

него пространства черной дыры: это — закон Фарадея

$$\int_{\partial A^*(t)} \alpha \left( E + \frac{1}{c} v \times B \right) dl = - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{A^*(t)} B d\vec{\Sigma}. \quad (7.1.6)$$

Здесь  $d\vec{\Sigma}$  — вектор элемента поверхности, равный по длине его площади;  $A^*(t)$  — двумерная поверхность, не пересекающая горизонт и ограниченная кривой  $\partial A^*(t)$ ;  $dl$  — элемент  $\partial A^*(t)$ ;  $v$  — физическая скорость  $A^*(t)$  или  $\partial A^*(t)$  относительно локально невращающихся наблюдателей.

## § 7.2. Стационарная электродинамика с осевой симметрией. Бессиловское поле

Вращающаяся черная дыра и пространство вне ее стационарны и обладают осевой симметрией. Во многих астрофизических задачах движение вещества вокруг черной дыры также с хорошей точностью можно считать стационарным и осесимметричным. Естественно предполагать, что и электромагнитное поле будет таким же.

Мы считаем в этом параграфе перечисленные условия выполнеными\*). Тогда производные по времени  $t$  и производные  $L_m$  от векторов исчезают. В частности, в квадратных скобках (7.1.3) и (7.1.4) остаются только последние слагаемые.

Оказывается, что при условии стационарности и осевой симметрии непосредственно измеряемые значения  $E$ ,  $B$ ,  $\rho_e$ ,  $j$  выражаются через три произвольные скалярные функции, которые могут быть выбраны следующим образом.

Пусть  $\partial A^*$  — замкнутая координатная линия с постоянными  $r$  и  $\theta$  в "абсолютном" 3-пространстве, а  $A^*$  — двумерная поверхность, не пересекающая черную дыру и ограниченная  $\partial A^*$ .

Тогда указанные функции:

1) полный ток внутри петли  $\partial A^*$  (взятый с обратным знаком)

$$I \equiv - \int_{A^*} \alpha j d\vec{\Sigma}, \quad (7.2.1)$$

где  $d\vec{\Sigma}$  — вектор элемента поверхности (он считается положительным, если ориентирован в направлении  $\pi, 0$  координаты  $\theta$ );

2) полный магнитный поток через  $\partial A^*$

$$\Psi \equiv \int_{A^*} B d\vec{\Sigma}; \quad (7.2.2)$$

3) электрический потенциал

$$\mathcal{A}_0 \equiv -\alpha \Phi - \omega Am, \quad (7.2.3)$$

где  $\Phi$  — скалярный, а  $A$  — векторный потенциалы (определение  $m$  мы уже дали).

\*.) Случай нестационарного поля см., например, Макдональд, Сюэн (1985), Торн (1986).

Величины  $I$  и  $\Psi$  зависят только от выбора положения петли  $\partial A^*$  и не зависят от формы  $A^*$  \*)

Прежде чем выразить  $E$  и  $B$  через функции  $I$ ,  $\Psi$ ,  $\mathcal{A}_0$ , разделим поля на полоидальные (индекс  $P$ ) и тороидальные (индекс  $T$ ) компоненты, соответственно перпендикулярные и параллельные вектору  $m$ :

$$E^T \equiv \left( \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)^{-1} (Em) m, \quad (7.2.4)$$

$$B^T \equiv \left( \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)^{-1} (Bm) m, \quad (7.2.5)$$

$$E^P = E - E^T, \quad (7.2.6)$$

$$B^P = B - B^T. \quad (7.2.7)$$

Из закона Фарадея (7.1.6) и условия стационарности следует

$$E^T = 0. \quad (7.2.8)$$

Из уравнения (7.1.2) и условия осесимметричности  $B$  (что дает  $\mathcal{L}_m B = 0$ ) получаем

$$\nabla B^T = 0, \quad (7.2.9)$$

$$\nabla B^P = 0, \quad (7.2.10)$$

т.е. полоидальные и тороидальные магнитные силовые линии можно рассматривать отдельно (как нигде не кончающиеся).

Плотность тока  $j$  также разделим на полоидальную ( $j^P$ ) и тороидальную ( $j^T$ ) компоненты.

