ются произвольными и независимыми ρ_e, j^T и бездивергентная часть αj^P, как это было при требовании лишь стационарности и осевой симметрии. Теперь произвол в их выборе отсутствует: для существования бессилового поля необходимо (и достаточно), чтобы величина Ψ удовлетворяла уравнению, которое называют *уравнением линий тока* (stream equation):

$$\nabla\left\{\frac{\alpha\rho^2}{A\sin^2\theta}\left[1-\frac{(\Omega^F-\omega)^2}{\alpha^2c^2}\,\frac{A\sin^2\theta}{\rho^2}\right]\nabla\Psi\right\}+$$
$$+\frac{(\Omega^F-\omega)}{\alpha c^2}\,\frac{d\Omega^F}{d\Psi}(\nabla\Psi)^2+\frac{16\pi^2\rho^2}{\alpha c^2 A\sin^2\theta}\,I\,\frac{dI}{d\Psi}=0. \qquad (7.2.26)$$

Таким образом, если Ψ, $\Omega^F(\Psi)$ и $I(\Psi)$ выбраны так, что удовлетворяют (7.2.26), то для области с бессиловым полем $\boldsymbol{E}$ вычисляется по (7.2.22), куда подставлены (7.2.23) и (7.2.13), $\boldsymbol{B}$ вычисляется по (7.2.13) и (7.2.14), j^P – по (7.2.15), а j^T и ρ_e – по (7.2.24) и (7.2.25) соответственно.

§ 7.3. Граничные условия на горизонте событий. Мембранная трактовка и "растянутый" горизонт

Электродинамика черных дыр рассматривает процессы только вне горизонта событий. Поэтому для решения уравнений электродинамики, помимо граничных условий вдали от черной дыры, необходимо задать еще граничные условия на ее поверхности. Формально эта ситуация ничем не отличается от ситуации, например, связанной с электродинамикой пульсаров, когда также необходимо задавать граничные условия на поверхности нейтронной звезды.

Тем не менее эти ситуации принципиально разные.

В отличие от нейтронной звезды, у черной дыры нет никакой материальной поверхности, отличающейся от окружающего пространства. Формально для построения полной картины электромагнитного поля надо было бы решать уравнения Максвелла для всего пространства-времени – как снаружи, так и внутри черной дыры, причем без каких-либо специальных условий на горизонте событий. Соответствующие условия надо было бы отнести к сингулярности внутри черной дыры.

Однако ясно, что если мы интересуемся только процессами вне черной дыры и помним, что область пространства-времени внутри нее не может влиять на эти процессы, то должна существовать корректная постановка задачи об электродинамике вне черной дыры с соответственно подобранными граничными условиями на горизонте событий. Так как генераторами горизонта событий являются нулевые геодезические и эти же линии являются характеристиками для уравнений Максвелла, то, следовательно, решается задача с заданием условий на семействе характеристик.

Соответствующие граничные условия были сформулированы Знаеком (1978) и Дамуром (1978). Оказалось, что их можно представить весьма наглядным образом, а именно считать, что на поверхности черной дыры находится *фиктивный* поверхностный электрический заряд σ^H, компенсирующий поток электрического поля через поверхность, и *фиктивный* поверхностный электрический ток $\mathcal{J}^H$, замыкающий реальные токи,

пересекающие горизонт, и компенсирующий касательные составляющие магнитные поля на горизонте. Такая трактовка получила название мембранного формализма [Торн (1986), Торн и др. (1986)].

