

ние любой образующей в будущем, то оказывается, что она никогда не покинет горизонта H^+ и никогда не пересечется с другой образующей. При движении вдоль выбранной образующей в прошлое возможны два варианта: либо она всегда лежит на H^+ , либо в некоторой точке этот световой луч входит в H^+ , покидая область $J^-(\mathcal{I}^+)$, лежащую вне черной дыры. В точке входа этой образующей в H^+ имеется пересечение ее с другими образующими (каустика). Вне каустик через каждую точку горизонта проходит только одна образующая. Все сказанное проиллюстрировано на рис. 52. На этом рисунке новые пучки лучей входят в H^+ в каустике 2, когда в черную дыру падает вещество. Каустика 1 отвечает точке возникновения горизонта событий. Каустики могут возникать при падении в черную дыру гравитационного излучения или при слиянии двух или нескольких черных дыр.

Ситуация, изображенная на рис. 53, когда одиночная черная дыра под каким-либо внешним воздействием распадается на две (или более) черные дыры, оказывается невозможной. Действительно, при таком процессе две (или более) удаленные в начальный момент τ_0 точки поверхности черной дыры сближаются и пересекаются в момент τ_1 образования "перетяжки". Это означает, что по крайней мере пара образующих горизонта событий при продолжении их в будущее пересекаются между собой, что противоречит теореме Пенроуза. Утверждение о невозможности распада или уничтожения черной дыры допускает строгое доказательство, которое можно найти в книге Хокинга, Эллиса (1973).

§ 5.3. Теорема Элерса – Сакса.

Фокусировка световых лучей
гравитационным полем

Целый ряд важных свойств черных дыр непосредственно связан с тем, что горизонт событий, ограничивающий черную дыру, является световой поверхностью. Поэтому, прежде чем перейти к изучению этих свойств, остановимся более подробно на описании световых поверхностей в искривленном пространстве-времени.

Пусть в пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu}$ задана световая поверхность Γ , уравнение которой в локальных координатах x^μ записывается в виде $\varphi(x^\mu) = 0$. Тогда градиентный вектор $\varphi_{,\mu}$ является световым на Γ : $g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}|_{\varphi=0}=0$. Вне Γ это соотношение, вообще говоря, не выполняется. Однако можно показать [см., например, Курант (1962)], что произвол в выборе функции φ может быть использован так, что поверхность Γ ($\varphi(x) = 0$) окажется включенной в однопараметрическое семейство световых поверхностей Γ_c ($\varphi(x) = c$). Без ограничения общности будем считать, что такое включение произведено. Тогда

$$g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} = 0. \quad (5.3.1)$$

Если обозначить $l^\mu = g^{\mu\nu}\varphi_{,\nu}$, то соотношение (5.3.1) означает, что вектор l^μ – световой и является касательным к поверхностям Γ_c . Более того, используя свойство $\varphi_{,\mu;\nu} = \varphi_{,\nu;\mu}$ и равенство (5.3.1), имеем $l^\nu l_{\mu;\nu} = l^\nu l_{\nu;\mu} =$

$= \frac{1}{2} (l^\nu l_\nu)_{,\mu} = 0$, т.е. интегральные кривые векторного поля l^μ :

$$\frac{dx^\mu}{dr} = l^\mu \quad (5.3.2)$$

являются геодезическими, причем r – аффинный параметр. Если начальная точка интегральной кривой (5.3.2) лежит на световой поверхности Γ , то она целиком принадлежит этой поверхности, а сама Γ образована двумерным семейством световых геодезических (образующих). Пусть r – аффинный параметр вдоль образующих, а y^a ($a = 1, 2$) – непрерывные параметры, их "нумерующие". Тогда решение уравнения $\varphi = 0$ можно записать в следующем параметризованном виде: $x^\mu = f^\mu(r, y^a)$, причем имеют место соотношения

$$l^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial r}, \quad l_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial y^a} = 0, \quad l^\mu l_{\nu;\mu} = 0, \quad l^\mu l_\mu = 0. \quad (5.3.3)$$

