свободных параметра: масса $M$ $(l = 0)$ и угловой момент $J$ $(l = 1)$. Если коллапсирующее вещество обладало электрическим зарядом, то возникающая стационарная метрика однозначно определяется заданием трех параметров: $M, J$ и $Q$ (электрический заряд) *).

Уединенная стационарная черная дыра не может быть источником какого-либо массивного поля, поскольку для таких полей возможны все моды излучения, включая $l = 0$, и, согласно гипотезе Уилера, все они должны излучаться при переходе черной дыры в стационарное состояние. Аналогичное заключение должно иметь место и для скалярного безмассового поля.

Эти соображения означают, что гипотеза Уилера эквивалентна следующему утверждению: независимо от деталей коллапса, строения и свойств коллапсирующего тела возникающая стационарная черная дыра однозначно описывается геометрией, определяемой параметрами $M$, $J$ и $Q$. Это свойство стационарных черных дыр Уилер образно охарактеризовал следующим известным высказыванием: "Черные дыры не имеют волос".

К настоящему времени получено почти исчерпывающее доказательство гипотезы Уилера. В этой главе собраны основные результаты, связанные с этим доказательством.

## § 6.2. Общие свойства стационарных черных дыр

Поскольку имеются все основания считать, что при отсутствии внешних воздействий и в пренебрежении квантовыми эффектами конечное состояние любой черной дыры является стационарным, то, естественно при описании свойств этих конечных состояний начать с изучения стационарных черных дыр.

Свойство стационарности пространства-времени означает возможность так ввести в нем координаты, что коэффициенты метрики будут независимы от одной из них – "временной" координаты. На "более" геометрическом языке это означает, что пространство-время допускает однопараметрическую группу движений, генераторами которой является $\xi^\mu \partial_\mu$, где $\xi^\mu$ – векторное поле Киллинга, удовлетворяющее уравнению

$$\xi_{(\mu;\nu)} = 0. \tag{6.2.1}$$

Так как мы хотим, чтобы пространство-время не изменялось при сдвиге "по времени", то логично потребовать, чтобы вектор $\xi$ был времениподобным и $\xi \cdot \xi < 0$. В общем случае, однако, нельзя гарантировать, что $\xi \cdot \xi$ имеет один и тот же знак во всем пространстве-времени. Поэтому мы будем называть асимптотически плоское пространство стационарным, если оно допускает векторное поле Киллинга $\xi^\mu$, являющееся времениподобным $(\xi \cdot \xi < 0)$ в окрестности $\mathcal{J}^+$ и $\mathcal{J}^-$.

Для доказательства содержательных утверждений относительно общих свойств стационарых черных дыр приходится дополнительно сделать два следующих предположения:

1) пространство-время является регулярно предсказуемым;

---

*) Если в природе существуют магнитные монополи и коллапсирующее тело обладает магнитным зарядом, то для описания стационарной черной дыры требуется задание величины этого заряда в качестве четвертого параметра.

2) пространство-время либо является пустым, либо содержит поля, описываемые гиперболическими уравнениями и удовлетворяющие условию энергодоминантности: для произвольных времениподобных векторов $\xi_1^\mu$ и $\xi_2^\mu$ тензор энергии-импульса поля $T^{\mu\nu}$ удовлетворяет неравенству $T^{\mu\nu}\xi_{1\mu}\xi_{2\nu} \geqslant 0$.

Первое предположение, касающееся общей причинной структуры пространства-времени и подробно обсуждавшееся в предыдущей главе (см. сноску на с. 102), имеет в известной мере технический характер. Условие энергодоминантности (из которого, в частности, следует слабое энергетическое условие) означает следующее: любой наблюдатель видит, что локальная энергия неотрицательна, а локальный поток энергии непространственноподобен. Второе предположение заведомо выполняется для электромагнитного поля [более подробное обсуждение см. Хокинг, Эллис (1973)]. В дальнейшем (в данной главе), не оговаривая этого особо, будем считать, что приведенные выше предположения выполняются.

