

Описанный метод легко обобщается на случай других безмассовых полей [по этому поводу см., например, Пенроуз (1965b, 1968), Пирани (1964), Волович и др. (1978\*), Фролов (1979, 1986\*)].

Наличие группы асимптотических симметрий в асимптотически плоском пространстве позволяет определить для безмассовых полей такие величины, как энергия и импульс падающего или выходящего потока. Пусть  $\xi_{(a)}^\nu$  ( $a = 0, 1, 2, 3$ ) — генераторы подгрупп трансляций БМС-группы, действующие на  $\mathcal{J}^\pm$ . Выражение для энергии ( $a = 0$ ) и импульса ( $a = 1, 2, 3$ ) падающего (выходящего) излучения записывается следующим образом:

$$P_{\mathcal{J}^\pm}^a = - \int_{\mathcal{J}^\pm} \tilde{T}_{\mu\nu} \xi_{(a)}^\nu g^{\mu\alpha} d\sigma_\alpha, \quad (5.1.15)$$

где  $\tilde{T}_{\mu\nu} = \Omega^{-2} T_{\mu\nu}$ , а  $T_{\mu\nu}$  — метрический тензор энергии-импульса рассматриваемого поля. Нетрудно убедиться, что для асимптотически регулярных полей в плоском пространстве-времени  $P_{\mathcal{J}^\pm}^a$  совпадает с полной энергией-импульсом системы, определяемой стандартным образом с помощью векторных полей Киллинга, отвечающих трансляциям. В общем случае в асимптотически плоском пространстве выражение (5.1.15) может быть записано в терминах образов безмассовых полей на  $\mathcal{J}^\pm$ . В частности, для скалярного поля, удовлетворяющего уравнению (5.1.9), имеем

$$P_{\mathcal{J}}^a = \int N_a \left[ (\partial_u \Phi)^2 - \frac{1}{6} \partial_u^2 \Phi^2 \right] du d\omega, \quad (5.1.16)$$

где

$$N_a = (1, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi \cos \theta). \quad (5.1.17)$$

Заметим, что для полей  $\varphi$  типа волновых пакетов, обладающих конечной энергией, значение  $|\partial_u \Phi^2|$  убывает при  $|u| \rightarrow \infty$  и второй член после интегрирования по частям может быть опущен:

$$P_{\mathcal{J}}^a = \int N_a (\partial_u \Phi)^2 du d\omega. \quad (5.1.18)$$

Аналогичным образом записываются в терминах образов полей на  $\mathcal{J}^\pm$  выражения для энергии-импульса падающего и выходящего потоков для других безмассовых полей [см., например, Фролов (1986\*)].

## § 5.2. Горизонт событий. Теорема Пенроуза

Теперь мы можем дать строгое определение понятия черной дыры. В асимптотически плоском пространстве-времени черная дыра определяется как такая область, откуда никакой причинный (т.е. движущийся со скоростью, не превосходящей скорости света) сигнал не может выйти на  $\mathcal{J}^+$ . Причинная кривая, описывающая распространение подобного сигнала, является гладкой кривой (касательный вектор к которой  $u^\mu$  обладает свойством  $u_\mu u^\mu \leq 0$ ) либо состоит из кусков таких кривых. Определим причинное прошлое  $J^-(Q)$  для некоторого множества  $Q$  как множество точек, обладающих тем свойством, что для каждой из них найдется причинная кривая, направленная в будущее и соединяющая ее с одной из точек  $Q$ . Множество событий, видимых отдаленным наблюдателем, совпадает с

$J^-(\mathcal{I}^+)$ . Граница этого множества  $J^-(\mathcal{I}^+)$ , которую мы будем обозначать  $H^+$ , называется горизонтом событий. Горизонт событий является границей черной дыры. Разумеется, в ограниченной области пространства-времени может существовать не одна, а несколько черных дыр, могут возникать новые дыры, существующие дыры могут взаимодействовать и сливаться. В этом случае  $J^-(\mathcal{I}^+)$  является совокупностью границ всех черных дыр. Отсутствие горизонта событий в асимптотически плоском пространстве означает, что все события, происходящие в этом пространстве, со временем могут быть зарегистрированы отдаленным наблюдателем. Появление горизонта событий свидетельствует о возникновении черной дыры, о том, что в результате сильного возрастания гравитационного поля качественно изменяется причинная структура пространства-времени. Возросшее гравитационное поле препятствует выходу сигналов наружу, в результате чего наблюдатель, если только он не решится пересечь горизонт событий и упасть внутрь черной дыры, никогда не узнает о том, что происходит внутри нее.