С физической точки зрения поверхность Γ описывает распространение фронта световой волны, а ее образующие – световые лучи, ортогональные фронту. Если выделить узкий пучок световых лучей, то информацию об их поведении можно получить с помощью следующего эксперимента. Расположим на пути пучка (ортогонально ему) непрозрачный объект, а на некотором расстоянии от объекта поместим ортогонально пучку экран. Тогда теорема, доказанная Элерсом и Саксом [Йордан и др. (1961), Сакс (1961)], утверждает, что все части тени достигают экрана одновременно; размер, форма и ориентация тени зависят только от положения экрана и не зависят от скорости движения наблюдателя, а если экран расположен на малом расстоянии δr от объекта, то увеличение и деформация тени определяются величинами θ δr и $|\sigma| \delta r$, где

$$\theta = \frac{1}{2} l^\alpha_{:\alpha}, \quad |\sigma| = \left[\frac{1}{2} l_{\alpha:\beta} l^{\alpha:\beta} - \theta^2 \right]^{1/2}. \quad (5.3.4)$$

Мы воспроизведем здесь основные этапы доказательства этой теоремы применительно к рассматриваемому случаю. Это позволит нам более

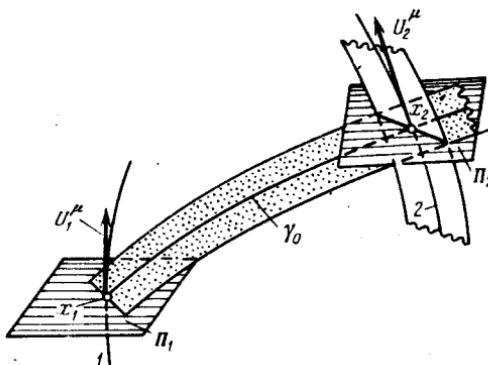


Рис. 54. Иллюстрация к теореме Элерса – Сакса о распространении световых лучей

детально описать ряд важных характеристик световых поверхностей*). Пусть световой луч γ_0 , описываемый уравнением $x^\mu = f^\mu(r, y_0^\alpha)$, пересекает мировую линию наблюдателя в точке $x_1^\mu = f^\mu(r_1, y_0^\alpha)$ и четырехмерная скорость наблюдателя в этот момент есть U_1^μ (рис. 54). С точки зрения наблюдателя множество Π_1 событий $x_1^\mu + dx^\mu$, одновременных этому событию, удовлетворяет условию

$$U_{1\mu} dx^\mu = 0. \quad (5.3.5)$$

Выберем аффинный параметр r так, чтобы в точках пересечения лучей пучка с Π_1 выполнялось условие $r = r_1$. Если потребовать, чтобы смещения dx^μ дополнительно удовлетворяли условию

$$l_\mu dx^\mu = 0, \quad (5.3.6)$$

то эти два условия совместно определяют двумерную площадку, перпендикулярную (в системе отсчета U_1^μ) пучку световых лучей. Пусть e_a^α ($a = 1, 2$) — единичные ортогональные друг к другу векторы, а $m^\alpha = 2^{1/2}(e_1^\alpha + ie_2^\alpha)$. Тогда имеем

$$m^\alpha m_\alpha = \bar{m}^\alpha \bar{m}_\alpha = 0, \quad m^\alpha \bar{m}_\alpha = 1. \quad (5.3.7)$$

Предположим теперь, что на пути светового пучка расположен объект, причем так, что часть двумерной площадки, ограниченная кривой

$$\xi^\alpha(\theta) \equiv x^\alpha(\theta) - x_1^\alpha = \zeta(\theta) \bar{m}^\alpha + \bar{\zeta}(\theta) m^\alpha, \quad (5.3.8)$$

оказывается непрозрачной для световых лучей. Тогда за площадкой возникнет область тени, граница которой определяется условием

$$x^\mu = f^\mu(r, y_0^\alpha + \delta y^\alpha(\theta)), \quad (5.3.9)$$

где $y_0^\alpha + \delta y^\alpha(\theta)$ — значение параметра y^α светового луча, проходящего через точку площадки $x^\alpha(\theta)$, а

$$f^\mu(r_1, y_0^\alpha + \delta y^\alpha(\theta)) = x_1^\alpha + \xi_1^\alpha(\theta). \quad (5.3.10)$$