В формулировке Макдональда и Торна (1982) условия на горизонте выглядят следующим образом:

закон Гаусса

$$\boldsymbol{En} \equiv \boldsymbol{E}_{\perp} \to 4\pi\sigma^{H}, \tag{7.3.1}$$

где $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности черной дыры; знак $\to$ означает приближение к ее горизонту по траектории свободно падающего наблюдателя;

закон сохранения заряда

$$\alpha \boldsymbol{jn} \to -\frac{\partial \sigma^{H}}{\partial t} - {}^{(2)}\nabla \vec{\mathcal{J}}^{H}, \tag{7.3.2}$$

где ${}^{(2)}\nabla$ – двумерная дивергенция на горизонте;

закон Ампера

$$\alpha \boldsymbol{B}_{\parallel} \to \boldsymbol{B}^{H} \equiv \left(\frac{4\pi}{c}\right)\vec{\mathcal{J}}^{H} \times \boldsymbol{n}, \tag{7.3.3}$$

где $\boldsymbol{B}_{\parallel}$ – компонента магнитного поля, касательная к горизонту;

закон Ома

$$\alpha \boldsymbol{E}_{\parallel} \to \boldsymbol{E}^{H} \equiv R^{H}\vec{\mathcal{J}}^{H}, \tag{7.3.4}$$

где $\boldsymbol{E}_{\parallel}$ – компонента электрического поля, касательная к горизонту; $R^{H} \equiv 4\pi/c$ – эффективное поверхностное сопротивление горизонта событий ($R^{H} = 377$ Ом).

Наличие множителя α в условиях (7.3.2)–(7.3.4) связано с замедлением течения физического времени у локально невращающихся наблюдателей вблизи черной дыры.

Значения $\boldsymbol{E}^{H}$ и $\boldsymbol{B}^{H}$ конечны, а $\alpha \to 0$ на горизонте. Отсюда и из приведенных выше условий получаем следующие свойства полей у горизонта:

$\boldsymbol{E}_{\perp}$ и $\boldsymbol{B}_{\perp}$ конечны на горизонте, (7.3.5)

$|\boldsymbol{E}_{\parallel}|$ и $|\boldsymbol{B}_{\parallel}|$, вообще говоря, расходятся у горизонта как $1/\alpha$, (7.3.6)

$|\boldsymbol{E}_{\parallel} - \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{B}_{\parallel}| \propto \alpha \to 0$ у горизонта. (7.3.7)

Условие (7.3.7) означает, что для локально невращающихся наблюдателей электромагнитное поле у горизонта приобретает (в общем случае) характер электромагнитной волны, идущей в черную дыру с бесконечным фиолетовым смещением.

Приведенные условия позволяют весьма наглядно представить, как электромагнитные процессы будут влиять на свойства самой черной дыры, медленно меняя ее параметры (медленно – поскольку мы с самого начала предположили относительную слабость электромагнитного поля; см. § 7.1).

Изменение углового момента вращения черной дыры J равно полному потоку углового момента электромагнитного поля через горизонт (все –

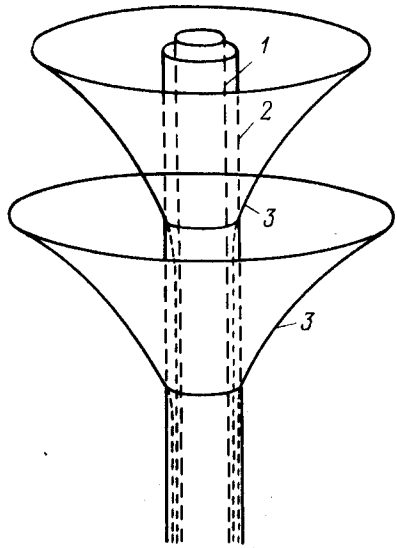

Рис. 69. "3 + 1"-расщепление пространства-времени вблизи горизонта черной дыры: *1* – горизонт черной дыры, *2* – "растянутый" горизонт, *3* – сечения t = const

в глобальном времени t). В дифференциальном виде это условие записывается так:

$$dJ = (\sigma^H \boldsymbol{E}^H + (\vec{\mathcal{Y}}^H/c) \times \boldsymbol{B}_\perp)\boldsymbol{m}\, d\Sigma^H dt. \qquad (7.3.8)$$

Здесь $d\Sigma^H$ – элемент площади горизонта. Изменение массы черной дыры M определяется следующим выражением:

$$dM \cdot c^2 = \{\, \Omega^H [\sigma^H E^H + (\vec{\mathcal{Y}}^H/c) \times \times \boldsymbol{B}_\perp]\boldsymbol{m} + \boldsymbol{E}^H \vec{\mathcal{Y}}^H \,\} d\Sigma^H dt. \qquad (7.3.9)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках описывает изменение вращательной энергии черной дыры, а второе – изменение массы вследствие "нагрева" черной дыры поверхностным током.

