Если предположить, что имеется пробный пучок, образованный световыми лучами, для которого в начальный момент выполнено условие $\rho = \sigma = 0$, то часть кривизны Φ (при $\Psi = 0$) действует как линза без астигматизма (σ остается равным нулю), в то время как часть кривизны Ψ (при $\Phi = 0$) действует как чисто астигматическая линза (ρ остается равным нулю).

Соотношение (5.3.22) позволяет доказать следующее важное утверждение.

Теорема о фокусировании. Пусть $\Phi \geqslant 0$ и в некоторой точке светового пучка $r = r_0$ выполняется неравенство $\rho \equiv \rho_0 > 0$; тогда на конечном расстоянии $r - r_0 \leqslant \rho_0^{-1}$ от этой точки пучок света достигает фокальной точки и площадь его сечения обращается в нуль.

Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться следующим соотношением:

$$\frac{d^2}{dr^2}(\delta A)^{1/2} = -(\sigma\bar{\sigma} + \Phi)(\delta A)^{1/2}, \tag{5.3.24}$$

которое получается из (5.3.20) с помощью дифференцирования и уравнения (5.3.22). Поскольку правая часть этого соотношения неположительна, то при $r > r_0$ $d(\delta A)^{1/2}/dr \leqslant -\rho_0(\delta A)^{1/2}(r = r_0)$ и, следовательно, $(\delta A)^{1/2}$ обращается в нуль при значении параметра r, удовлетворяющем неравенству $0 < r - r_0 \leqslant \rho_0^{-1}$.

Если гравитационное поле описывается уравнениями Эйнштейна, то условие $\Phi \geqslant 0$ эквивалентно соотношению $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geqslant 0$. Это условие выполняется, в частности, если тензор энергии-импульса, описывающий распределение вещества и полей, удовлетворяет *слабому энергетическому условию* (см. Приложение), т.е. плотность энергии $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ в системе отсчета произвольного наблюдателя ($u^\mu u_\mu = -1$) неотрицательна. Для доказательства того, что $\Phi \geqslant 0$ вытекает из слабого энергетического условия, достаточно рассмотреть предельный случай, когда $\alpha(u)u^\mu \to l^\mu$.

Имеются основания считать, что при описании вещества и физических полей в рамках *классической теории* слабое энергетическое условие всегда выполняется. Это означает, что всякий поток энергии-импульса через световую поверхность оказывает фокусирующее действие на световые лучи.

§ 5.4. Теорема Хокинга. Принцип космической цензуры

Согласно теореме Пенроуза горизонт событий является световой поверхностью, образующие которой при продолжении их в будущее никогда не пересекаются между собой. Каустики на горизонте, отвечающие образованию новых пучков образующих ($\rho = -\infty$), могут возникать в результате падения внутрь черной дыры вещества, столкновения и слияния черных дыр и при воздействии на черную дыру поля от внешних источников. Эти особенности горизонта событий в сочетании с общими теоремами о световых поверхностях, доказанными ранее, позволяют вывести ряд важных утверждений относительно общих свойств черных дыр.

также оказываются выполненными. В случае, если l^μ являются касательными векторами к световой поверхности, то ρ удовлетворяет условию $\rho = \bar{\rho}$.