Пусть световой луч γ_0 при продолжении в точке $x_2^\mu = f^\mu(r_2, y_0^\alpha)$ пересекает мировую линию γ другого наблюдателя, четырехмерная скорость которого в этот момент равна U_2^μ (см. рис. 54). С точки зрения этого наблюдателя пространство Π_2 событий, одновременных с x_2^μ , растягивается векторами $dx^\mu = x^\mu - x_2^\mu$, удовлетворяющими соотношению $U_{2\mu} dx^\mu = 0$. Используем произвол ($r \rightarrow r' = A(y^\alpha)(r - r_1) + r_1$) в выборе аффинного параметра, чтобы добиться выполнения равенства $r = r_2$ для всех световых лучей пучка в точках их пересечения с Π_2 . Нетрудно убедиться, что двумерная площадка $x^\mu = f^\mu(r_2, y_0^\alpha + \delta y^\alpha)$, описывающая положение фронта волны в момент x_2^μ в системе отсчета U_2^μ , ортогональна направлению светового луча, касательный вектор к которому $l_2^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial r}(r_2, y_0^\alpha)$. Тем самым доказано, что все части тени одновременно достигают экрана, расположенного перпендикулярно пучку.

). Вопрос о конгруэнциях световых геодезических в искривленном пространстве-времени подробно освещен, например, в обзорах Пирани (1964) и Фролова (1976), где приведены также соответствующие ссылки.

Размер, форма и ориентация изображения на экране определяются однозначно, если известны скалярные произведения $\delta_1 x^\mu \cdot \delta_2 x_\mu$ для произвольной пары векторов, соединяющих точку x_2^μ с точками попадания на экран световых лучей с параметрами $y_0^a + \delta y_1^a$ и $y_0^a + \delta y_2^a$: $\delta_i x^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial y^a} (r_2, y_0^a) \delta y_i^a$. Нетрудно убедиться в том, что при переходе в другую систему отсчета U_2^μ векторы $\delta_i x^\mu$ преобразуются следующим образом: $\delta'_i x^\mu = \delta_i x^\mu + a_i l^\mu$, а значения скалярных произведений остаются неизменными:

$$\delta_1 x^\mu \cdot \delta_2 x_\mu = \delta'_1 x^\mu \cdot \delta'_2 x_\mu. \quad (5.3.11)$$

Тем самым показано, что размер, форма и ориентация тени не зависят от скорости движения наблюдателя.

Поскольку характеристики изображения на экране не зависят от выбора наблюдателя, возьмем, для удобства, в качестве U_2^μ вектор, получаемый из U_1^μ параллельным переносом вдоль γ_0 . Обозначим через m_2^μ результат такого переноса вектора m^μ . Поскольку при параллельном переносе сохраняется ортогональность m^μ векторам l^μ и U^μ , то m_2^μ и \bar{m}_2^μ растягивают двумерную площадку экрана, ортогонального световому пучку в системе отсчета U_2^μ . Определим вектор $\xi_1^\alpha(r) = \frac{\partial f^\alpha(r, y_0^a)}{\partial y^a} \delta y^a$, соединяющий точку с аффинным параметром r луча γ_0 с точкой с тем же аффинным параметром на световом луче γ с параметрами $y_0^a + \delta y^a$. Используя выражение для $l^\alpha (l^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial r})$ и свойство симметрии $\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial r \partial y^a} = \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial y^a \partial r}$, имеем

$$l^\alpha \xi_1^\beta_{;\alpha} - \xi_1^\alpha l^\beta_{;\alpha} \equiv l^\alpha \xi_1^\beta_{;\alpha} - \xi_1^\alpha l^\beta_{;\alpha} = 0. \quad (5.3.12)$$

