}, \tilde{v} к координатам

$$\Psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tilde{v}}{1 - (\tilde{v}^2 - \tilde{u}^2)}, \quad \xi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tilde{u}}{1 + (\tilde{v}^2 - \tilde{u}^2)},$$

$$-\pi/2 < \Psi + \xi < \pi/2, \quad -\pi/2 < \Psi - \xi < \pi/2,$$

$$-\pi/4 < \Psi < \pi/4,$$

с последующим выделением конформного фактора.

Отмеченное выше свойство 3 означает, что в асимптотически плоских пространствах в окрестности \mathcal{U} эффекты, связанные с кривизной, пренебрежимо малы, а само пространство-время мало отличается от плоского. В частности, в этой области с хорошей точностью выполняются обычные законы сохранения энергии-импульса, а движение пробных тел приближенно можно считать равномерным и прямолинейным. В соответствии с этим в асимптотически плоском пространстве можно определить группу асимптотических симметрий. Для этого заметим, что преобразование из группы Пуанкаре пространства Минковского в декартовых координатах имеет следующий вид:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (5.1.5)$$

где Λ^μ_ν — матрица преобразования Лоренца, a^μ — вектор трансляции, отвечающий сдвигу начала координат. Введем теперь в пространстве Минковского запаздывающие (u, r, θ, φ) или опережающие (v, r, θ, φ) координаты, и пусть w обозначает либо запаздывающую (u), либо опережающую (v) временную координату. Тогда преобразованию (5.1.5) отвечает следующее преобразование координат w, r, θ, φ :

$$w' = w'(w, r, \theta, \varphi), \quad r' = r'(w, r, \theta, \varphi), \quad (5.1.6)$$

$$\theta' = \theta'(w, r, \theta, \varphi), \quad \varphi' = \varphi'(w, r, \theta, \varphi).$$

В пределе $r \rightarrow \infty$ функции, описывающие это преобразование, принимают

более простой вид. В частности, сдвигам ($\Lambda^\mu_\nu = 0$) в физическом пространстве-времени в этом пределе отвечают следующие преобразования:

$$\begin{aligned} w' &= w + a_0 + a_1 \sin \theta \cos \varphi + a_2 \sin \theta \sin \varphi + a_3 \cos \theta, \\ \theta' &= \theta, \quad \varphi' = \varphi, \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

осуществляющие сдвиг поверхности \mathcal{U} вдоль своих образующих.

Этот результат можно описать более формальным образом, допускающим естественное обобщение на случай произвольных асимптотически плоских пространств. Пусть ξ^μ – векторное поле Киллинга, отвечающее преобразованию симметрий в физическом пространстве-времени $M(\nabla^\nu \xi^\mu = 0)$; тогда в конформном пространстве \tilde{M} оно удовлетворяет соотношению

$$\tilde{\nabla}^{(\nu} \xi^{\mu)} - \Omega^{-1} \tilde{\nabla}_\alpha \Omega \xi^\alpha \tilde{g}^{\nu\mu} = 0, \tag{5.1.8}$$

где $\tilde{\nabla}^\mu$ – ковариантная производная в метрике $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$. В общем случае, если пространство-время M не допускает точных изометрий, уравнение (5.1.8) не имеет нетривиальных решений. Это справедливо, в частности, для асимптотически плоских пространств общего вида. Однако, если ограничиться рассмотрением окрестности \mathcal{U} и потребовать, чтобы уравнение (5.1.8) выполнялось лишь на \mathcal{U} , то оно вновь имеет решения. Эти решения определяют векторные поля, генерирующие преобразования асимптотических симметрий. Замечательным является тот факт, что группа, отвечающая этим преобразованиям, не зависит от того или иного конкретного выбора представителя класса асимптотически плоских пространств. Эта группа получила название группы Бонди – Метцнера – Сакса (сокращенно BMC-группы). Подробное изложение ее свойств и описание ее представлений можно найти в работах Сакса (1962), Бонди и др. (1962), Пенроуза (1964), Маккарти (1972а, б, 1973), Маккарти, Крэмпина (1973), Воловича и др. (1978*). Здесь мы лишь кратко остановимся на основных свойствах этой группы, существенных для дальнейшего изложения.

