рией. Следующие два параграфа посвящены доказательству так называемых *теорем единственности*, согласно которым как статические, так и нестатические стационарные черные дыры устроены относительно просто. А именно, будут рассмотрены стационарные решения уравнений Эйнштейна–Максвелла и показано, что все такие решения, описывающие стационарную черную дыру, сводятся к метрике Керра–Ньюмена (6.4.33); при этом, если вращение отсутствует, соответствующее решение сводится к решению Рейсснера–Нордстрема. Обсуждение роли остальных физических полей и их "волос" мы отложим до последнего параграфа этой главы.

§ 6.3. Теорема единственности для статических черных дыр

Обсудим вопрос о статических решениях вакуумных уравнений Эйнштейна. Выберем координаты в статическом пространстве-времени так, как было указано выше, и запишем статическую метрику в форме (6.2.5):

$$ds^2 = -V^2 dt + h_{ij}\, dx^i dx^j,$$
$$i = 1, 2, 3; \quad V = V(x^1, x^2, x^3); \quad h_{ij} = h_{ij}(x^1, x^2, x^3). \tag{6.3.1}$$

Обозначим через ${}^{(3)}R_{ij}$ тензор Риччи трехмерного пространства Σ, описываемого уравнением $t = \text{const}$ и обладающего метрикой h_{ij}. Тогда вакуумные уравнения Эйнштейна эквивалентны следующим уравнениям:

$$h^{ij} V_{:ij} = 0, \tag{6.3.2а}$$
$$V_{:ij} - {}^{(3)}R_{ij} V = 0. \tag{6.3.2в}$$

Здесь $(\quad)_{:i}$ обозначает ковариантную производную в метрике h_{ij}.

Предположим, что рассматриваемое пространство-время с метрикой (6.3.1): 1) является асимптотически плоским, 2) обладает горизонтом событий и 3) не содержит сингулярностей, лежащих вне или на горизонте событий.

Более детально эти предположения означают следующее:

1) Пространство Σ является асимптотически евклидовым, т.е. существует такой выбор координат x^i, в которых

$$h_{ij} = \delta_{ij} + O(r^{-1}), \quad \partial_k h_{ij} = O(r^{-2}), \quad V = 1 - M/r + \eta,$$
$$M = \text{const}, \quad \eta = O(r^{-2}), \quad \partial_i \eta = O(r^{-3}), \quad \partial_i \partial_j \eta = O(r^{-4}) \tag{6.3.3}$$

при $r \equiv (\delta_{ij} x^i x^j)^{1/2} \to \infty$.

2) Функция V обращается в нуль на Σ, причем множество $V(x^i) = 0$ является связной регулярной гладкой поверхностью.

Строго говоря, точки, где $V = 0$, не покрываются координатами t, x^1, x^2, x^3, поскольку в этих координатах метрика (6.3.1) имеет особенность. Предположение о существовании регулярного горизонта событий означает, что имеется возможность с помощью перехода к новым координатам получить продолжение метрики на часть пространства-времени, содержащую горизонт событий. Поверхность $V = 0$ можно рассматривать как границу Σ, возникающую в результате предельного перехода $V = \delta = \text{const}$ при $\delta \to +0$. Функция V удовлетворяет эллиптическому уравнению $V_{:i}{}^{:i} = 0$ и, следовательно, является гармонической. Поскольку при $r \to \infty$ $V = 1$, то при

конечных r вне горизонта она принимает положительные значения, меньшие 1 [о соответствующем свойстве гармонических функций см., например, Яно, Бохнер (1953)].

3) Всюду на Σ (при $0 \leqslant V < 1$) инвариант $\mathcal{R}^2 = R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}$, построенный из четырехмерного тензора кривизны, конечен.

Теорема единственности для статических черных дыр в пустоте гласит:

Всякое статическое решение вакуумных уравнений Эйнштейна, удовлетворяющее условиям 1–3, является сферически-симметричным и совпадает с метрикой Шварцшильда.

Эта теорема при дополнительном условии: 4) эквипотенциальные поверхности $V = \text{const} > 0$ являются регулярными односвязными двумерными замкнутыми поверхностями, была доказана Израэлем (1967). Позднее [см. Мюллер цум Хаген и др. (1973), Робинсон (1977)] было доказано, что это условие, означающее, в частности, что $V_{,\alpha} \neq 0$ всюду при $0 \leqslant V < 1$, вытекает из условий 1–3.

