на горизонте событий. Кроме того, оказывается справедливым следующий "принцип наименьшего действия".

Линии полоидального магнитного поля, пересекающие горизонт, распределяются таким образом, чтобы полная поверхностная энергия $\mathcal{E}$ тангенциального электромагнитного поля на горизонте была экстремальной. Выражение для $\mathcal{E}$ в этом случае имеет вид

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int_H [(B^H)^2 + (E^H)^2] d\Sigma^H, \tag{7.3.14}$$

а интегрирование производится по горизонту.

Наконец, запишем для бессилового поля уравнения (7.3.8) и (7.3.9):

$$dJ = \frac{(\Omega^F - \Omega^H)}{4\pi c} \frac{A^H \sin^2\theta}{\rho_H^2} (B_\perp)^2 d\Sigma^H dt, \tag{7.3.15}$$

$$dM = \frac{\Omega^F(\Omega^F - \Omega^H)}{4\pi c^3} \frac{A^H \sin^2\theta}{\rho_H^2} (B_\perp)^2 d\Sigma^H dt. \tag{7.3.16}$$

Угловой момент и энергия, теряемые черной дырой, передаются вдоль магнитных силовых линий полоидального поля в бессиловой области к "районам", где условие (7.2.19) нарушается.

Заметим, что если $\Omega^F = 0$ (силовые линии магнитного поля, скажем, вморожены в плазму вдали от черной дыры, и эта плазма *не участвует* во вращении вокруг нее), то $dM = 0$, т.е. полная масса дыры сохраняется, а $dJ < 0$, т.е. вращение черной дыры замедляется. При этом вся энергия вращения переходит в массу самой черной дыры (так называемую неприводимую массу; см. § 8.1) – ничего не отдается наружу.

При заданных параметрах черной дыры угловая скорость вращения Ω^F определяется граничным условием вдали от черной дыры, во внешней плазме. Для астрофизических условий ситуация будет рассмотрена в § 7.5.

§ 7.4. Электромагнитные поля в вакууме в окрестности черных дыр

Прежде чем переходить к описанию магнитосферы вращающейся черной дыры, возникающей в условиях, когда на нее происходит аккреция замагниченного газа (см. об этом следующий параграф), приведем в качестве иллюстраций решения следующих задач об электромагнитном поле в вакууме:

1) электрический заряд в вакууме в метрике Шварцшильда [Копсон (1928), Лине (1976), Ханни, Руффини (1973)];

2) магнитное поле в вакууме в метрике Керра, однородное на бесконечности [Уолд (1974b), Торн, Макдональд (1982), Кинг, Лазота (1977)].

Начнем с задачи 1. Пусть заряд q покоится в координатах Шварцшильда при $r = b$, $\theta = 0$. Задача сводится к решению системы (7.2.15)–(7.2.17) с δ-функцией для ρ_e и с $j^P = j^T = 0$. Условия (7.2.15), (7.2.16) выполняются при $\Psi = I = 0$. Из (7.2.13) и (7.2.14) следует тогда отсутствие внешнего магнитного поля. Отсутствуют и внешние токи. Тем самым [см. выражения (7.3.2) и (7.3.3)] равен нулю поверхностный ток на

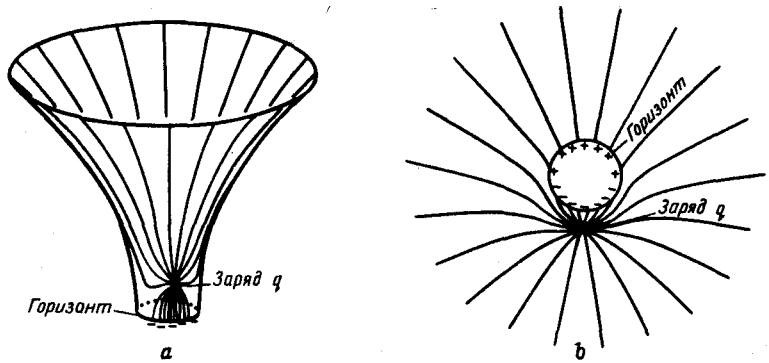

Рис. 70. Силовые линии электрического поля пробного покоящегося заряда q в метрике Шварцшильда в сечении $\varphi = \text{const}$: *а*) силовые линии на искривленной поверхности, геометрия которой совпадает с сечением $\varphi = \text{const}$ метрики Шварцшильда; *в*) то же самое в проекции на плоскость ("вид сверху"). На горизонте изображено распределение фиктивного поверхностного заряда σ^H. Заряд q считается положительным