Вектор $\xi_1^\alpha(r_2) = (\xi + \delta \xi) \bar{m}_2^\alpha + (\bar{\xi} + \delta \bar{\xi}) m_2^\alpha$ отвечает точке попадания луча γ на экран. Обозначим $\xi^\alpha(r)$ вектор, получаемый в точке r в результате параллельного переноса вектора $\xi_1^\alpha = \xi_1^\alpha(r_1) = \xi \bar{m}^\alpha + \bar{\xi} m^\alpha$ вдоль γ_0 :

$$l^\alpha \xi^\beta_{;\alpha} = 0. \quad (5.3.13)$$

Поскольку в начальной точке r_1 векторы ξ_1^α и ξ^α совпадают, то для малых расстояний $\delta r = r_2 - r_1$ экрана от объекта находим

$$\xi^\alpha = (\delta^\alpha_\beta + l^\alpha_{;\beta} \delta r) \xi^\beta. \quad (5.3.14)$$

Умножая обе части этого равенства на m_α и обозначая

$$\rho = -l_{\alpha;\beta} m^\alpha \bar{m}^\beta, \quad \sigma = -l_{\alpha;\beta} m^\alpha m^\beta, \quad (5.3.15)$$

получаем

$$\delta \xi = -(\rho \xi + \sigma \bar{\xi}) \delta r. \quad (5.3.16)$$

Таким образом, отображение

$$\xi \rightarrow \xi' = \xi + \delta \xi = \xi(1 - \rho \delta r) - \bar{\xi} \delta r \quad (5.3.17)$$

устанавливает связь между формой предмета и формой тени.

Если в качестве предмета выбрать круг, граница которого $\xi(\theta) = \exp(i\theta)$, то граница тени определяется соотношением

$$\xi' = (1 - \rho \delta r) \exp(i\theta) - \sigma \delta r \exp(-i\theta), \quad (5.3.18)$$

описывающим эллипс с полуосами $a_{\pm} = [1 - (\rho + \bar{\rho} + |\sigma|) \delta r]$, площадь которого равна $\pi a_+ a_- = \pi [1 - (\rho + \bar{\rho}) \delta r]$, и, следовательно, фактор $\theta = -\operatorname{Re} \rho$ определяет увеличение линейного масштаба. Модуль сдвига $|\sigma|$ определяет степень сжатия круга и выражается через $a_+/a_- = 1 + 2|\sigma| \delta r$.

Величины ρ и $|\sigma|$, не зависящие от выбора векторов m^α и характеризующие расширение и сдвиг конгруэнции световых лучей, получили название *оптических скаляров*. Следует подчеркнуть, что инвариантами являются величины $\rho \delta r$ и $\sigma \delta r$, а ρ и σ при изменении аффинного параметра преобразуются линейным образом. Нетрудно убедиться, что если рассматриваемая световая поверхность $\varphi(x) = 0$ включена в семейство световых поверхностей $\varphi(x) = c$ и $l_\alpha = \partial_\alpha \varphi$, то

$$\rho = -\frac{1}{2} l^\alpha_{;\alpha} |\sigma|^2 = \frac{1}{2} l_{\alpha;\beta} l^{\alpha;\beta} - \rho^2. \quad (5.3.19)$$

Следует подчеркнуть, что поскольку $l_{\alpha;\beta} = \varphi_{;\alpha;\beta} = l_{\beta;\alpha}$, то оптический скаляр ρ для конгруэнции световых лучей, образующих поверхность Γ , является действительной величиной: $\rho = \bar{\rho}$. Полученные выше соотношения завершают доказательство теоремы Элерса – Сакса.

Если обозначить площадь сечения узкого светового пучка через δA , то ее изменение описывается следующим уравнением, вытекающим из (5.3.18) при $\rho = \bar{\rho}$:

$$\frac{d}{dr} (\delta A)^{1/2} = -\rho (\delta A)^{1/2}. \quad (5.3.20)$$

При $\rho > 0$ площадь сечения пучка при увеличении аффинного параметра убывает.