Основные этапы доказательства теоремы Израэля состоят в следующем. Выбирают функцию V $(V_{,\alpha} \neq 0)$ в качестве координаты. Оставшиеся две координаты θ^2 и θ^3 на поверхностях $V = \text{const}$ выбирают так, чтобы координатные линии V ортогонально пересекали поверхности $V = \text{const}$. В этих координатах метрика (6.3.1) записывается в виде

$$ds^2 = -V^2 dt^2 + \rho^2 dV + b_{XY} d\theta^X d\theta^Y, \tag{6.3.4}$$

где $X, Y = 2, 3$, ρ и b_{XY} являются функциями V, θ^2, θ^3, а уравнение (6.3.2a) принимает вид

$$\partial_V \left(\frac{\sqrt{b}}{\rho} \right) = 0, \quad b = \det(b_{XY}). \tag{6.3.5}$$

Определим двумерный тензор внешней кривизны K_{XY} поверхности $V = \text{const}$ соотношением

$$K_{XY} = \frac{1}{2\rho} \frac{\partial b_{XY}}{\partial V}. \tag{6.3.6}$$

Для следа этого тензора $K = b^{XY} K_{XY}$ можно получить выражение $K = \rho^{-1} \partial(\ln \sqrt{b})/\partial V$, которое с учетом (6.3.5) дает

$$\frac{\partial \rho}{\partial V} = \rho^2 K. \tag{6.3.7}$$

Можно показать, что уравнение (6.3.2b) эквивалентно выполнению следующих равенств:

$$\left(\frac{\partial}{\partial V} + \frac{1}{V} \right) K_X{}^Y = -\rho_{|X}{}^{|Y} + \frac{1}{2} \rho\, {}^{(2)}R\, \delta_X^Y - \rho K K^Y{}_X, \tag{6.3.8}$$

$${}^{(2)}R = -K_{XY} K^{XY} + K^2 + \frac{2K}{\rho V}, \tag{6.3.9}$$

$$\partial_X \rho = \rho^2 V (\partial_X K - K_X{}^Y{}_{|Y}), \tag{6.3.10}$$

где ${}^{(2)}R$ – скалярная кривизна двумерной поверхности $V = \text{const}$, а $(\ )_{|X}$

означает ковариантную производную в метрике b_{XY}. Уравнения (6.3.5), (6.3.6) и (6.3.8) позволяют определить зависимость от V неизвестных функций ρ, b_{XY} и K_{XY}, а (6.3.9) и (6.3.10) играют роль связей: если они выполняются при одном значении V, то, в силу остальных уравнений, выполняются при всех V.

Следующий этап состоит в нахождении условий, которые налагает на неизвестные функции предположение 3. С этой целью запишем инвариант $\mathcal{R}^2 = R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ в обозначениях ρ, b_{XY} и K_{XY}:

$$\frac{1}{8}\,\mathcal{R}^2 = (V\rho)^{-2}\left(K_{XY}K^{XY} + \frac{2\rho_{|X}\rho^{|X}}{\rho^2} + K^2\right). \tag{6.3.11}$$

Из уравнения (6.3.5) следует, что $\sqrt{b} = c(x^Y)\rho$, и поэтому из регулярности поверхности $V = 0$ следует, что $\rho(V = 0, \theta^2, \theta^3) \neq 0$, а из регулярности $\mathcal{R}^2$ при $V = 0$ находим

$$K_{XY}(V = 0, \theta^2, \theta^3) = 0, \quad \rho(V = 0, \theta^2, \theta^3) = \rho_0 = \text{const},$$

$$\lim_{V \to 0} (K/V) = \frac{1}{2}\rho_0\, {}^{(2)}R(V = 0, \theta^2, \theta^3). \tag{6.3.12}$$

Если обозначить через $A_0 = \int\limits_{V=0} \sqrt{b}\, d\theta^2 d\theta^3$ площадь поверхности черной дыры, то, интегрируя (6.3.5) по V от 0 до 1, с учетом граничных условий (6.3.3) и (6.3.12) имеем

$$A_0 = 4\pi M\rho_0. \tag{6.3.13}$$

Отсюда вытекает, в частности, что M всегда положительно.

С помощью уравнений (6.3.5) и (6.3.7)–(6.3.9) можно получить следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\sqrt{b}\,K}{\sqrt{\rho}\,V}\right) = -\frac{2\sqrt{b}}{V}\left[{}^{(2)}\Delta(\rho^{1/2}) + \rho^{-3/2}\left(\frac{1}{2}\rho_{|X}\rho^{|X} + \Psi_{XY}\Psi^{XY}\right)\right], \tag{6.3.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{\sqrt{b}}{\rho}\left(KV + \frac{4}{\rho}\right)\right] = -\sqrt{b}\,V[{}^{(2)}\Delta(\ln\rho) + \rho^{-2}(\rho_{|X}\rho^{|X} + 2\Psi_{XY}\Psi^{XY}) + {}^{(2)}R], \tag{6.3.15}$$

где ${}^{(2)}\Delta \equiv (\ )_{|X}{}^{|X}$ и $\Psi_{XY} = \left(K_{XY} - \frac{1}{2}Kb_{XY}\right)\rho$.