Теперь мы можем привести выражения для всех электромагнитных величин через  $I$ ,  $\Psi$ ,  $\mathcal{A}_0$ :

$$E^P = \alpha^{-1} \left( \nabla \mathcal{A}_0 + \frac{\omega}{2\pi c} \nabla \Psi \right), \quad (7.2.11)$$

$$E^T = 0, \quad (7.2.12)$$

$$B^P = - \frac{m \times \nabla \Psi}{2\pi \left( \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)}, \quad (7.2.13)$$

$$B^T = - \frac{2Im}{\alpha c \left( \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)}, \quad (7.2.14)$$

$$j^P = \frac{m \times \nabla I}{2\pi \alpha \left( \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)}, \quad (7.2.15)$$

\*) Мы считаем, что у черной дыры нет магнитного заряда.

$$j^T \equiv j^T m \left( \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)^{-1/2} = \left( \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)^{1/2} \frac{1}{4\pi\alpha} \times \\ \times \left\{ -c \nabla \left[ \frac{\alpha \nabla \Psi}{2\pi \left( \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)} \right] + \frac{1}{\alpha} \nabla \omega \left( \nabla \mathcal{A}_0 + \frac{\omega \nabla \Psi}{2\pi c} \right) \right\}, \quad (7.2.16)$$

$$\rho_e = \frac{1}{4\pi} \nabla \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \nabla \mathcal{A}_0 + \frac{\omega \nabla \Psi}{2\pi c} \right) \right]. \quad (7.2.17)$$

Подчеркнем, что последние три уравнения можно рассматривать как дифференциальные уравнения для определения  $I$ ,  $\Psi$ ,  $\mathcal{A}_0$  (а значит, и  $E$ ,  $B$ ), если источники поля  $j^P$ ,  $j^T$  и  $\rho_e$  считать заданными стационарно и осесимметрично, но в остальном произвольно. Заметим, что задание тока  $j$  в стационарном и осесимметричном случае должно удовлетворять условию  $\nabla(\alpha j) = 0$  из-за закона сохранения заряда, т.е.  $\alpha j^P$  должно быть бездивергентным.

Рассмотрим теперь физические условия в плазме, окружающей черную дыру.

Наиболее важным для астрофизики является случай, когда проводимость плазмы столь высока, что электрическое поле отсутствует в системе, сопутствующей плазме, и магнитные силовые линии "вморожены" в плазму. В этом случае в произвольной системе отсчета электрическое поле перпендикулярно магнитному (вырожденное поле):

$$EB = 0. \quad (7.2.18)$$

Еще более специфична ситуация, когда силы инерции (и гравитации), действующие на плазму, малы по сравнению с электромагнитными. В этом случае конфигурация полей и токов такова, что в системе, сопутствующей плазме, токи параллельны магнитным силовым линиям и отсутствует сила Лоренца, действующая на движущиеся заряды. Такие поля называют бессиловыми. В произвольной системе условие бессилового поля записывается следующим образом:

$$\rho_e E + \frac{1}{c} j \times B = 0. \quad (7.2.19)$$

В этом параграфе мы будем считать, что вблизи черной дыры условие (7.2.19) [а значит, и (7.2.18)] выполнено\*). Подчеркнем, что условие (7.2.19) заведомо нарушается где-то во внешнем пространстве черной дыры.

Действительно, в обычной ситуации внешнее магнитное поле удерживается в пространстве около черной дыры из-за того, что концы магнитных силовых линий "вморожены" в достаточно плотную массивную плазму, находящуюся несколько поодаль и "принесшую" магнитное поле к черной дыре. В этой плазме выполнено условие (7.2.18), но не условие (7.2.19). Тяготение черной дыры (и инерция) удерживает эту плазму, а вместе с ней и "вмороженное" в нее магнитное поле. Его силовые линии

\*.) Условие (7.2.19) не выполняется на самом горизонте событий; см. об этом следующий параграф.