В стационарном пространстве-времени площадь поверхности черной дыры не зависит от времени. Поэтому сходимость $\rho$ световых лучей, образующих горизонт событий, тождественно равна нулю. Вследствие этого горизонт видимости совпадает с горизонтом событий. Используя соотношения (5.3.20), (5.3.22) и (5.3.23), нетрудно убедиться, что следствием слабого энергетического условия ($\Phi \geqslant 0$) и постоянства площади поверхности черной дыры является обращение в нуль на поверхности горизонта величин $\sigma$, $\Phi$ и $\Psi$:

$$\sigma|_{H^+} = 0, \quad \Phi|_{H^+} = 0, \quad \Psi|_{H^+} = 0. \tag{6.2.2}$$

Последние два равенства можно интерпретировать как отсутствие потоков вещества и физических полей ($\Phi = 0$) и гравитационного излучения ($\Psi = 0$) через горизонт событий.

Каждая связная компонента горизонта $\partial\mathcal{B}(\tau)$ в заданный момент $\tau$ в стационарном пространстве-времени, так же как и в общем случае, является компактной и односвязной. Более того, как показал Хокинг (1972а), в стационарном случае топология поверхности каждой черной дыры совпадает с топологией двумерной сферы $S^2$. Топологии поверхности черной дыры, отличные от $S^2$, возможны в случае, если нарушается условие энергодоминантности [Героч, Хартль (1982)].

В принципе не исключен случай, когда в стационарном пространстве-времени имеется несколько связных компонент $\partial\mathcal{B}(\tau)$ и соответственно несколько "неподвижных" черных дыр. Такое равновесие возможно только, если гравитационное притяжение скомпенсировано электромагнитным отталкиванием (или отталкиванием силами другой природы). В частности, если имеется несколько заряженных черных дыр, обладающих массами $m_i$ и зарядами $Q_i$, удовлетворяющими соотношению $m_i = Q_i\sqrt{G}$, то система таких черных дыр будет находиться в равновесии [Хартль, Хокинг (1972), Охта, Кимура (1982)].

В дальнейшем мы будем рассматривать тот случай, когда имеется лишь одна стационарная черная дыра, и ограничим рассмотрение областью пространства-времени, лежащей вне этой черной дыры. В общем случае полное пространство-время стационарной черной дыры наряду с горизонтом событий $H^+$ может содержать также горизонт событий прошлого $H^- = J^+(\mathcal{J}^-)$

(в этом нетрудно убедиться на примере шварцшильдовской черной дыры, диаграмма Пенроуза которой для полного пространства-времени приведена на рис. 50с). Область $J^+(\mathcal{J}^-) \cap J^-(\mathcal{J}^+)$ пространства-времени, лежащая вне $H^-$ и $H^+$, называется *внешней*. Для событий, происходящих во внешней области, характерно то свойство, что найдутся причинные кривые, связывающие их как с $\mathcal{J}^-$, так и с $\mathcal{J}^+$. Можно доказать [см., например, Хокинг, Эллис (1973)], что в стационарном пространстве векторное поле Киллинга $\xi$ отлично от нуля во всей внешней области и на части $H^+ \cap J^+(\mathcal{J}^-)$ горизонта событий.

Для более детального описания свойств стационарных пространств удобно ввести в рассмотрение следующий дифференциальный инвариант $\omega^\alpha$, связанный с векторным полем Киллинга $\xi^\mu$ соотношением

$$\omega^\alpha = \xi_{\mu;\nu}\xi_\lambda e^{\mu\nu\lambda\alpha}, \tag{6.2.3}$$

