причем равенства имеют место тогда и только тогда, когда везде на Σ

$$\Psi_{XY} = 0, \qquad \rho_{|X} = 0. \tag{6.3.19}$$

Сравнивая (6.3.18) с (6.3.13), нетрудно убедиться, что эти соотношения не противоречат друг другу только в том случае, если в (6.3.18) всюду стоят знаки равенства, а следовательно, выполнены соотношения (6.3.19). Эти соотношения показывают, что рассматриваемое вакуумное решение уравнений Эйнштейна является сферически-симметричным, т.е. в соответствии с теоремой Биркгофа (1923) совпадает с решением Шварцшильда.

Аналогичная теорема единственности имеет место в случае, если отказаться от условия выполнения вакуумных уравнений Эйнштейна, заменив их системой уравнений Эйнштейна – Максвелла. В этой ситуации черная дыра может обладать зарядом, соответствующее единственное решение сферически-симметрично и совпадает с метрикой Рейсснера – Нордстрема [Израэль (1968)].

§ 6.4. Теорема единственности для стационарных аксиально-симметричных черных дыр

Перейдем теперь к обсуждению свойств решений уравнений Эйнштейна – Максвелла, описывающих стационарные аксиально-симметричные черные дыры. В подобных пространствах наряду с векторным полем Киллинга $\xi^{\mu}_{(t)}$, нормированным на бесконечности условием $\xi^{\mu}_{(t)} \cdot \xi_{(t)\mu} = -1$, имеется также пространственноподобное векторное поле Киллинга $\xi^{\mu}_{(\varphi)}$, отвечающее симметрии пространства относительно вращения. Это поле коммутирует с $\xi^{\mu}_{(t)}$ и обладает замкнутыми интегральными кривыми. Поле $\xi^{\mu}_{(\varphi)}$ отлично от нуля всюду во внешней области и на горизонте, кроме оси вращения, на которой $\xi^{\mu}_{(\varphi)} = 0$. Если обозначить $X = \xi^{\mu}_{(\varphi)}\xi_{(\varphi)\mu}$, то условие регулярности (локальной евклидовости) пространства-времени на оси вращения выполняется, когда

$$\left.\frac{X^{,\alpha}X_{,\alpha}}{4X}\right|_{X=0} = 1. \tag{6.4.1}$$

Векторные поля $\xi^{\mu}_{(t)}$ и $\xi^{\mu}_{(\varphi)}$ с описанными выше свойствами, включая условие нормировки (6.4.1), определены в стационарном аксиально-симметричном асимптотически плоском пространстве однозначно.

В таком пространстве можно ввести координаты t, φ, x^X $(X = 1, 2)$ так, что выполняются соотношения

$$ds^2 = -V\,dt^2 + 2W\,d\varphi\,dt + X\,d\varphi^2 + 2g_{0X}dx^X dt + \\ + 2g_{\varphi X}dx^X d\varphi + \gamma_{XY}dx^X dx^Y, \tag{6.4.2}$$

где

$$V = -\xi^{\alpha}_{(t)}\xi_{(t)\alpha}, \qquad X = \xi^{\alpha}_{(\varphi)}\xi_{(\varphi)\alpha}, \qquad W = \xi^{\alpha}_{(t)}\xi_{(\varphi)\alpha},$$

$$\xi^{\alpha}_{(t)} = \delta^{\alpha}_{t}, \qquad \xi^{\alpha}_{(\varphi)} = \delta^{\alpha}_{\varphi}, \tag{6.4.3}$$