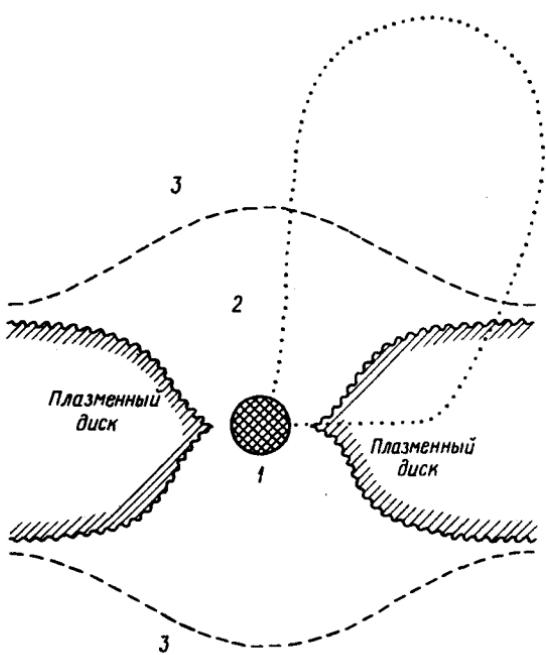


Рис. 68. Схема дисковой акреции на черную дыру: 1 – вращающаяся черная дыра, 2 – область бессилового поля (7.2.19), 3 – "область ускорения", где не выполняются условия (7.2.18) и (7.2.19). Штриховая линия – граница областей 2 и 3, пунктир – пример линии электрического тока

выходят из плотной плазмы в область гораздо более разреженной плазмы, где выполнено условие (7.2.19); они могут проходить вблизи черной дыры, а часть их – пронизывать ее. Такая ситуация осуществляется, например, в модели широко обсуждаемой дисковой акреции на черную дыру (рис. 68).

Если бы где-то не нарушалось условие (7.2.19) и плотная плазма своей инерцией не сдерживала бы расталкивающее давление магнитного поля, то это давление заставило бы силовые линии вместе с разреженной плазмой двигаться наружу.

Вдали от черной дыры должно нарушаться, вероятно, и условие (7.2.18) (область 3 на рис. 68) – там, где магнитное поле достаточно слабо, а силы инерции, наоборот, становятся большими (см. об этом следующий параграф).

Заметим, наконец, что условия (7.2.18) и (7.2.19), конечно, только приближенные. Для решения задач о конфигурации полей, токов и распределения зарядов необходимо лишь, чтобы вместо (7.2.18) и (7.2.19) выполнялись соответственно неравенства

$$|EB| \ll |E^2 - B^2|, \quad (7.2.20)$$

$$\left| \rho_e E + \frac{1}{c} j \times B \right| \ll \left| \frac{j}{c} \right| |B|. \quad (7.2.21)$$

Малые отклонения от точных равенств (7.2.18) и (7.2.19) в окрестности черной дыры могут оказаться существенными для некоторых астрофизических процессов [см., например, Кардашев и др. (1983\*)].

Вернемся к случаю бессилового поля, считая условия (7.2.18) и (7.2.19) точно выполненными в окрестности черной дыры. Поле  $E$  – чисто полоидальное, и, кроме того,  $EB = 0$ . Поэтому  $E$  можно представить как векторное произведение  $B^P$  на некоторый вектор  $-\mathbf{v}^F/c$ , зависящий только от  $r, \theta$  и параллельный  $m$ :

$$E \equiv E^P = -\frac{\mathbf{v}^F}{c} \times B^P. \quad (7.2.22)$$

Напомним, что  $E$  и  $B$  – это поля, измеряемые невращающимися наблюдателями. Тогда из (7.2.22) следует, что наблюдатель, движущийся со скоростью  $\mathbf{v}^F$  относительно невращающихся наблюдателей, измеряет только магнитное поле, для него электрическое поле равно нулю вследствие преобразования Лоренца. Значит, можно интерпретировать  $\mathbf{v}^F$  как линейную скорость точек магнитной силовой линии относительно невращающихся наблюдателей. Поле  $E$  целиком индуцировано этим движением.

Если записать вектор  $\mathbf{v}^F$  в виде

$$\mathbf{v}^F = \left( \frac{\Omega^F - \omega}{\alpha} \right) \mathbf{m}, \quad (7.2.23)$$

то  $\Omega^F$  будет угловой скоростью вращения точек силовых линий полоидального магнитного поля в "абсолютном" пространстве. Можно показать, что каждая силовая линия целиком обращается вокруг черной дыры как единое целое с постоянной  $\Omega^F$  по "времени"  $t$  в "абсолютном" пространстве.

Поверхность, которая получается при вращении магнитной силовой линии вокруг оси симметрии, называют *магнитной поверхностью*. Величина  $\Psi$ , очевидно, постоянна на этой поверхности, и, следовательно,  $\Omega^F$  есть функция  $\Psi$ :  $\Omega^F = \Omega^F(\Psi)$ . Оказывается, что величина  $\mathcal{A}_0$  теперь не является независимой, а тоже есть функция  $\Psi$ :  $\frac{d\mathcal{A}_0}{d\Psi} = -\frac{\Omega^F}{2\pi c}$ . Мож-

но показать, что из условия (7.2.19) вытекает зависимость и  $I$  от  $\Psi$ .