Последний этап доказательства состоит в интегрировании соотношений (6.3.14) и (6.3.15) по V от 0 до 1. Если учесть граничные условия (6.3.3) и (6.3.12) и использовать тождество

$$\int\limits_{V=\text{const}} {}^{(2)}\Delta f\sqrt{b}\, d\theta^2 d\theta^3 = 0, \tag{6.3.16}$$

справедливое для произвольной функции f, и теорему Гаусса – Бонне:

$$\int\limits_{V=\text{const}} {}^{(2)}R\sqrt{b}\, d\theta^2 d\theta^3 = 8\pi, \tag{6.3.17}$$

то получаем неравенства

$$\rho_0 \geqslant 4M, \quad A_0 \geqslant \pi\rho_0^2, \tag{6.3.18}$$

причем равенства имеют место тогда и только тогда, когда везде на Σ

$$\Psi_{XY} = 0, \qquad \rho_{|X} = 0. \tag{6.3.19}$$

Сравнивая (6.3.18) с (6.3.13), нетрудно убедиться, что эти соотношения не противоречат друг другу только в том случае, если в (6.3.18) всюду стоят знаки равенства, а следовательно, выполнены соотношения (6.3.19). Эти соотношения показывают, что рассматриваемое вакуумное решение уравнений Эйнштейна является сферически-симметричным, т.е. в соответствии с теоремой Биркгофа (1923) совпадает с решением Шварцшильда.

Аналогичная теорема единственности имеет место в случае, если отказаться от условия выполнения вакуумных уравнений Эйнштейна, заменив их системой уравнений Эйнштейна – Максвелла. В этой ситуации черная дыра может обладать зарядом, соответствующее единственное решение сферически-симметрично и совпадает с метрикой Рейсснера – Нордстрема [Израэль (1968)].

§ 6.4. Теорема единственности для стационарных аксиально-симметричных черных дыр

Перейдем теперь к обсуждению свойств решений уравнений Эйнштейна – Максвелла, описывающих стационарные аксиально-симметричные черные дыры. В подобных пространствах наряду с векторным полем Киллинга $\xi^{\mu}_{(t)}$, нормированным на бесконечности условием $\xi^{\mu}_{(t)} \cdot \xi_{(t)\mu} = -1$, имеется также пространственноподобное векторное поле Киллинга $\xi^{\mu}_{(\varphi)}$, отвечающее симметрии пространства относительно вращения. Это поле коммутирует с $\xi^{\mu}_{(t)}$ и обладает замкнутыми интегральными кривыми. Поле $\xi^{\mu}_{(\varphi)}$ отлично от нуля всюду во внешней области и на горизонте, кроме оси вращения, на которой $\xi^{\mu}_{(\varphi)} = 0$. Если обозначить $X = \xi^{\mu}_{(\varphi)}\xi_{(\varphi)\mu}$, то условие регулярности (локальной евклидовости) пространства-времени на оси вращения выполняется, когда

$$\left.\frac{X^{,\alpha}X_{,\alpha}}{4X}\right|_{X=0} = 1. \tag{6.4.1}$$

Векторные поля $\xi^{\mu}_{(t)}$ и $\xi^{\mu}_{(\varphi)}$ с описанными выше свойствами, включая условие нормировки (6.4.1), определены в стационарном аксиально-симметричном асимптотически плоском пространстве однозначно.

В таком пространстве можно ввести координаты t, φ, x^X $(X = 1, 2)$ так, что выполняются соотношения

$$ds^2 = -V\,dt^2 + 2W\,d\varphi\,dt + X\,d\varphi^2 + 2g_{0X}dx^X dt + \\ + 2g_{\varphi X}dx^X d\varphi + \gamma_{XY}dx^X dx^Y, \tag{6.4.2}$$

где

$$V = -\xi^{\alpha}_{(t)}\xi_{(t)\alpha}, \qquad X = \xi^{\alpha}_{(\varphi)}\xi_{(\varphi)\alpha}, \qquad W = \xi^{\alpha}_{(t)}\xi_{(\varphi)\alpha},$$

$$\xi^{\alpha}_{(t)} = \delta^{\alpha}_{t}, \qquad \xi^{\alpha}_{(\varphi)} = \delta^{\alpha}_{\varphi}, \tag{6.4.3}$$