а функции $V, X, W, g_{0X}, g_{\varphi X}$ и γ_{XY} не зависят от t и φ. Говорят, что метрика (6.4.2) удовлетворяет *условию циркулярности,* если за счет координатных преобразований, сохраняющих форму (6.4.2), можно добиться обращения в нуль коэффициентов g_{0X} и $g_{\varphi X}$. В этом случае двумерные поверхности t = const и φ = const являются ортогональными двумерным поверхностям, образованным интегральными кривыми полей $\xi^{\mu}_{(t)}$ и $\xi^{\mu}_{(\varphi)}$. Необходимым и достаточным условием для циркулярности метрики является выполнение следующих соотношений [см., например, Крамер и др. (1980)]:

$$e^{\alpha\beta\gamma\delta}\xi_{(\varphi)\alpha}\xi_{(t)\beta}\xi_{(t)\gamma;\delta} = 0, \qquad e^{\alpha\beta\gamma\delta}\xi_{(t)\alpha}\xi_{(\varphi)\beta}\xi_{(\varphi)\gamma;\delta} = 0. \tag{6.4.4}$$

Можно показать [Кундт, Трюмпер (1966), Картер (1973а)], что эти соотношения имеют место тогда и только тогда, когда тензор Риччи $R_{\alpha\beta}$ удовлетворяет условиям

$$\xi^{\delta}_{(t)}R_{\delta[\alpha}\xi_{(t)\beta}\xi_{(\varphi)\gamma]} = 0, \qquad \xi^{\delta}_{(\varphi)}R_{\delta[\alpha}\xi_{(\varphi)\beta}\xi_{(t)\gamma]} = 0. \tag{6.4.5}$$

Очевидно, что для вакуумных решений уравнений Эйнштейна эти условия выполняются. Нетрудно убедиться, что они также справедливы и вне источников в электровакуумных пространствах [Картер (1969)]. Таким образом, в интересующем нас случае (стационарные аксиально-симметричные решения уравнений Эйнштейна – Максвелла) условие циркулярности выполнено и элемент длины (6.4.2) допускает следующее представление:

$$ds^2 = -V dt^2 + 2W d\varphi\, dt + X d\varphi^2 + d\gamma^2, \tag{6.4.6}$$

где

$$d\gamma^2 = \gamma_{XY}(x^Z)dx^X dx^Y.$$

Картер (1969) показал, что если выполняется условие причинности (отсутствуют замкнутые времениподобные линии), то величины

$$\rho^2 \equiv VX + W^2 \tag{6.4.7}$$

и X положительны во всей внешней области, за исключением оси вращения, где $X = W = 0$, и горизонта событий, ограничивающего внешнюю область, где ρ^2 обращается в нуль. Для статической черной дыры $W = 0$, и уравнение горизонта событий принимает вид $V = 0$.

Если выполнены уравнения Эйнштейна или уравнения Эйнштейна – Максвелла, то функция ρ является гармонической:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\partial_X(\sqrt{\gamma}\,\gamma^{XY}\partial_Y\rho) = 0. \tag{6.4.8}$$

Поскольку всякая двумерная метрика является конформно-плоской, то $d\gamma^2$ можно записать в виде

$$d\gamma^2 = \widetilde{U}(x^1, x^2)\,[(dx^1)^2 + (dx^2)^2]. \tag{6.4.9}$$

Удобнее, однако, для описания свойств метрики в окрестности горизонта ввести координаты λ и μ, которые в асимптотически удаленной области связаны со стандартными сферическими координатами r и θ

соотношениями

$$\lambda \approx r - M, \qquad \mu \approx \cos\theta. \tag{6.4.10}$$

Здесь M – измеряемая асимптотически удаленным наблюдателем масса черной дыры, а метрика $d\gamma^2$ в этих координатах имеет вид

$$d\gamma^2 = U(\lambda, \mu)\, d\gamma_0^2, \tag{6.4.11a}$$

$$d\gamma_0^2 = \frac{d\lambda}{\lambda^2 - C^2} + \frac{d\mu^2}{1 - \mu^2}. \tag{6.4.11b}$$