Мы видим, что описанные в этом параграфе граничные условия на горизонте событий позволяют при решении электродинамических задач во внешнем пространстве представлять черную дыру как некую материальную сферу, обладающую вполне определенными электромагнитными свойствами, способную нести поверхностные заряды и токи. Этот подход, как мы уже сказали, называют мембранным.

Такое наглядное представление в сильной степени помогает решать конкретные задачи.

Мы хотим еще раз подчеркнуть, что в действительности никакой реальной сферы, никаких зарядов и токов на границе черной дыры нет. Подчеркнем также, что поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$, которые реально измеряет локально невращающийся наблюдатель у горизонта событий, кардинально отличаются от $\boldsymbol{E}^H$ и $\boldsymbol{B}^H$, фигурирующих в граничных условиях, из-за наличия множителя α в определении $\boldsymbol{E}^H$ и $\boldsymbol{B}^H$ [см. (7.3.3) и (7.3.4)]. Этот множитель связан (как и при формулировке уравнений Максвелла) с использованием "глобального времени" t.

Отметим здесь следующее важное обстоятельство. При "3 + 1"-расщеплении пространства-времени черной дыры поверхности t = const ведут себя так, как показано на рис. 69. С приближением к горизонту они уходят в далекое прошлое по параметру V (2.4.11) или по времени T свободно падающего наблюдателя (T – время системы отсчета (2.4.3) для метрики Шварцшильда или аналогичной системы отсчета для метрики Керра)*).

*) Заметим, что метрическое расстояние до горизонта от любой точки по сечению t = const тем не менее конечно (кроме случая $a = M$). Это связано с тем, что нулевые геодезические стремятся стать параллельными этому сечению с приближением к горизонту.

Поэтому с приближением к горизонту на этом сечении имеются значения электромагнитного поля, соответствующие далекой прошлой истории. Если рассматривается стационарная задача, то это обстоятельство не имеет значения, так как поля не меняются со временем. Но при рассмотрении эволюции полей это обстоятельство оказывается важным и может вызывать серьезные неудобства. Поэтому было предложено ввести понятие "растянутого" горизонта. Им называют поверхность (мембрану), лежащую в непосредственной близости от горизонта, снаружи него, и, в отличие от горизонта, являющуюся времениподобной (см. рис. 69). Точно положение "растянутого" горизонта не определено и выбирается в зависимости от конкретной задачи.

Граничные условия задаются в таком подходе на "растянутом" горизонте и все далекое прошлое полей на $t = \text{const}$ вблизи истинного горизонта оказывается отсеченным и не рассматривается. Подробную теорию "растянутого" горизонта и библиографию можно найти в работе Прайса, Торна (1986) и в книге Торн и др. (1986).

Вернемся к истинному горизонту. Будем теперь, как и в предыдущем параграфе, "специализировать" физические условия. Предположим сначала, что рассматривается стационарная осесимметричная задача. В этом случае на горизонте фиктивный поверхностный ток $\vec{\mathcal{J}}^H$ и электрическое поле $\boldsymbol{E}^H$ полностью полоидальны, а магнитное поле $\boldsymbol{B}^H$ тороидально:

$$\vec{\mathcal{J}}^H_P = \frac{I}{2\pi\left(\dfrac{A^H \sin^2\theta}{\rho_H^2}\right)^{1/2}}, \tag{7.3.10}$$

$$E^H_P = -\frac{2I}{c\left(\dfrac{A^H \sin^2\theta}{\rho_H^2}\right)^{1/2}}, \tag{7.3.11}$$

$$B^H_T = -\frac{2I}{c\left(\dfrac{A^H \sin^2\theta}{\rho_H^2}\right)^{1/2}}, \tag{7.3.12}$$

где A^H и ρ_H – значения A и ρ на горизонте. Кроме того, полоидальное магнитное поле, измеряемое невращающимися наблюдателями, пересекает горизонт событий ортогонально. Напомним, что тороидальная компонента, как сказано выше, расходится на горизонте.

