ности, имеет место для стационарной сферически-симметричной черной дыры; см. рис. 61).

В общем случае лучи, выходящие ортогонально горизонту видимости $\partial T(\tau)$, обладают нулевой расходимостью. В силу уравнения (5.3.22) условие $\rho = 0$ сохраняется вдоль этих лучей до тех пор, пока они не пересекают область, где $\Phi > 0$ или $\sigma \neq 0$. В этой области ρ становится положительным и, следовательно, световые лучи покидают горизонт видимости, уходя в ловушечную область. Иными словами, внешняя граница T_--области является световой поверхностью в области, где $\sigma = 0$, $\Phi = 0$, и становится пространственноподобной поверхностью в области, где $\sigma \neq 0$ и (или) $\Phi > 0$ (см. рис. 61). При выполнении слабого энергетического условия вне горизонта видимости всегда имеется горизонт событий. Подчеркнем, однако, что внутри горизонта событий может, вообще говоря, и не быть внешних ловушечных поверхностей. С другой стороны, внутри одной черной дыры может находиться несколько связных компонент ловушечной области. Сказанное проиллюстрировано на рис. 62, где изображена сферически-симметричная черная дыра, которая некоторое время нестационарна из-за падения в нее вещества. Внутри границы $ABCDE$ (соответственно $AB'C'D'E'$), обозначенной точечным пунктиром, лежит T_--область. Внешняя граница каждой связной компоненты T_--области в сечении $\tau = \text{const}$ является горизонтом видимости. В сечении $\tau = \tau_1 = \text{const}$ внутри черной дыры (внутри H^+) нет T_--области (нет ловушечных поверхностей). Тем самым доказывается, что наличие ловушечных поверхностей внутри черной дыры в сечении $\tau = \text{const}$ не есть необходимое условие существования горизонта событий. В сечении $\tau = \tau_2 = \text{const}$ имеются две связные области T_-; при этом внутренний горизонт видимости есть $r = r_{g_1}$, а внешний — $r = r_{g_2}$. Подобная ситуация с образованием нескольких связных компонент T_--областей может возникнуть, например, при слиянии двух черных дыр.

В дальнейшем окажется полезным также следующее определение: замкнутая ориентируемая гладкая двумерная пространственноподобная поверхность называется *антиловушечной* (T_+-область), если оба семейства ортогональных к ней световых геодезических расходятся ($\rho < 0$). Появление T_+-областей характерно для случаев, когда имеются белые дыры (см. гл. 13). Область пространства-времени, лежащую вне T_+- и T_--областей, будем называть R-областью.

§ 5.6. Теоремы о сингулярности внутри черных дыр

При анализе сферического коллапса было отмечено, что по крайней мере в рамках общей теории относительности он неизбежно приводит к возникновению сингулярности. В процессе коллапса растут инварианты, характеризующие кривизну пространства-времени, и через конечное время по часам на коллапсирующем теле в его центре кривизна неограниченно вырастает. Это происходит, когда граница T_--области пересекает линию $r = 0$. Дальнейшее продолжение мировых линий частиц и лучей света, "достигших" образовавшейся сингулярности, оказывается невозможным, и поэтому неполнота пространства, связанная с обрыванием световых лучей и мировых линий на сингулярности при конечном значении аффинного параметра, является принципиально неустранимой.

При описании коллапса шара из пылевидного вещества в рамках обычной ньютоновской теории гравитации также возможна ситуация, когда плотность вещества и приливные силы неограниченно растут. Существенно, однако, что учет сил давления или малых отклонений от сферической симметрии принципиально изменяет ситуацию так, что максимальные значения плотности вещества и приливных сил (которые в ньютоновской теории аналогичны кривизне пространства-времени) становятся ограниченными. Таким образом, сингулярность в ньютоновской теории вырождена, неустойчива в том смысле, что возникает лишь в крайне специальной ситуации. Достаточно малых возмущений, и сингулярность исчезает.

О том, что ситуация в общей теории относительности существенно иная и развитие сингулярности внутри черных дыр неизбежно происходит при достаточно общих условиях, свидетельствует ряд строгих теорем.