Картер (1971) показал, что координаты t, λ, μ, φ покрывают всю внешнюю область стационарной черной дыры (за исключением оси вращения, где эти координаты имеют очевидную особенность). При этом φ периодична (с периодом 2π), t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, μ пробегает значения от -1 до $+1$ (граничные значения достигаются на "северной" и "южной" полярных осях), а $\lambda > C > 0$ (значению $\lambda = C$ отвечает горизонт событий, и $\lambda \to \infty$ для асимптотически удаленных точек). В этих координатах

$$\rho^2 \equiv VX + W^2 = (\lambda^2 - C^2)(1 - \mu^2), \tag{6.4.12}$$

а электромагнитное поле $F_{\mu\nu}$ вне источников записывается следующим образом:

$$F_{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu, \qquad A_\mu dx^\mu = \Phi\, dt + B\, d\varphi; \tag{6.4.13}$$

величины V, X, W, U, Φ и B являются функциями от λ и μ.

Перейдем теперь к изложению основных этапов доказательства теоремы единственности для аксиально-симметричных стационарных черных дыр. Они состоят в следующем:

1) Используя метод, развитый Эрнстом (1968a, b) [см. также Крамер и др. (1980)], можно свести нахождение решения уравнения Эйнштейна – Максвелла к задаче решения системы двух эллиптических уравнений второго порядка для двух комплексных функций от переменных λ и μ (потенциалов Эрнста). При этом оказывается, что полученные уравнения совпадают с уравнениями движения для определенного лагранжиана.

2) Анализируются условия на коэффициенты метрики (6.4.6), (6.4.11) и компоненты электромагнитного поля (6.4.13), вытекающие из требования регулярности пространства-времени в окрестности горизонта событий и на оси вращения, а также из предположения о том, что пространство является асимптотически плоским. Эти условия затем переформулируются эквивалентным образом в виде граничных условий для потенциалов Эрнста в особых точках $\lambda = C$, $\lambda = \infty$, $|\mu| = 1$.

3) Используя свойства инвариантности введенного для рассматриваемой задачи лагранжиана, получают дифференциальное условие, связывающее произвольные два решения. С помощью этого условия доказывается, что любые два решения, удовлетворяющие найденным граничным условиям с фиксированным значением входящих в них произвольных постоянных, совпадают.

4) Показывается, что известное решение Керра – Ньюмена, описывающее заряженную вращающуюся черную дыру, удовлетворяет указанным граничным условиям и содержит нужное число произвольных постоянных. Тем самым устанавливается, что этим семейством решений исчерпываются

все решения, описывающие стационарные аксиально-симметричные черные дыры.

Исходным пунктом при реализации описанной выше программы является следующее замечание. Пусть известны функции X, W, Φ и B, отвечающие некоторому аксиально-симметричному стационарному асимптотически плоскому решению уравнений Эйнштейна – Максвелла. Тогда функция V для этого решения определяется из соотношения (6.4.12), а функция U может быть однозначно определена путем решения уравнения, вытекающего из полной системы Эйнштейна – Максвелла [Крамер и др. (1980)].

Перейдем от переменных Φ, W к новым переменным E, Y с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} E_{,\mu} &= (X\Phi_{,\lambda} - WB_{,\lambda})/(1-\mu^2), \\ E_{,\lambda} &= -(X\Phi_{,\mu} - WB_{,\mu})/(\lambda^2 - C^2), \\ Y_{,\mu} &= (XW_{,\lambda} - WX_{,\lambda})/(1-\mu^2) + 2(BE_{,\mu} - EB_{,\mu}), \\ Y_{,\lambda} &= -(XW_{,\mu} - WX_{,\mu})/(\lambda^2 - C^2) + 2(BE_{,\lambda} - EB_{,\lambda}). \end{aligned} \tag{6.4.14}$$

Можно показать, что исходная система уравнений Эйнштейна – Максвелла обеспечивает выполнение условий совместности для этой системы и приводит к четырем нелинейным уравнениям в частных производных для четырех неизвестных функций (потенциалов Эрнста) X, Y, E, B, которые могут быть получены варьированием следующего функционала "действия":

$$S \equiv \int \sqrt{\gamma_0}\, d\lambda\, d\mu\, \mathcal{L}, \tag{6.4.15}$$

где "лагранжиан"

$$\mathcal{L} = (2X^2)^{-1}\left[(\nabla X)^2 + [\nabla Y + 2(E\nabla B - B\nabla E)]^2\right] + 2X^{-1}\left[(\nabla E)^2 + (\nabla B)^2\right]. \tag{6.4.16}$$