где $e^{\mu\nu\lambda\alpha}$ — полностью антисимметричный тензор. Стационарное пространство называют *статическим*, если $\omega^\alpha = 0$. Обращение $\omega^\alpha$ в нуль, согласно теореме Фробениуса, является необходимым и достаточным условием того, что векторное поле $\xi^\mu$ ортогонально некоторой поверхности. Иными словами, если $\omega^\alpha = 0$, то найдутся две скалярные функции $\alpha$ и $t$ такие, что выполняется равенство

$$\xi_\mu = \alpha t_{,\mu}. \tag{6.2.4}$$

В области, где $\xi^\mu \neq 0$, можно использовать $t$ в качестве одной из координат (временной координаты), дополнив ее тремя другими $x^i$. Удобно выбрать координаты $x^i$ следующим образом. Зафиксируем произвольную поверхность $t = \text{const}$, введем на ней координаты $x^i$ и распространим их на все пространство, потребовав, чтобы они были постоянными вдоль интегральных кривых $\xi^\mu$. Метрика статического пространства в подобных координатах имеет вид

$$ds^2 = -V^2 dt^2 + h_{ij}dx^i dx^j. \tag{6.2.5}$$

Используя уравнение Киллинга (6.2.1), нетрудно убедиться, что $\partial_t h_{ij} = 0$, а координатный произвол $t \to t' = f(t)$ можно использовать, чтобы добиться выполнения следующих соотношений:

$$\alpha = V^2 = -\xi_\mu \cdot \xi^\mu, \qquad \partial_t V = 0, \qquad \xi^\mu \partial_\mu = \partial_t. \tag{6.2.6}$$

Оставшийся после этого произвол в выборе координат отвечает преобразованиям

$$t \to t' = t + t_0, \qquad x^i \to x'^i = f^i(x^j). \tag{6.2.7}$$

Заметим, что поскольку $V$ и $h_{ij}$ не зависят от $t$, то метрика (6.2.5) оказывается инвариантной также относительно преобразования $t \to -t$. Верно и обратное, а именно, всякая стационарная метрика, допускающая дополнительную симметрию обращения времени $t \to -t$, является статической.

Важным свойством статических черных дыр является то, что во всей их внешней области векторное поле Киллинга $\xi^\mu$ времениподобно, а на части горизонта событий $H^+ \cap J^+(\mathcal{J}^-)$, ограничивающей внешнюю область, $\xi^\mu$ отлично от нуля, светоподобно и направлено вдоль образующих $H^+$. Последнее свойство легко доказать следующим образом. Используя равенство

$\xi_{[\mu;\nu}\xi_{\alpha]} = 0$, вытекающее из условия $\omega^\alpha = 0$, и соотношение (6.2.1), имеем

$$2\xi_{\alpha;[\mu}\xi_{\nu]} = -\xi_{\mu;\nu}\xi_\alpha. \tag{6.2.8}$$

С помощью этого равенства нетрудно убедиться, что

$$(V^2)_{;[\mu}\xi_{\nu]} = -V^2\xi_{\mu;\nu} \tag{6.2.9}$$

и, следовательно, поверхность $V^2 = 0$ является световой, так как нормаль к ней $((V^2)_{;\mu})$ совпадает на ней по направлению со световым вектором $\xi^\mu$. Поскольку $(V^2)_{;\mu}$ и $\xi_\mu$ параллельны, то

$$-\frac{1}{2}(V^2)^{;\mu} = \xi^{\mu;\nu}\xi_\nu = \kappa\xi^\mu \tag{6.2.10}$$

и, следовательно, $\xi^\mu$ – касательный вектор к световой геодезической (образующей поверхности $V^2 = 0$). Эти световые геодезические не выходят на $\mathcal{J}^+$, поскольку все время находятся на поверхности, где $\xi_\mu\xi^\mu = 0$, в то время как у $\mathcal{J}^+$ $\xi_\mu\xi^\mu = -1$. С другой стороны, расходимость световых образующих поверхности $V = 0$ равна нулю. Это означает, что такая поверхность является внешней ловушечной поверхностью, а поскольку пространство-время стационарно, то одновременно она является горизонтом событий [Вишвешвара (1968)].