Поведение оптических скаляров ρ и σ вдоль световых лучей описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Вывод этих уравнений основан на использовании тождества

$$l_{\mu;\alpha;\beta} = l_{\mu;\beta;\alpha} + R^\nu_{\mu\alpha\beta} l_\nu. \quad (5.3.21)$$

Умножая обе части этого соотношения на $l^\beta m^\mu \bar{m}^\alpha$, выбирая для удобства m^μ параллельно переносимым вдоль l^μ , учитывая условие геодезичности $l^\mu l^\alpha_{;\mu} = 0$ и соотношение $R_{\nu\beta} l^\nu l^\beta = 2R_{\nu\mu\alpha\beta} l^\nu l^\beta m^\mu \bar{m}^\alpha$, получаем следующее уравнение:

$$\frac{d\rho}{dr} = \rho^2 + \sigma \bar{\sigma} + \Phi, \quad (5.3.22)$$

где $\Phi = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta$. Аналогично выводится уравнение для σ :

$$\frac{d\sigma}{dr} = \sigma (\rho + \bar{\rho}) + \Psi, \quad (5.3.23)$$

где $\Psi = C_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\alpha m^\beta l^\gamma m^\delta$; $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – тензор Вейля [см. (П. 4)] *).

*). Оптические скаляры ρ и σ определяются соотношением (5.3.19) для произвольной световой геодезической конгруэнции; при этом соотношения (5.3.22) и (5.3.23)

Если предположить, что имеется пробный пучок, образованный световыми лучами, для которого в начальный момент выполнено условие $\rho = \sigma = 0$, то часть кривизны Φ (при $\Psi = 0$) действует как линза без астигматизма (σ остается равным нулю), в то время как часть кривизны Ψ (при $\Phi = 0$) действует как чисто астигматическая линза (ρ остается равным нулю).

Соотношение (5.3.22) позволяет доказать следующее важное утверждение.

Теорема о фокусировании. Пусть $\Phi \geq 0$ и в некоторой точке светового пучка $r = r_0$ выполняется неравенство $\rho \equiv \rho_0 > 0$; тогда на конечном расстоянии $r - r_0 \leq \rho_0^{-1}$ от этой точки пучок света достигает фокальной точки и площадь его сечения обращается в нуль.

Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться следующим соотношением:

$$\frac{d^2}{dr^2} (\delta A)^{1/2} = -(\sigma\bar{\sigma} + \Phi)(\delta A)^{1/2}, \quad (5.3.24)$$

которое получается из (5.3.20) с помощью дифференцирования и уравнения (5.3.22). Поскольку правая часть этого соотношения неположительна, то при $r > r_0$ $d(\delta A)^{1/2}/dr \leq -\rho_0(\delta A)^{1/2}(r = r_0)$ и, следовательно, $(\delta A)^{1/2}$ обращается в нуль при значении параметра r , удовлетворяющем неравенству $0 < r - r_0 \leq \rho_0^{-1}$.

Если гравитационное поле описывается уравнениями Эйнштейна, то условие $\Phi \geq 0$ эквивалентно соотношению $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$. Это условие выполняется, в частности, если тензор энергии-импульса, описывающий распределение вещества и полей, удовлетворяет слабому энергетическому условию (см. Приложение), т.е. плотность энергии $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ в системе отсчета произвольного наблюдателя ($u^\mu u_\mu = -1$) неотрицательна. Для доказательства того, что $\Phi \geq 0$ вытекает из слабого энергетического условия, достаточно рассмотреть предельный случай, когда $\alpha(u)u^\mu \rightarrow l^\mu$.

Имеются основания считать, что при описании вещества и физических полей в рамках *классической теории* слабое энергетическое условие всегда выполняется. Это означает, что всякий поток энергии-импульса через световую поверхность оказывает фокусирующее действие на световые лучи.

§ 5.4. Теорема Хокинга. Принцип космической цензуры

Согласно теореме Пенроуза горизонт событий является световой поверхностью, образующие которой при продолжении их в будущее никогда не пересекаются между собой. Каустики на горизонте, отвечающие образованию новых пучков образующих ($\rho = -\infty$), могут возникать в результате падения внутрь черной дыры вещества, столкновения и слияния черных дыр и при воздействии на черную дыру поля от внешних источников. Эти особенности горизонта событий в сочетании с общими теоремами о световых поверхностях, доказанными ранее, позволяют вывести ряд важных утверждений относительно общих свойств черных дыр.

также оказываются выполненными. В случае, если l^μ являются касательными векторами к световой поверхности, то ρ удовлетворяет условию $\rho = \bar{\rho}$.