Здесь все операции свертки и поднятия индексов осуществляются с помощью двумерной метрики $d\gamma_0^2$ (6.4.11b). В отсутствие электромагнитного поля для получения решений вакуумных уравнений Эйнштейна достаточно положить $E = B = 0$; при этом "лагранжиан" $\mathcal{L}$ принимает вид

$$\mathcal{L} = \frac{(\nabla X)^2 + (\nabla Y)^2}{2X^2}. \tag{6.4.17}$$

Картер (1971, 1973a) показал, что граничные условия, однозначно определяющие решение X, Y, E, B, вытекают из следующих предположений: a) пространство-время является асимптотически плоским; b) пространство-время регулярно везде во внешней области, в том числе и на оси симметрии; c) горизонт событий является регулярной поверхностью, т.е. на нем отсутствуют физические особенности. Эти предположения в нашем случае принимают вид:

a) В асимптотически удаленной области (при $\lambda \to \infty$) E, B, Y и $\lambda^{-2}X$ являются регулярными функциями λ^{-1} и μ со следующими асимптотиками:

$$\begin{aligned} &E = Q\mu + O(\lambda^{-1}), \qquad B = P\mu + O(\lambda^{-1}), \\ &Y = 2J\mu(3-\mu^2) + O(\lambda^{-1}), \qquad \lambda^{-2}X = (1-\mu^2)\,[1 + O(\lambda^{-1})], \end{aligned} \tag{6.4.18}$$

где J, Q и P – постоянные, имеющие смысл соответственно углового момента, электрического и магнитного монопольного заряда черной дыры.

b) На оси симметрии (при $\mu \to \pm 1$) E, B, X, Y являются регулярными функциями μ и λ; при этом выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} &E_{,\mu} = O(1), \quad E_{,\lambda} = O(1-\mu^2), \quad Y_{,\lambda} = O(1-\mu^2), \\ &Y_{,\mu} + 2(EB_{,\mu} - BE_{,\mu}) = O(1-\mu^2), \\ &B_{,\mu} = O(1), \quad B_{,\lambda} = O(1-\mu^2), \\ &X = O(1-\mu^2), \quad X^{-1}X_{,\mu} = 1 + O(1-\mu^2). \end{aligned} \tag{6.4.19}$$

c) На горизонте событий (при $\lambda \to C$) E, B, X, Y являются регулярными функциями μ и λ, так что выполняются условия

$$\begin{aligned} &E_{,\mu} = O(1), \quad E_{,\lambda} = O(1), \quad B_{,\mu} = O(1), \quad B_{,\lambda} = O(1), \\ &Y_{,\mu} = O(1), \quad Y_{,\lambda} = O(1), \quad X = O(1). \end{aligned} \tag{6.4.20}$$

В отсутствие электромагнитного поля перечисленные выше условия при $E = B = 0$ превращаются в граничные условия для задачи (6.4.17).

Следующий, основной этап доказательства состоит в установлении дифференциального тождества, связывающего два произвольных стационарных аксиально-симметричных решения. При выводе такого тождества мы будем следовать работе Мазура (1982). При этом существенно используется свойство инвариантности действия (6.4.15)–(6.4.16) относительно группы $SU(1, 2)$ преобразований полевых переменных*). Для установления этой инвариантности удобно ввести вместо переменных X, Y, E, B новые комплексные переменные ξ, η, связанные с ними соотношениями

$$-X + iY - E^2 - B^2 = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}, \qquad E + iB = \frac{\eta}{\xi + 1}. \tag{6.4.21}$$