горизонте $\mathcal{Y}^H = 0$). Из условия (7.3.7) следует, что $E_\parallel \to 0$ у горизонта и электрические силовые линии пересекают его ортогонально. Полный поток E через горизонт равен нулю (черная дыра не заряжена). С этими граничными условиями решение (7.2.17) с $\rho_e = \delta(r - b, \theta)q$ и $\omega = 0$ позволяет найти $\mathcal{A}_0$, а затем из (7.2.11) найти E^P (в этом параграфе везде, кроме окончательных формул, положено $G = 1$, $c = 1$):

$$E^P = \frac{q}{br^2}\left\{M\left(1 - \frac{b - M + M\cos\theta}{D}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{r[(r-M)(b-M) - M^2\cos\theta]}{D^3}[r - M - (b-M)\cos\theta]\right\} e_{\hat{r}} +$$
$$+ \frac{q(b-2M)(1-2M/r)^{1/2}\sin\theta}{D^3} e_{\hat{\theta}}, \qquad (7.4.1)$$

где $e_{\hat{r}}$, $e_{\hat{\theta}}$ — единичные физические векторы вдоль направлений r и θ соответственно, а

$$D \equiv [(r-M)^2 + (b-M)^2 - M^2 - 2(r-M)(b-M)\cos\theta + M^2\cos^2\theta]^{1/2}. \qquad (7.4.2)$$

Картина электрических силовых линий изображена на рис. 70. На границе черной дыры поверхностная плотность заряда определяется (7.3.1):

$$\sigma^H = \frac{q[M(1+\cos^2\theta) - 2(b-M)\cos\theta]}{8\pi b[b - M(1+\cos\theta)]^2}. \qquad (7.4.3)$$

Будем приближать заряд к горизонту ($b \to 2M$). На расстоянии $r \gg b - 2M$ от горизонта силовые линии становятся практически радиальными, а напряженность поля стремится к q/r^2. Таким образом, общая картина, за исключением узкой области вблизи горизонта, выглядит так, как будто заряд находится в центре черной дыры.

Приведем теперь без подробного обоснования решение второй задачи.

Вращающаяся черная дыра помещена в однородное на бесконечности магнитное поле напряженности B_0. В метрике Керра магнитное поле дается следующим выражением:

$$\boldsymbol{B} = \frac{B_0}{2\rho\sin\theta}\left(\frac{\Delta}{A}\right)^{1/2}\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right), \tag{7.4.4}$$

где $x \equiv (A - 4a^2Mr)\sin^2\theta/\rho^2$.

Электрическое поле, индуцируемое вращением черной дыры, пропорционально a:

$$\boldsymbol{E} = \frac{-B_0aA^{1/2}}{\rho^3}\left\{\Delta^{1/2}\left[\frac{\partial\left(\frac{\rho^2\Delta}{A}\right)}{\partial r} + \frac{M\sin^2\theta}{\rho}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\ (A - 4a^2Mr)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{A}\right)\right]\frac{\partial}{\partial r} + \Delta^{-1/2}\left[\frac{\partial\left(\frac{\rho^2\Delta}{A}\right)}{\partial\theta} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{Mr\sin^2\theta}{\rho^2}(A - 4a^2Mr)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{A}\right)\right]\frac{\partial}{\partial\theta}\right\}. \tag{7.4.5}$$

Как и в задаче 1, здесь отсутствуют $\boldsymbol{E}^H$, $\boldsymbol{B}^H$ и $\mathcal{J}^H$ *). Из формул (7.3.8), (7.3.9) следует, что угловой момент вращения черной дыры J и ее масса M остаются неизменными. Кинг и Лазота (1977) показали, что при магнитном поле, наклоненном к оси черной дыры, величина ее углового момента будет меняться. Их рассуждения заключаются в следующем.