На рис. 50а и б изображена сферически-симметричная черная дыра, возникающая при коллапсе сферической звезды. Это, как мы знаем, простейший вид черной дыры. На рис. 50а показано пространство-время такой дыры в координатах Эддингтона – Финкельштейна, на рис. 50б – диаграмма Пенроуза для соответствующего пространства-времени. Последнюю можно получить из диаграммы Пенроуза для полного пространства-времени вечной черной дыры, изображенной на рис. 50с, "разрезанием" ее вдоль линии 1, отвечающей движению поверхности коллапсирующего тела, с последующим "при克莱иванием" слева части диаграммы Пенроуза, описывающей метрику внутри коллапсирующего тела. Как видно из последнего рисунка, поверхность гравитационного радиуса вне коллапсирующего тела совпадает с  $H^+$ , область внутри  $H^+$  является черной дырой. Бесконечность данного пространства-времени (рис. 50б) устроена так же, как и бесконечность пространства-времени Минковского. Следует обратить внимание на то, что область, из которой лучи света не могут выйти на бесконечность (т.е. черная дыра), возникает не в момент времени, когда звезда сжимается до размера, равного ее гравитационному радиусу (не в момент  $\tau_1$ ), а раньше – в момент  $\tau_0$ . Горизонт событий  $H^+$  образуют сигналы, идущие со скоростью света и вышедшие из центра звезды как раз в такой момент  $\tau_0$ , что достигают поверхности звезды, когда она сжимается до гравитационного радиуса.

Пересечение горизонта событий с произвольной пространственно-подобной поверхностью  $\Sigma(\tau)$ , уравнение которой имеет вид  $\tau(x) = \text{const}$ , в общем случае состоит из набора замкнутых двумерных поверхностей  $\partial\mathcal{B}_i(\tau)$  ( $i = 1, \dots, N$ ), которые можно рассматривать как границы существующих в данный момент времени  $\tau$  черных дыр. Часть  $\Sigma(\tau)$ , ограниченную  $\partial\mathcal{B}_i(\tau)$ , называют черной дырой  $\mathcal{B}_i(\tau)$  в данный момент времени. Число черных дыр может изменяться со временем.

В окрестности точки возникновения горизонта событий, как видно из рис. 51а, поверхность горизонта не является гладкой. Подобные нерегулярные точки могут возникать на горизонте событий, например, при падении вещества внутрь. Вне этих нерегулярных точек поверхность горизонта событий является светоподобной. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим ситуации, изображенные на рис. 51.

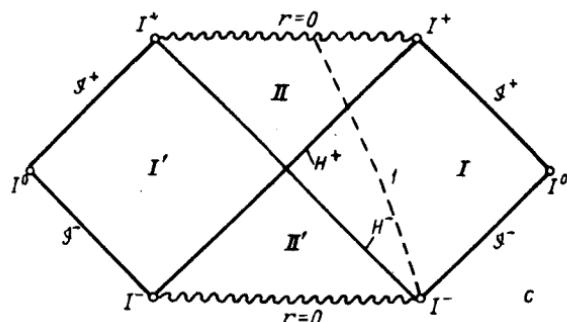
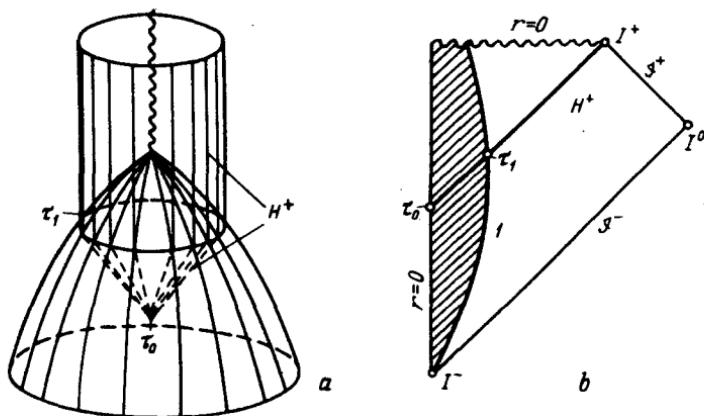