Посмотрим теперь, что изменится в случае бессилового поля в окрестности черной дыры. Прежде всего отметим, что на самом горизонте условие (7.2.18) вырожденности поля выполняется, но условие (7.2.19) – нет.

Теперь электрическое поле на горизонте $\boldsymbol{E}^H$ прямо выражается через $\boldsymbol{B}_\perp$:

$$\boldsymbol{E}^H = -\frac{1}{c}(\Omega^F - \Omega^H)\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}_\perp. \tag{7.3.13}$$

Наиболее важным является следующий факт. В случае бессилового поля решения уравнения линий тока (7.2.26), не имеющие каких-либо нефизических особенностей, автоматически удовлетворяют граничным условиям

на горизонте событий. Кроме того, оказывается справедливым следующий "принцип наименьшего действия".

Линии полоидального магнитного поля, пересекающие горизонт, распределяются таким образом, чтобы полная поверхностная энергия $\mathcal{E}$ тангенциального электромагнитного поля на горизонте была экстремальной. Выражение для $\mathcal{E}$ в этом случае имеет вид

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int_H [(B^H)^2 + (E^H)^2] d\Sigma^H, \tag{7.3.14}$$

а интегрирование производится по горизонту.

Наконец, запишем для бессилового поля уравнения (7.3.8) и (7.3.9):

$$dJ = \frac{(\Omega^F - \Omega^H)}{4\pi c} \frac{A^H \sin^2\theta}{\rho_H^2} (B_\perp)^2 d\Sigma^H dt, \tag{7.3.15}$$

$$dM = \frac{\Omega^F(\Omega^F - \Omega^H)}{4\pi c^3} \frac{A^H \sin^2\theta}{\rho_H^2} (B_\perp)^2 d\Sigma^H dt. \tag{7.3.16}$$

Угловой момент и энергия, теряемые черной дырой, передаются вдоль магнитных силовых линий полоидального поля в бессиловой области к "районам", где условие (7.2.19) нарушается.

Заметим, что если $\Omega^F = 0$ (силовые линии магнитного поля, скажем, вморожены в плазму вдали от черной дыры, и эта плазма *не участвует* во вращении вокруг нее), то $dM = 0$, т.е. полная масса дыры сохраняется, а $dJ < 0$, т.е. вращение черной дыры замедляется. При этом вся энергия вращения переходит в массу самой черной дыры (так называемую неприводимую массу; см. § 8.1) – ничего не отдается наружу.

При заданных параметрах черной дыры угловая скорость вращения Ω^F определяется граничным условием вдали от черной дыры, во внешней плазме. Для астрофизических условий ситуация будет рассмотрена в § 7.5.

§ 7.4. Электромагнитные поля в вакууме в окрестности черных дыр

Прежде чем переходить к описанию магнитосферы вращающейся черной дыры, возникающей в условиях, когда на нее происходит аккреция замагниченного газа (см. об этом следующий параграф), приведем в качестве иллюстраций решения следующих задач об электромагнитном поле в вакууме:

1) электрический заряд в вакууме в метрике Шварцшильда [Копсон (1928), Лине (1976), Ханни, Руффини (1973)];

2) магнитное поле в вакууме в метрике Керра, однородное на бесконечности [Уолд (1974b), Торн, Макдональд (1982), Кинг, Лазота (1977)].

Начнем с задачи 1. Пусть заряд q покоится в координатах Шварцшильда при $r = b$, $\theta = 0$. Задача сводится к решению системы (7.2.15)–(7.2.17) с δ-функцией для ρ_e и с $j^P = j^T = 0$. Условия (7.2.15), (7.2.16) выполняются при $\Psi = I = 0$. Из (7.2.13) и (7.2.14) следует тогда отсутствие внешнего магнитного поля. Отсутствуют и внешние токи. Тем самым [см. выражения (7.3.2) и (7.3.3)] равен нулю поверхностный ток на