Если стационарная черная дыра не является статической, то векторное поле Киллинга $\xi^\mu$ неизбежно становится пространственноподобным в некоторой части внешней области [Хокинг, Эллис (1973)]. Эта область, где $\xi^2 > 0$, получила название *эргосферы*.

Возникновение эргосферы вне нестатической стационарной черной дыры приводит к ряду важных физических следствий. Более подробно эти следствия обсуждаются в последующих главах. Сейчас мы остановимся лишь на одном из них. Напомним, что, согласно теореме Нетер, симметриям пространства-времени отвечают законы сохранения определенных физических величин. В частности, однородности во времени отвечает закон сохранения энергии. Для частицы, движущейся в стационарном пространстве-времени с векторным полем Киллинга $\xi^\mu$, эта сохраняющаяся величина (энергия) $\epsilon$ записывается следующим образом*):

$$\epsilon = -p^\mu\xi_\mu, \tag{6.2.11}$$

где $p^\mu$ – 4-импульс частицы. Поскольку $p^\mu$ – направленный в будущее времениподобный или световой вектор, то для частиц вне эргосферы $\epsilon \geqslant 0$. Однако для частиц или лучей света, находящихся в эргосфере, возможно выполнение обратного неравенства $\epsilon < 0$. Такие частицы, очевидно, могут покинуть эргосферу, только провалившись внутрь черной дыры. Это возможно лишь в том случае, если эргосфера пересекает горизонт событий.

Наличие состояний с отрицательной энергией $\epsilon$ в эргосфере делает возможным следующий механизм извлечения энергии из стационарных нестатических черных дыр, предложенный Пенроузом (1969). Представим себе

---

*) Сохранение $\epsilon$ ($p^\nu\epsilon_{,\nu} = 0$) вытекает из соотношения $p^\nu\epsilon_{,\nu} = p^\nu p^\mu{}_{;\nu}\xi_\mu + p^\mu p^\nu\xi_{\mu;\nu}$, геодезичности движения $p^\nu p^\mu{}_{;\nu} = 0$ и уравнения Киллинга (6.2.1).

(рис. 64), что частица с импульсом $p_0^\mu$, попав в эргосферу, распадается там на пару частиц с импульсами $p_1^\mu$ и $p_2^\mu$ $(p_0^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu)$, так что $\epsilon_2 = -p_2^\mu \xi_\mu < 0$, а частица с импульсом $p_1^\mu$ вылетает обратно. Тогда энергия вылетающей частицы $\epsilon_1 = -p_1^\mu \xi_\mu = \epsilon_0 - \epsilon_2$ будет больше энергии падающей частицы $\epsilon_0 = -p_0^\mu \xi_\mu$, что и означает возможность извлечения энергии в этом процессе.

Существенное отличие свойств черных дыр с $\omega^\mu = 0$ и $\omega^\mu \neq 0$ связано с тем, что нестатические стационарные черные дыры в известном смысле

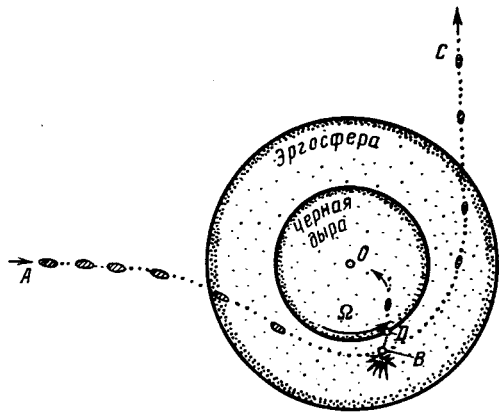


Рис. 64. Процесс Пенроуза. Тело, падающее с некоторого расстояния (положение $A$), влетает в эргосферу вращающейся черной дыры и, взрываясь, распадается в точке $B$ около поверхности черной дыры на две части, одна из которых поглощается черной дырой – точка $D$ (параметры "взрыва" выбраны так, что энергия этой части отрицательна). Другая часть вылетает из эргосферы (точка $C$), обладая энергией, большей, чем энергия падающего тела

обладают вращением. Появление отрицательных энергий при движении частиц в поле вращающейся черной дыры можно объяснить, если принять во внимание дополнительное гравитационное взаимодействие углового момента этой частицы с угловым моментом вращающейся черной дыры. Энергия, сообщаемая вылетающей в процессе Пенроуза частице, черпается из энергии вращения черной дыры.