Рис. 50а. Пространство-время сферически-симметричной черной дыры в координатах Финкельштейна

Рис. 50б. Диаграмма Пенроуза для пространства-времени сферически-симметричной черной дыры. Линия  $I$  изображает движение поверхности коллапсирующего тела. Конформный фактор выбран так, что линия  $r = 0$  (центр тела) вертикальна

Рис. 50с. Диаграмма Пенроуза для "вечных" черной и белой дыр. Линия  $I$  – мировая линия пробной частицы

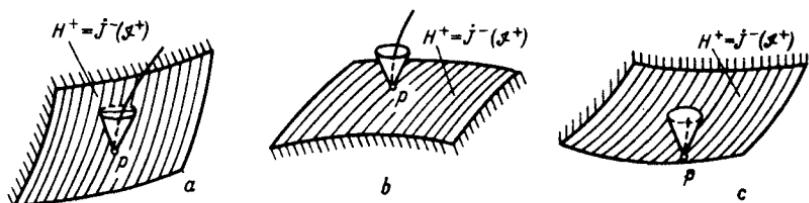


Рис. 51. Регулярная часть горизонта событий является светоподобной поверхностью. Предположение о том, что горизонт событий имеет участок, где он времениподобен (а) или пространственноподобен (б, с), приводит к противоречию. Область, лежащая внутри горизонта событий, заштрихована

Предположим сначала, что в окрестности некоторой регулярной точки  $p$ , лежащей на горизонте событий, его поверхность времениподобна (рис. 51а). Чтобы получить противоречие, достаточно рассмотреть поведение световых лучей в малой окрестности точки  $p$ . Поскольку пространство-время локаль-

но устроено точно так же, как пространство Минковского, то световые лучи, испущенные из  $p$ , образуют локальный световой конус, направленный в будущее. Времениподобная часть горизонта делит этот конус на две части: часть из лучей идет внутрь черной дыры (влево от  $H^+$ ), а часть – во внешнее пространство (вправо от  $H^+$ ). Но точки внешнего пространства по определению находятся в  $J^-(\mathcal{I}^+)$ , а это означает, что из точки  $p$  можно послать причинный сигнал, выходящий на  $\mathcal{I}^+$ . Очевидно также, что это возможно и для точек, лежащих левее  $H^+$ , достаточно близко от  $p$ . Последнее, однако, противоречит предположению, что эти точки лежат внутри черной дыры.

Предположим теперь, что горизонт событий имеет регулярную пространственнонеподобную часть. Если множество  $J^-(\mathcal{I}^+)$  расположено в будущем от этой части  $H^+$  (рис. 51б), то световые лучи, испущенные в будущее в точке  $p$  и ее малой окрестности, лежащей внутри  $H^+$ , выходят в  $J^-(\mathcal{I}^+)$  и тем самым видны для удаленного наблюдателя. Это противоречит сделанному предположению, что область внутри  $H^+$  является черной дырой. Если множество  $J^-(\mathcal{I}^+)$  расположено в прошлом от рассматриваемой части  $H^+$  (рис. 51с), то в малой окрестности этой части  $H^+$  найдется такая точка  $p$ , что световой конус будущего с вершиной в этой точке целиком упирается в  $H^+$ . Это значит, что событие  $p$  не видно удаленному наблюдателю и точка  $p$  не может лежать в  $J^-(\mathcal{I}^+)$ , что противоречит сделанному предположению. Приведенные соображения, хотя, конечно, и не абсолютно строги, показывают, почему регулярные участки горизонта событий являются световыми поверхностями.

Более детальное описание структуры горизонта событий составляет содержание теоремы, доказанной Пенроузом (1968). Согласно этой теореме горизонт событий образован световыми геодезическими (образующими), из которых в будущем нет граничных точек. Если проследить поведе-