Если предположить, что выполняется слабое энергетическое условие и возникла ловушечная поверхность (это означает, что имеется черная дыра), то площади поверхности фронта выходящего и входящего излучения уменьшаются. С другой стороны, поскольку скорость движения вещества не превосходит скорости света, между этими уменьшающимися поверхностями все время будет находиться то вещество, которое когда-либо попадало в эту область. Оно будет сжиматься, а его плотность возрастать. При этих условиях естественно ожидать возникновения сингулярности или какой-либо иной "неприятности".

О каких "неприятностях" может идти речь? Дело в том, что до сих пор под сингулярностью мы понимали бесконечную кривизну пространства-времени. Подобную бесконечность заведомо следует называть физической сингулярностью, ибо если какая-либо мировая линия частицы упирается в эту бесконечность, то, далее, линия принципиально не может быть продолжена. Существование частицы здесь обрывается. Однако этим особенности пространства-времени, которые следует называть сингулярностью, не исчерпываются, что связано с возможностью сложной топологии пространства-времени и индефинитностью его метрики. Рассмотрим, например, такую ситуацию. Пусть в некотором месте пространства-времени имеется бесконечная кривизна – сингулярность. Вырежем из пространства-времени эту сингулярность вместе с некоторой окрестностью. В оставшемся многообразии нет бесконечной кривизны. Следует ли оставшееся многообразие считать не имеющим сингулярности? Такое заключение было бы, конечно, неверным. Дело в том, что мировые линии, которые ранее упирались в бесконечную кривизну, теперь обрываются на границе вырезанной области. Это тоже физическая особенность, которую следует назвать сингулярностью. Принято называть сингулярностью не только бесконечную кривизну, но и любую конечную точку на мировой линии частицы (или фотона) или на времениподобной геодезической, если за эту точку нельзя в принципе продолжить эту линию. При этом конечная точка – сингулярность – должна лежать на конечном расстоянии или при конечном значении аффинного параметра для нулевой геодезической. Таким образом, в более общем случае сингулярность определяется как неполнота мировых линий в пространстве-времени [подробнее об этом см. Героч (1968); Шмидт (1971), Героч и др. (1972), Хокинг, Эллис (1973), Кларк (1973, 1975, 1976), Героч и др. (1982), Типлер и др. (1980)].

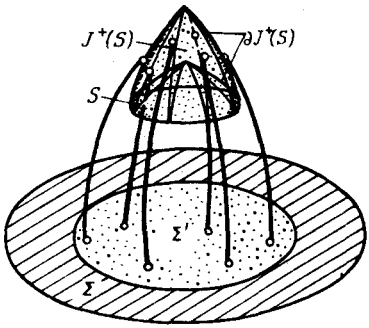

Рис. 63. Иллюстрация к доказательству теоремы Пенроуза о сингулярности внутри черной дыры

После данных разъяснений вернемся к обсуждению проблемы о неизбежности возникновения сингулярности внутри ловушечных поверхностей. Соответствующая теорема, доказанная Пенроузом (1965а), гласит:

Пусть выполнено слабое энергетическое условие и в пространстве-времени, допускающем некомпактную поверхность Коши Σ, имеется ловушечная поверхность S. Тогда такое пространство-время не может быть полным относительно световых геодезических. Иными словами, в таком пространстве найдется по крайней мере один световой луч, который нельзя продолжить и который обрывается при конечном значении аффинного параметра. А значит, имеется сингулярность согласно данному выше определению.

Идея доказательства теоремы состоит в следующем. Рассматривается множество $J^+(S)$ точек, которые соединимы с S причинной кривой, направленной в прошлое (рис. 63). Локальный анализ показывает, что там, где граница $\partial J^+(S)$ этого множества несингулярна, она светоподобна и образована отрезками световых геодезических, ортогонально пересекающих S в своих начальных точках. Если световые образующие $\partial J^+(S)$ имеют конечные точки, то эти точки совпадают с особенностями $\partial J^+(S)$ (каустиками или пересечениями). Далее, используя слабое энергетическое условие и сходимость образующих $\partial J^+(S)$ на поверхности S, можно доказать, что каждый из световых лучей, испущенных ортогонально S, обязательно выходит на каустику, причем это происходит при значении аффинного параметра, не превосходящем ρ_S^{-1}, где ρ_S – максимальное значение ρ на S для обоих семейств выходящих лучей. (Существование ρ_S гарантируется гладкостью и компактностью поверхности S.) Отсюда следует, что граница $\partial J^+(S)$ компактна, поскольку она образована компактной системой конечных замкнутых отрезков. Можно доказать, что $\partial J^+(S)$ является трехмерным многообразием без края. Заметим, что при доказательстве компактности $\partial J^+(S)$ существенно использовалось предположение, что пространство-время является полным относительно световых геодезических, так что не происходит обрыва образующих $\partial J^+(S)$ до выхода на каустику или точку пересечения.