Рассмотрим бесконечно узкий пучок образующих горизонта событий. Пусть сечение этого пучка в точке с аффинным параметром r имеет площадь $\delta A(r)$. Отметим, что, согласно теореме Элерса – Сакса, величина $\delta A(r)$ не зависит от конкретного выбора локального наблюдателя, ее измеряющего, и поэтому имеет инвариантный смысл. Предположим, что в некоторой точке r_0 площадь сечения выбранного пучка начинает убывать, а тензор энергии-импульса, описывающий вещество и физические поля, окружающие черную дыру (и, возможно, падающие в нее), удовлетворяет слабому энергетическому условию. Тогда, по теореме о фокусировании, образующие горизонта событий, входящие в пучок, должны пересечься при конечном значении аффинного параметра. Чтобы согласовать этот результат с теоремой Пенроуза, приходится сделать вывод, что либо имеется физическая сингулярность на горизонте и образующие горизонта попадают в нее, прежде чем начнут пересекаться, либо неверно предположение, что площадь сечения пучка образующих может начать уменьшаться. Иными словами, предположение об отсутствии сингулярностей, на которые может натолкнуться горизонт событий, совместно со слабым энергетическим условием приводят к тому, что площадь сечения пучка образующих горизонта событий не убывает со временем. Хокинг (1971b, 1972a) доказал теорему, согласно которой площадь сечения пучка образующих не убывает со временем даже в том случае, если вместо предположения об отсутствии сингулярности на горизонте событий потребовать, что отсутствовали сингулярности, видимые с $\mathcal{J}^+$. Подобные (видимые с $\mathcal{J}^+$) сингулярности называют *голыми*. Условие отсутствия голых сингулярностей более строго формулируется как условие существования такой регулярной пространственноподобной поверхности Σ, что все причинные кривые, выходящие на $\mathcal{J}^+$ при продолжении их в прошлое, обязательно пересекают Σ. Существование такой поверхности гарантирует, что задание на ней начальных данных, полностью описывающих состояние частиц и полей однозначно определяет эволюцию системы в области, видимой с $\mathcal{J}^+$, а это эквивалентно отсутствию видимых с $\mathcal{J}^+$ сингулярностей. По терминологии Хокинга такие пространства называют *асимптотически предсказуемыми*.

Таким образом, если предположить, что отсутствуют сингулярности (либо на горизонте событий, либо вне его), то площадь сечения каждого пучка образующих горизонта событий не убывает со временем. С другой стороны, если на горизонте событий имеются каустики, где возникают новые пучки образующих, площадь сечения горизонта возрастает. Иными словами, сумма площадей $S_i(\tau)$ поверхностей черных дыр $\mathcal{B}_i(\tau)$ является неубывающей функцией "времени" τ. (Мы считаем, что $l^\mu \tau_{,\mu} < 0$, т.е. сечение горизонта событий в более поздний момент τ отвечает бо́льшим значениям аффинного параметра вдоль каждой образующей.) Аналогичный вывод о неубывании площади поверхности справедлив и для отдельно взятой черной дыры $\mathcal{B}_i(\tau)$. Эти результаты составляют содержание теоремы, доказанной Хокингом (1971b, 1972a) (рис. 55).

Обсудим кратко те предположения, в рамках которых эта теорема доказана. Таких предположений два: 1) отсутствие голых сингулярностей и 2) выполнимость слабого энергетического условия. В настоящее время имеется гипотеза, высказанная Пенроузом (1969) и получившая название "принципа космической цензуры", согласно которой при физически разум-

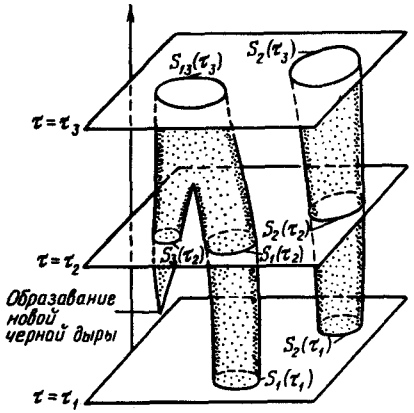

Рис. 55. Возможные процессы с черными дырами (иллюстрация к теореме Хокинга). Плоскости τ_1, τ_2, τ_3 обозначают пространственные сечения в соответствующие моменты времени; $S_a(\tau_i)$ – площадь черной дыры a в момент времени τ_i. Две черные дыры могут сливаться в одну, черные дыры могут возникать. Площадь поверхности одиночной черной дыры не убывает со временем. Теорема Хокинга утверждает, что общая площадь поверхностей черных дыр в момент времени τ является неубывающей функцией времени

ных предположениях относительно свойств вещества и полей голая (т.е. видимая удаленным наблюдателем) сингулярность не может образоваться в результате эволюции системы из регулярного начального состояния *). Другими словами, сингулярности, возможно, возникающие при эволюции таких систем, всегда оказываются скрытыми от отдаленного наблюдателя горизонтом событий.

В настоящее время доказательство этого принципа отсутствует. Трудности возникают уже при попытке более точного описания того, что следует понимать под сингулярностью **). Нетрудно привести примеры, когда при сферическом коллапсе вещества (пыли или жидкости) в результате негомологичности движения его слоев, вне горизонта событий образуются особые поверхности, на которых плотность вещества обращается в бесконечность [Йодзис и др. (1973, 1974), Кристодулу (1984)]. Возможно также появление бесконечной кривизны в случаях, когда сжатие звезды сопровождается излучением, уносящим ее массу, причем полное "выгорание" звезды происходит в момент ее сжатия в точку, а на всем этапе предыдущего сжатия ее поверхность находится вне гравитационного радиуса [горизонт событий в этом случае не образуется – Стейнмюллер и др. (1975), Лэйк, Хеллаби (1981), Курода (1984b)].