После этих замечаний возвратимся к обсуждению общих свойств стационарных черных дыр и рассмотрим вопрос о взаимном расположении эргосферы и горизонта событий. В принципе возможна ситуация, когда эргосфера не пересекается с горизонтом и целиком лежит вне его. Однако, по-видимому, эта ситуация неустойчива [Хокинг, Эллис (1973)]. Поэтому мы сделаем предположение, что в стационарном пространстве-времени, описывающем конечное состояние черной дыры, эргосфера пересекает горизонт. Это означает, что на горизонте событий имеются точки, где векторное поле Киллинга $\xi^\mu$ пространственноподобно. Покажем, что в этом случае черная дыра обязательно является аксиально-симметричной.

Пусть $S_0$ – поверхность черной дыры в некоторый момент времени. Как указывалось выше, для стационарной черной дыры $S_0$ имеет топологию двумерной сферы $S^2$. Обозначим через $S_v$ сечения горизонта событий,

возникающие путем сдвига точек $S_0$ вдоль интегральных кривых $x^\mu(v)$ поля $\xi^\mu$ $(dx^\mu/dv = \xi^\mu)$ на величину, отвечающую параметру $v$ (рис. 65). Пусть точка $p_0 \in S_0$ при этом переходит в точку $p_v^\xi \in S_v$. Обозначим через $p_v^l$ точку пересечения образующей горизонта событий, проходящей через $p_0$, с $S_v$. Поскольку $l^\mu$ и $\xi^\mu$ непараллельны, то отображение $p_v \to p_v^\xi$ является нетривиальным преобразованием $S_v$ в себя. Обращение в нуль сходимости $\rho$ и сдвига $\sigma$ на горизонте событий стационарной черной дыры приводит к тому, что расстояние между любой парой точек $p_v^l$ и $q_v^l$ на $S_v$ совпадает с расстоянием между отвечающими им точками $p_0$ и $q_0$ на $S_0$. С другой стороны, поскольку $\xi^\mu$ – векторное поле Киллинга, то это расстояние совпадает также с расстоянием между $p_v^\xi$ и $q_v^\xi$. Тем самым преобразование $p_v^l \to p_v^\xi$ является преобразованием симметрии, переводящим поверхность $S_v$ в себя. Поскольку $S_v$ имеет топологию сферы $S^2$, то под действием описанной группы изометрий все ее точки, за исключением двух ("полюсов"), движутся, причем их орбиты – замкнутые окружности. Иными словами, поверхность стационарной нестатической черной дыры аксиально-симметрична. Если метрика, описывающая стационарую черную дыру, является аналитической*), то из аксиальной симметрии горизонта событий вытекает аксиальная симметрия всего пространства-времени. Этот результат составляет содержание следующей теоремы, доказанной Хокингом (1972а).

Пусть эргосфера в стационарном нестатическом пространстве имеет пересечение с горизонтом событий $H^+ \cap J^+(\mathcal{J}^-)$. Тогда существует однопараметрическая циклическая группа изометрий, генераторы которой коммутируют с $\xi^\mu$ и орбиты которой пространственноподобны вблизи $\mathcal{J}^+$ и $\mathcal{J}^-$.

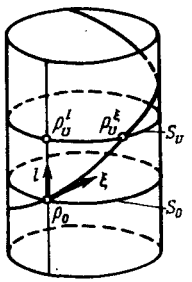


Рис. 65. Стационарная вращающаяся черная дыра является аксиально-симметричной. Иллюстрация к доказательству теоремы Хокинга

Эта теорема справедлива и в тех случаях, когда метрика неаналитична в изолированных областях вне горизонта.