В этих переменных лагранжева плотность (6.4.16) записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = 2(1 - \xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta})^{-2} \, [&(1 - \eta\bar{\eta}) \nabla\xi \nabla\bar{\xi} + \\ &+ (1 - \xi\bar{\xi}) \nabla\eta \nabla\bar{\eta} + \xi\bar{\eta} \nabla\eta \nabla\bar{\xi} + \eta\bar{\xi} \nabla\xi \nabla\bar{\eta}], \end{aligned} \tag{6.4.22}$$

а условие положительности X эквивалентно неравенству

$$\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} < 1. \tag{6.4.23}$$

Обозначим теперь через Φ следующую невырожденную матрицу, которая

---

*) Действие (6.4.15) – (6.4.16) является частным случаем действия вида

$$S[Z^A] = \int dx \sqrt{\gamma}\, \gamma^{ab} \partial_a Z^A \partial_b Z^B G_{AB},$$

где $a, b = 1, \ldots, n$; $A, B = 1, \ldots, N$; $\gamma^{ab} = \gamma^{ab}(x)$; $G_{AB} = G_{AB}(Z)$. Экстремаль такого действия $Z^A(x)$ называют гармоническим отображением [Мизнер (1978)]. Указанное свойство инвариантности означает, что в рассматриваемом случае нефизическое пространство, в котором Z^A – координаты, а $G_{AB}(Z)$ – метрика, является однородным. Бантинг (1983) предложил иное доказательство теоремы единственности, которое не использует эту симметрию, а основано на свойстве знакопостоянства тензора кривизны в этом пространстве. Изложение этого доказательства и его возможные обобщения см. Картер (1985).

построена из ξ и η:

$$\Phi = (1 - \xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta})^{-1} \begin{pmatrix} 1 + \xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} & 2\bar{\xi} & 2\bar{\eta} \\ 2\xi & 1 + \xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta} & 2\xi\bar{\eta} \\ 2\eta & 2\eta\bar{\xi} & 1 + \eta\bar{\eta} - \xi\bar{\xi} \end{pmatrix}. \tag{6.4.24}$$

Пусть

$$j_Y = \nabla_Y \Phi \cdot \Phi^{-1}, \tag{6.4.25}$$

где $\nabla_Y \Phi$ – матрица, получаемая из Φ почленным дифференцированием ее компонент. С помощью простой проверки можно убедиться, что лагранжева плотность (6.4.22) допускает следующую эквивалентную запись:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \operatorname{Sp}(j_Y j^Y), \tag{6.4.26}$$

где Sp обозначает взятие матричного следа, а операции с индексом Y производятся с помощью метрики γ_0^{XY}.

Пусть U – псевдоунитарная матрица, удовлетворяющая условию

$$U^+ \eta U = \eta, \quad \eta = \operatorname{diag}(-1, 1, 1), \quad \det U = 1. \tag{6.4.27}$$

Тогда матрица

$$\tilde{\Phi} = U \Phi U^{-1} \tag{6.4.28}$$

имеет ту же форму, что и (6.4.24) при новых преобразованных значениях $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$. Если матрица преобразования U не зависит от x^Y, то очевидным образом лагранжева плотность (6.4.26) не изменяется при преобразованиях (6.4.28). Иными словами, имеет место инвариантность действия (6.4.15), (6.4.22) относительно группы SU (1, 2) нелинейных преобразований $(\xi, \eta) \to (\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$, порождаемых линейным представлением (6.4.24). В соответствии с первой теоремой Нетер эта инвариантность действия влечет за собой законы сохранения. В рассматриваемом случае они эквивалентны выполнению соотношения

$$\nabla_\mu (\rho j^\mu) = 0 \tag{6.4.29}$$

для решений Φ полевых уравнений.