Подобные примеры, хотя формально и противоречат принципу космической цензуры, выглядят довольно искусственными. С другой стороны, численные расчеты коллапса звезд и анализ малых отклонений от сферической симметрии при коллапсе указывают на то, что в реальных физических условиях голые сингулярности действительно не возникают. Строгое доказательство принципа космической цензуры (а также точная формулировка условий, при которых он выполняется) является одной из важных

*) Иногда принцип космической цензуры в такой формулировке называют "слабым", чтобы отличить его от "сильного". Этот принцип, предложенный Пенроузом (1978), состоит в утверждении, что сингулярности, возникающие в результате гравитационного коллапса, в общем случае являются пространственноподобными и любой наблюдатель не может их увидеть до тех пор, пока не упадет в них.

**) Обсуждение вопроса о сингулярностях и ссылки на соответствующие работы см. § 5.6.

нерешенных задач физики черных дыр [см. обзор Израэля (1984), ссылки в нем, а также Кадерни, Кальвани (1979), Кальвани (1980), Гласс, Харпаз (1981), Янг (1979), Лэйк (1979), Израэль (1985)].

Что касается слабого энергетического условия, то необходимо подчеркнуть следующее: хотя при рассмотрении взаимодействий черной дыры с веществом и полями в рамках классической теории это условие, по-видимому, выполняется, учет квантовых эффектов может привести (и действительно приводит) к его нарушению*). Поэтому теорема Хокинга о возрастании площади поверхности черной дыры непосредственно применима лишь к процессам, при описании которых квантовыми эффектами можно пренебречь.

§ 5.5. Ловушечные поверхности, горизонты видимости, R- и T-области

Границей черной дыры является горизонт событий H^+. На первый взгляд определение черной дыры, как области внутри горизонта событий, вполне естественно. Однако, если рассмотреть процессы, которые могут происходить при возникновении черной дыры или в течение ее последующей эволюции, то станет ясным, что это определение в действительности описывает несколько не то, что вначале предполагалось.

В самом деле, представим себе, что в сферическую черную дыру массы M спустя некоторое время после ее образования падает сферическая оболочка массы ΔM (рис. 56). Казалось бы, до падения массы границей черной дыры был гравитационный радиус $r_{g,1} = 2M$, а после падения граница расширится и будет $r_{g,2} = 2(M + \Delta M)$. В действительности утверждение, что до падения ΔM границей черной дыры была поверхность $r_{g,1}$, неправильно. Ведь после падения ΔM внутрь сферы радиуса $r_{g,1}$ нулевые геодезические, шедшие вдоль $r_{g,1}$, под действием возросшего тяготения станут сходиться и уйдут в сингулярность (см. рис. 56). Эти геодезические не являются границей области, откуда лучи не уходят в бесконечность. Область эта шире, ее границей являются лучи A, показанные на рисунке. До падения массы ΔM они шли снаружи от $r_{g,1}$ и, удаляясь, несколько расходились. Если бы ΔM не упала, они бы ушли на бесконечть $\mathcal{J}^+$. Но падение ΔM устраняет их расходимость, заставляя идти вдоль $r_{g,2}$.

Таким образом, граница черной дыры H^+ определяется не только какими-то особенностями пространства-времени в данный момент (скажем, сильное поле в какой-то области), но и всей будущей историей (упадет ли масса ΔM или не упадет и т.д.). Задача нахождения горизонта событий H^+ является задачей с конечными, а не с начальными условиями.

Еще более разительна следующая ситуация. Вспомним процесс возникновения сферической черной дыры (рис. 57). Мы знаем, что H^+ (и, стало быть, черная дыра) возникает в момент τ_0, до того как звезда сожмется до гравитационного радиуса (до τ_1). Но представим себе, что в момент между τ_0 и τ_1 звезда взорвется и ее вещество разлетится в бесконечность,

*) Впервые на возможность нарушения теоремы Хокинга при квантовом рождении частиц в поле черной дыры обратил внимание Марков (1974).