Из-за того, что BMC-группа преобразований сохраняет лишь асимптотический вид метрики, а гравитационное поле медленно спадает на бесконечности, эта группа бесконечномерна и шире, чем группа Пуанкаре, точно сохраняющая форму метрики плоского пространства. Важным свойством BMC-группы является то, что в ней имеется однозначно выделяемая нормальная 4-мерная подгруппа преобразований трансляций. В пространстве Минковского действие этой подгруппы на \mathcal{U} совпадает с (5.1.7). В общем случае в асимптотически плоском пространстве в окрестности \mathcal{U} можно ввести координаты, в которых преобразования подгруппы трансляций имеют вид (5.1.7). Подобные координаты называют *конформными координатами Бонди* [см. Тамбурино, Виникур (1966), Волович и др. (1978*)].

Итак, мы описали класс асимптотически плоских пространств, обладающих асимптотическим поведением, сходным с асимптотическим поведением пространства Минковского, и изложили кратко их свойства. В этом классе пространств естественным образом можно ввести понятие асимптотически удаленного наблюдателя, движение которого происходит почти по инерции. Теперь можно дать строгое определение черной дыры. Однако

прежде чем сделать это, мы остановимся кратко еще на одном вопросе, связанном с теорией рассеяния безмассовых полей в асимптотически плоских пространствах, которая нам потребуется в последующих главах.

Введенное выше определение асимптотически плоского пространства оказывается особенно удобным при обсуждении задачи рассеяния безмассовых полей и, в частности, при описании свойств гравитационного излучения. Универсальный характер поведения ($\sim 1/r$) в волновой зоне (в асимптотической области) этих полей позволяет с помощью конформного преобразования перейти от задачи рассеяния в физическом пространстве-времени к задаче с регулярными начальными данными на световой границе прошлого \mathcal{I}^- в пространстве Пенроуза. При этом оказывается, что из регулярности поведения конформно преобразованного поля в окрестности \mathcal{I} вытекает определенный закон спадания этого поля в асимптотической области.

Проиллюстрируем сказанное на примере скалярного безмассового конформно-инвариантного поля, описываемого уравнением

$$\left(\square - \frac{1}{6} R \right) \varphi = 0 \quad (5.1.9)$$

в асимптотически плоском пространстве $(M, g_{\mu\nu})$. Осуществим с помощью конформного преобразования $g_{\mu\nu} = \Omega^{-2} \tilde{g}_{\mu\nu}$ переход к конформному пространству Пенроуза $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Omega)$, дополнив его конформным преобразованием поля $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi} = \Omega^{-1} \varphi$. Значения поля $\tilde{\varphi}$ на световых границах прошлого \mathcal{I}^- и будущего \mathcal{I}^+ будем называть *образами поля* φ на \mathcal{I}^- и \mathcal{I}^+ и обозначать соответствующей заглавной буквой:

$$\tilde{\varphi}|_{\mathcal{I}^+} = \Phi_{\text{out}}. \quad (5.1.10)$$

Поле $\tilde{\varphi}$ в пространстве Пенроуза удовлетворяет уравнению

$$\left(\tilde{\square} - \frac{1}{6} \tilde{R} \right) \tilde{\varphi} = 0, \quad (5.1.11)$$

где $\tilde{\square} = \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta$ и \tilde{R} – скалярная кривизна метрики $\tilde{g}_{\alpha\beta}$. Задание образа Φ_{in} поля φ в асимптотически простом пространстве позволяет найти φ путем решения уравнения (5.1.11) с начальными данными на регулярной световой поверхности \mathcal{I}^- и тем самым определить Φ_{out} . Иными словами, в асимптотически простом пространстве при условии, что асимптотически регулярное решение существует глобально, имеет место взаимно однозначное соответствие между полем φ и его образами на \mathcal{I}^- и \mathcal{I}^+ :

$$\Phi_{\text{in}} \longleftrightarrow \varphi \longleftrightarrow \Phi_{\text{out}}. \quad (5.1.12)$$