Рассмотрим теперь два произвольных поля Φ_1 и Φ_2 вида (6.4.24) и образуем из них матрицу $\Phi = \Phi_1 \Phi_2^{-1}$. Тогда можно убедиться, что выполняется следующее дифференциальное тождество:

$$\operatorname{Sp}\{\Phi[\nabla_X(\rho j_2^X) - \nabla_X(\rho j_1^X)]\} + \nabla_X[\rho \nabla^X(\operatorname{Sp}\Phi)] =$$
$$= \rho \operatorname{Sp}\{\Phi[j_{1X} j_1^X + j_{2X} j_2^X - 2 j_{2X} j_1^X]\}, \tag{6.4.30}$$

где

$$j_i^X = \nabla^X \Phi_i \Phi_i^{-1}. \tag{6.4.31}$$

Тождество (6.4.30) позволяет завершить доказательство теоремы единственности. Пусть (X_1, Y_1, E_1, B_1) и (X_2, Y_2, E_2, B_2) (или Φ_1 и Φ_2) –

решения, описывающие две стационарные аксиально-симметричные черные дыры и удовлетворяющие условиям регулярности (6.4.18) – (6.4.20). Тогда первый член в левой части (6.4.30) обращается в нуль тождественно, а второй – если проинтегрировать выражение (6.4.30) по внешней области $\lambda > C$, $-1 \leqslant \mu < 1$ и учесть граничные условия (6.4.18) – (6.4.20). С другой стороны, можно показать [Мазур (1982, 1984)], что выражение в правой части тождества (6.4.30) неотрицательно и, следовательно, оно обращается в нуль на решениях Φ_1 и Φ_2. Далее доказывается, что с учетом граничных условий (6.4.18) – (6.4.20) обращение в нуль правой части (6.4.30) влечет за собой равенство

$$\Phi_1 = \Phi_2, \tag{6.4.32}$$

которое означает, что существует только одно решение уравнений поля в теории (6.4.15), (6.4.22), удовлетворяющее заданным граничным условиям. Тем самым доказывается, что всякая стационарная аксиально-симметричная черная дыра однозначно определяется заданием значений четырех произвольных параметров: C, J, Q и P.

Для завершения доказательства заметим, что следующее стационарное аксиально-симметричное решение уравнений Эйнштейна – Максвелла (решение Керра – Ньюмена) (в (6.4.33) $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 + P^2$)

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a\sin^2\theta\, d\varphi)^2 + \\ + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[a\,dt - (r^2 + a^2)\,d\varphi]^2 + \rho^2\left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right), \tag{6.4.33}$$

$$A_\mu dx^\mu = -\rho^{-2}\{Qr(dt - a\sin^2\theta\, d\varphi) + \\ + P\cos\theta\,[a\,dt - (r^2 + a^2)\,d\varphi]\} \tag{6.4.34}$$

удовлетворяет граничн м условиям (6.4.18) – (6.4.20) и содержит четыре произвольных параметра: M, a, Q и P (связанные с параметрами J и C соотношениями $J = Ma$ и $C = (M^2 - a^2 - Q^2 - P^2)^{1/2}$). Следовательно, это решение является наиболее общим, описывающим уединенную стационарную аксиально-симметричную черную дыру в теории Эйнштейна – Максвелла. Обычно считают, что магнитный монопольный заряд у черной дыры отсутствует ($P = 0$). В этом случае решение (6.4.33) – (6.4.34) переходит в решение (4.2.1), (4.8.1), (4.8.2).

Описанное доказательство теоремы единственности значительно упрощается в случае незаряженной черной дыры. Для перехода к этому случаю достаточно положить $\eta = E = B = 0$ и вместо матрицы (6.4.24) обозначить через Φ матрицу 2×2, получаемую из (6.4.24) вычеркиванием последней строки и последнего столбца. При этом тождество (6.4.30) переходит в тождество, найденное Робинсоном (1975) при доказательстве теоремы единственности для незаряженных стационарных аксиально-симметричных черных дыр.

Прежде чем перейти к рассмотрению возможности существования неэлектромагнитных "волос" у черных дыр, обсудим вопрос о глобальной структуре пространства-времени Керра – Ньюмена.