В заключение параграфа подведем краткий итог. Итак, конечное состояние одиночной черной дыры описывается стационарной метрикой. При этом либо черная дыра не вращается и эта метрика статична, либо она вращается, тогда пространство-время обладает дополнительной аксиальной симмет-

*) О свойствах аналитичности стационарных аксиально-симметричных асимптотически плоских решений уравнений Эйнштейна см. Мюллер цум Хаген (1970).

рией. Следующие два параграфа посвящены доказательству так называемых *теорем единственности*, согласно которым как статические, так и нестатические стационарные черные дыры устроены относительно просто. А именно, будут рассмотрены стационарные решения уравнений Эйнштейна–Максвелла и показано, что все такие решения, описывающие стационарную черную дыру, сводятся к метрике Керра–Ньюмена (6.4.33); при этом, если вращение отсутствует, соответствующее решение сводится к решению Рейсснера–Нордстрема. Обсуждение роли остальных физических полей и их "волос" мы отложим до последнего параграфа этой главы.

## § 6.3. Теорема единственности для статических черных дыр

Обсудим вопрос о статических решениях вакуумных уравнений Эйнштейна. Выберем координаты в статическом пространстве-времени так, как было указано выше, и запишем статическую метрику в форме (6.2.5):

$$ds^2 = -V^2 dt + h_{ij}\, dx^i dx^j,$$
$$i = 1, 2, 3; \quad V = V(x^1, x^2, x^3); \quad h_{ij} = h_{ij}(x^1, x^2, x^3). \tag{6.3.1}$$

Обозначим через ${}^{(3)}R_{ij}$ тензор Риччи трехмерного пространства $\Sigma$, описываемого уравнением $t = \text{const}$ и обладающего метрикой $h_{ij}$. Тогда вакуумные уравнения Эйнштейна эквивалентны следующим уравнениям:

$$h^{ij} V_{:ij} = 0, \tag{6.3.2а}$$
$$V_{:ij} - {}^{(3)}R_{ij} V = 0. \tag{6.3.2в}$$

Здесь $(\quad)_{:i}$ обозначает ковариантную производную в метрике $h_{ij}$.

Предположим, что рассматриваемое пространство-время с метрикой (6.3.1): 1) является асимптотически плоским, 2) обладает горизонтом событий и 3) не содержит сингулярностей, лежащих вне или на горизонте событий.

Более детально эти предположения означают следующее:

1) Пространство $\Sigma$ является асимптотически евклидовым, т.е. существует такой выбор координат $x^i$, в которых

$$h_{ij} = \delta_{ij} + O(r^{-1}), \quad \partial_k h_{ij} = O(r^{-2}), \quad V = 1 - M/r + \eta,$$
$$M = \text{const}, \quad \eta = O(r^{-2}), \quad \partial_i \eta = O(r^{-3}), \quad \partial_i \partial_j \eta = O(r^{-4}) \tag{6.3.3}$$

при $r \equiv (\delta_{ij} x^i x^j)^{1/2} \to \infty$.

2) Функция $V$ обращается в нуль на $\Sigma$, причем множество $V(x^i) = 0$ является связной регулярной гладкой поверхностью.

Строго говоря, точки, где $V = 0$, не покрываются координатами $t, x^1, x^2, x^3$, поскольку в этих координатах метрика (6.3.1) имеет особенность. Предположение о существовании регулярного горизонта событий означает, что имеется возможность с помощью перехода к новым координатам получить продолжение метрики на часть пространства-времени, содержащую горизонт событий. Поверхность $V = 0$ можно рассматривать как границу $\Sigma$, возникающую в результате предельного перехода $V = \delta = \text{const}$ при $\delta \to +0$. Функция $V$ удовлетворяет эллиптическому уравнению $V_{:i}{}^{:i} = 0$ и, следовательно, является гармонической. Поскольку при $r \to \infty$ $V = 1$, то при