Уравнения для  $j^T$  (7.2.16) и  $\rho_e$  (7.2.17) теперь несколько упрощаются:

$$j^T = \left( \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)^{1/2} \frac{1}{8\pi^2 \alpha} \left[ -c \nabla \left( \frac{\rho^2 \alpha \nabla \Psi}{A \sin^2 \theta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha c} (\Omega^F - \omega) \nabla \Psi \nabla (\Omega^F - \omega) - \frac{1}{\alpha c} (\Omega^F - \omega) \frac{d\Omega^F}{d\Psi} (\nabla \Psi)^2 \right], \quad (7.2.24)$$

$$\rho_e = -\frac{1}{8\pi^2 c} \nabla \left[ \left( \frac{\Omega^F - \omega}{\alpha} \right) \nabla \Psi \right]. \quad (7.2.25)$$

Наиболее важным и примечательным фактом является то, что  $I, \Psi, \mathcal{A}_0$  теперь не являются произвольными и независимыми, а значит, не явля-

ются произвольными и независимыми  $\rho_e$ ,  $j^T$  и бездивергентная часть  $\alpha j^P$ , как это было при требовании лишь стационарности и осевой симметрии. Теперь произвол в их в.бore отсутствует: для существования бессилового поля необходимо (и достаточно), чтобы величина  $\Psi$  удовлетворяла уравнению, которое называют *уравнением линий тока* (stream equation):

$$\nabla \left\{ \frac{\alpha \rho^2}{A \sin^2 \theta} \left[ 1 - \frac{(\Omega^F - \omega)^2}{\alpha^2 c^2} \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right] \nabla \Psi \right\} + \\ + \frac{(\Omega^F - \omega)}{\alpha c^2} \frac{d \Omega^F}{d \Psi} (\nabla \Psi)^2 + \frac{16 \pi^2 \rho^2}{\alpha c^2 A \sin^2 \theta} I \frac{d I}{d \Psi} = 0. \quad (7.2.26)$$

Таким образом, если  $\Psi$ ,  $\Omega^F(\Psi)$  и  $I(\Psi)$  выбраны так, что удовлетворяют (7.2.26), то для области с бессиловым полем  $E$  вычисляется по (7.2.22), куда подставлены (7.2.23) и (7.2.13),  $B$  вычисляется по (7.2.13) и (7.2.14),  $j^P$  – по (7.2.15), а  $j^T$  и  $\rho_e$  – по (7.2.24) и (7.2.25) соответственно.

### § 7.3. Границные условия на горизонте событий.

#### Мембранные трактовка и "растянутый" горизонт

Электродинамика черных дыр рассматривает процессы только вне горизонта событий. Поэтому для решения уравнений электродинамики, помимо граничных условий вдали от черной дыры, необходимо задать еще граничные условия на ее поверхности. Формально эта ситуация ничем не отличается от ситуации, например, связанной с электродинамикой пульсаров, когда также необходимо задавать граничные условия на поверхности нейтронной звезды.

Тем не менее эти ситуации принципиально разные.

В отличие от нейтронной звезды, у черной дыры нет никакой материальной поверхности, отличающейся от окружающего пространства. Формально для построения полной картины электромагнитного поля надо было бы решать уравнения Максвелла для всего пространства-времени – как снаружи, так и внутри черной дыры, причем без каких-либо специальных условий на горизонте событий. Соответствующие условия надо было бы отнести к сингулярности внутри черной дыры.

Однако ясно, что если мы интересуемся только процессами вне черной дыры и помним, что область пространства-времени внутри нее не может влиять на эти процессы, то должна существовать корректная постановка задачи об электродинамике вне черной дыры с соответственно подобранными граничными условиями на горизонте событий. Так как генераторами горизонта событий являются нулевые геодезические и эти же линии являются характеристиками для уравнений Максвелла, то, следовательно, решается задача с заданием условий на семействе характеристик.

Соответствующие граничные условия были сформулированы Знеком (1978) и Дамуром (1978). Оказалось, что их можно представить весьма наглядным образом, а именно считать, что на поверхности черной дыры находится фиктивный поверхностный электрический заряд  $\sigma^H$ , компенсирующий поток электрического поля через поверхность, и фиктивный поверхностный электрический ток  $\mathcal{J}^H$ , замыкающий реальные токи,