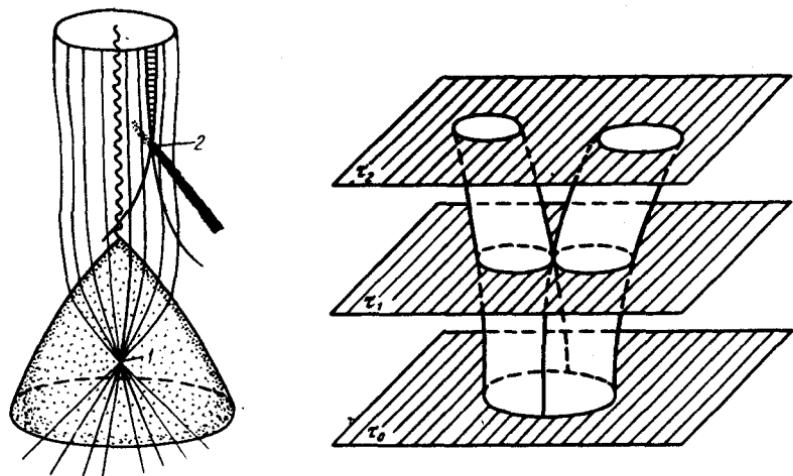


Рис. 52. Иллюстрация к теореме Пенроуза о структуре горизонта событий

Рис. 53. Черная дыра не может распасться на две или более черных дыр. Ситуация, изображенная на рисунке, когда одиночная черная дыра распадается на две, невозможна

ние любой образующей в будущем, то оказывается, что она никогда не покинет горизонта  $H^+$  и никогда не пересечется с другой образующей. При движении вдоль выбранной образующей в прошлое возможны два варианта: либо она всегда лежит на  $H^+$ , либо в некоторой точке этот световой луч входит в  $H^+$ , покидая область  $J^-(\mathcal{I}^+)$ , лежащую вне черной дыры. В точке входа этой образующей в  $H^+$  имеется пересечение ее с другими образующими (каустика). Вне каустик через каждую точку горизонта проходит только одна образующая. Все сказанное проиллюстрировано на рис. 52. На этом рисунке новые пучки лучей входят в  $H^+$  в каустике 2, когда в черную дыру падает вещество. Каустика 1 отвечает точке возникновения горизонта событий. Каустики могут возникать при падении в черную дыру гравитационного излучения или при слиянии двух или нескольких черных дыр.

Ситуация, изображенная на рис. 53, когда одиночная черная дыра под каким-либо внешним воздействием распадается на две (или более) черные дыры, оказывается невозможной. Действительно, при таком процессе две (или более) удаленные в начальный момент  $\tau_0$  точки поверхности черной дыры сближаются и пересекаются в момент  $\tau_1$  образования "перетяжки". Это означает, что по крайней мере пара образующих горизонта событий при продолжении их в будущее пересекаются между собой, что противоречит теореме Пенроуза. Утверждение о невозможности распада или уничтожения черной дыры допускает строгое доказательство, которое можно найти в книге Хокинга, Эллиса (1973).

### § 5.3. Теорема Элерса – Сакса.

Фокусировка световых лучей  
гравитационным полем

Целый ряд важных свойств черных дыр непосредственно связан с тем, что горизонт событий, ограничивающий черную дыру, является световой поверхностью. Поэтому, прежде чем перейти к изучению этих свойств, остановимся более подробно на описании световых поверхностей в искривленном пространстве-времени.

Пусть в пространстве-времени с метрикой  $g_{\mu\nu}$  задана световая поверхность  $\Gamma$ , уравнение которой в локальных координатах  $x^\mu$  записывается в виде  $\varphi(x^\mu) = 0$ . Тогда градиентный вектор  $\varphi_{,\mu}$  является световым на  $\Gamma$ :  $g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}|_{\varphi=0}=0$ . Вне  $\Gamma$  это соотношение, вообще говоря, не выполняется. Однако можно показать [см., например, Курант (1962)], что произвол в выборе функции  $\varphi$  может быть использован так, что поверхность  $\Gamma$  ( $\varphi(x) = 0$ ) окажется включенной в однопараметрическое семейство световых поверхностей  $\Gamma_c$  ( $\varphi(x) = c$ ). Без ограничения общности будем считать, что такое включение произведено. Тогда

$$g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} = 0. \quad (5.3.1)$$

Если обозначить  $l^\mu = g^{\mu\nu}\varphi_{,\nu}$ , то соотношение (5.3.1) означает, что вектор  $l^\mu$  – световой и является касательным к поверхностям  $\Gamma_c$ . Более того, используя свойство  $\varphi_{,\mu;\nu} = \varphi_{,\nu;\mu}$  и равенство (5.3.1), имеем  $l^\nu l_{\mu;\nu} = l^\nu l_{\nu;\mu} =$