Следующий этап доказательства состоит в установлении противоречия компактности $\partial J^+(S)$ и некомпактности поверхности Коши Σ, после чего становится очевидным, что сделанное предположение о полноте пространства-времени несовместно с остальными условиями теоремы.

Искомое противоречие устанавливается следующим образом. Можно показать, что в пространстве-времени с поверхностью Коши существует конгруэнция времениподобных кривых. Поскольку через каждую точку пространства проходит одна и только одна кривая конгруэнции и времениподобная кривая не может пересечь световую поверхность $\partial J^+(S)$ более одного раза, то с помощью этой конгруэнции можно установить взаимно однозначное непрерывное соответствие между $\partial J^+(S)$ и некоторым замкнутым подмножеством Σ' поверхности Σ. Σ' не может совпасть с Σ, поскольку, по предположению, Σ некомпактна. Следовательно, Σ' имеет границу в Σ, но это противоречит тому, что $\partial J^+(S)$ – многообразие без края. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы Пенроуза о сингулярности.

Следует подчеркнуть, что условие некомпактности поверхности Коши Σ использовалось лишь при доказательстве того, что Σ' не совпадает с Σ. Вместо этого можно было бы потребовать, что хотя бы одна времениподобная линия из конгруэнции не пересекала бы $\partial J^+(S)$.

Мы приведем здесь формулировку еще одной теоремы о сингулярностях (которая в определенном смысле является самой сильной из набора теорем такого рода), отсылая читателя, интересующегося точными формулировками, к работам Пенроуза (1968, 1979), Хокинга, Эллиса (1973), Мизнера, Торна, Уилера (1973), Уолда (1984), Типлера и др. (1980).

Теорема Хокинга–Пенроуза [Хокинг, Пенроуз (1970)]. Пространство-время M с необходимостью содержит неполные времениподобные или световые геодезические, которые невозможно продолжить, если выполнены следующие условия: 1) в пространстве-времени отсутствуют замкнутые времениподобные кривые; 2) для произвольного единичного времениподобного вектора u^μ выполняется неравенство $R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geqslant 0$; 3) для каждой времениподобной или световой геодезической с касательным вектором u^μ существует точка, в которой $u_{[\alpha}R_{\beta]\gamma\delta[\epsilon}u_{\rho]}u^\gamma u^\delta \neq 0$; 4) существует ловушечная поверхность.

Все эти условия представляются достаточно разумными и общими. Требование 1 отвечает нашему обычному представлению о причинности*). Условие 2 означает, что в любой физической системе отсчета плотность энергии ϵ неотрицательна и $\epsilon + 3p \geqslant 0$. Требование 3 эквивалентно тому, что рассматривается пространство-время общего вида, не обладающее какими-либо специальными симметриями. Условие 4, как уже отмечалось, тесным образом связано с существованием черной дыры. Теорема Пенроуза–Хокинга гарантирует возникновение сингулярности и в том случае, когда ловушечная поверхность возникает, например, в замкнутой Вселенной, где некомпактная поверхность Коши отсутствует, и поэтому теорема Пенроуза неприменима.

) Следует подчеркнуть, что наличие замкнутых времениподобных линий не противоречит принципу причинности в широком смысле. На замкнутой линии времени нельзя отделить будущее от прошлого, однако это само по себе еще не ведет ни к каким противоречиям [см. Зельдович, Новиков (1975)]. События на такой линии все "согласованы" друг с другом. Нельзя, как иногда говорят, изменить прошлое, зная будущее, так как все события вдоль линии времени уже, так сказать, "имеют место", их нельзя менять, они есть часть 4-мерного пространства-времени. Можно сказать и иначе: при наличии замкнутых линий времени неправильно говорить о влиянии будущего на прошлое, ибо эти понятия теряют смысл.