Условие асимптотической регулярности при этом играет роль условия излучения, а задача классической теории рассеяния может быть сформулирована как задача нахождения образа на \mathcal{I}^+ решения φ , которое обладает заданным образом на \mathcal{I}^- . Заметим, что асимптотически регулярное поле в асимптотической области (вблизи \mathcal{I}) имеет вид

$$\varphi \sim \Phi \Omega. \quad (5.1.13)$$

В пространствах Минковского в координатах (5.1.4) это поведение отвечает следующей асимптотике в волновой зоне:

$$\varphi \sim \frac{\Phi_{\text{out}}(u, \theta, \varphi)}{r}. \quad (5.1.14)$$

Описанный метод легко обобщается на случай других безмассовых полей [по этому поводу см., например, Пенроуз (1965b, 1968), Пирани (1964), Волович и др. (1978*), Фролов (1979, 1986*)].

Наличие группы асимптотических симметрий в асимптотически плоском пространстве позволяет определить для безмассовых полей такие величины, как энергия и импульс падающего или выходящего потока. Пусть $\xi_{(a)}^\nu$ ($a = 0, 1, 2, 3$) — генераторы подгрупп трансляций БМС-группы, действующие на \mathcal{J}^\pm . Выражение для энергии ($a = 0$) и импульса ($a = 1, 2, 3$) падающего (выходящего) излучения записывается следующим образом:

$$P_{\mathcal{J}^\pm}^a = - \int_{\mathcal{J}^\pm} \tilde{T}_{\mu\nu} \xi_{(a)}^\nu g^{\mu\alpha} d\sigma_\alpha, \quad (5.1.15)$$

где $\tilde{T}_{\mu\nu} = \Omega^{-2} T_{\mu\nu}$, а $T_{\mu\nu}$ — метрический тензор энергии-импульса рассматриваемого поля. Нетрудно убедиться, что для асимптотически регулярных полей в плоском пространстве-времени $P_{\mathcal{J}^\pm}^a$ совпадает с полной энергией-импульсом системы, определяемой стандартным образом с помощью векторных полей Киллинга, отвечающих трансляциям. В общем случае в асимптотически плоском пространстве выражение (5.1.15) может быть записано в терминах образов безмассовых полей на \mathcal{J}^\pm . В частности, для скалярного поля, удовлетворяющего уравнению (5.1.9), имеем

$$P_{\mathcal{J}}^a = \int N_a \left[(\partial_u \Phi)^2 - \frac{1}{6} \partial_u^2 \Phi^2 \right] du d\omega, \quad (5.1.16)$$

где

$$N_a = (1, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi \cos \theta). \quad (5.1.17)$$

Заметим, что для полей φ типа волновых пакетов, обладающих конечной энергией, значение $|\partial_u \Phi^2|$ убывает при $|u| \rightarrow \infty$ и второй член после интегрирования по частям может быть опущен:

$$P_{\mathcal{J}}^a = \int N_a (\partial_u \Phi)^2 du d\omega. \quad (5.1.18)$$

Аналогичным образом записываются в терминах образов полей на \mathcal{J}^\pm выражения для энергии-импульса падающего и выходящего потоков для других безмассовых полей [см., например, Фролов (1986*)].

§ 5.2. Горизонт событий. Теорема Пенроуза

Теперь мы можем дать строгое определение понятия черной дыры. В асимптотически плоском пространстве-времени черная дыра определяется как такая область, откуда никакой причинный (т.е. движущийся со скоростью, не превосходящей скорости света) сигнал не может выйти на \mathcal{J}^+ . Причинная кривая, описывающая распространение подобного сигнала, является гладкой кривой (касательный вектор к которой u^μ обладает свойством $u_\mu u^\mu \leq 0$) либо состоит из кусков таких кривых. Определим причинное прошлое $J^-(Q)$ для некоторого множества Q как множество точек, обладающих тем свойством, что для каждой из них найдется причинная кривая, направленная в будущее и соединяющая ее с одной из точек Q . Множество событий, видимых отдаленным наблюдателем, совпадает с