Пусть однородное на бесконечности магнитное поле $\boldsymbol{B}$ составляет некоторый угол с направлением углового момента $\boldsymbol{J}$. Разложим $\boldsymbol{J}$ на компоненты – параллельную полю ($\boldsymbol{J}_\parallel$) и перпендикулярную ему ($\boldsymbol{J}_\perp$). Их изменение с течением времени дается формулами

$$\boldsymbol{J}_\parallel = \text{const}, \tag{7.4.6}$$

$$\boldsymbol{J}_\perp = \boldsymbol{J}_\perp(t=0)e^{-t/\tau}, \tag{7.4.7}$$

где

$$\tau = \frac{3}{2}\frac{c^5}{G}M^{-1}(\boldsymbol{B})^{-2} = 10^{36}\ \text{лет}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1}\left(\frac{B}{10^{-5}\ \text{Гс}}\right)^{-2}. \tag{7.4.8}$$

Таким образом, с течением времени полностью теряется компонента $\boldsymbol{J}_\perp$ углового момента черной дыры. При статическом внешнем магнитном поле энергия вращения, связанная с $\boldsymbol{J}_\perp$, переходит в "неприводимую" массу черной дыры, а компонента $\boldsymbol{J}_\parallel$ не меняется.

) Если вычислить (см. § 7.3) компоненты поля $\boldsymbol{E}_\perp$ и $\boldsymbol{B}_\perp$ на горизонте событий, то оказывается, что обе они пропорциональны $r_+ - M$, где $r_+ = M + (M^2 - a^2)^{1/2}$. Поэтому для максимально быстро вращающейся черной дыры с $a_{\max} = M$ имеем $E_\perp = 0$ и $\boldsymbol{B}_\perp = 0$ на горизонте, т.е. силовые линии осесимметричного поля не пронизывают черную дыру (случай неосесимметричного поля см. далее). Задачи электродинамики черных дыр рассматривали также Лейт, Лине (1976, 1978), Мизра (1977), Галыцов, Петухов (1978), Лине (1976, 1977a, b, 1979), Демянский, Новиков (1982), Бичак, Дворак (1980); см. также §§ 8.2–8.4.

Конечное состояние черной дыры соответствует теореме Хокинга о том, что стационарное состояние должно быть осесимметричным. Пресс (1972) отметил, что если внешнее магнитное (или любое другое) поле неосесимметрично, то черная дыра в конце концов полностью потеряет свой угловой момент J согласно теореме Хокинга. При этом, если поле B плавно меняется на масштабах, много больших размеров черной дыры, то можно снова разложить J на $J_\parallel$ и $J_\perp$ относительно направления поля в ее окрестности. Уменьшение $J_\perp$ по-прежнему определяется по порядку величины формулой (7.4.7), а уменьшение $J_\parallel$ оценивается формулой

$$\frac{dJ_\parallel}{dt} \approx -\frac{J_\parallel}{\tau} O\left(\frac{r_g}{R}\right), \tag{7.4.9}$$

где R – масштаб неоднородности поля.

В сноске на с. 149 отмечалось, что в случае $a = a_{max}$ осесимметричное магнитное поле не пронизывает горизонт черной дыры. Бичак (1983, 1985) показал, что в случае наклонного к оси вращения однородного на бесконечности магнитного поля B_0 поток через половину*) горизонта компоненты поля $B_{0\perp}$ максимален при $a = a_{max}$ и равен

$$\tilde{\Phi}_{max} \approx 2{,}25 B_{0\perp} \pi M^2. \tag{7.4.10}$$

Наконец, рассмотрим *невращающуюся* черную дыру, помещенную в однородное на бесконечности сильное магнитное поле B_0 [Бичак, (1983)]. Пусть оно настолько сильное, что необходимо учитывать его самогравитацию. Тогда оказывается, что для фиксированной массы черной дыры M существует такое критическое B_{0cr}, при котором поток $\tilde{\Phi}$ через половину горизонта событий максимален:

$$B_{0cr} = 2c^4 G^{-3/2} M^{-1} = 5 \cdot 10^{13}\ \text{Гс} \cdot \left(\frac{10^6 M_\odot}{M}\right), \tag{7.4.11}$$

$$\tilde{\Phi}_{max,1} = 4\pi G^{1/2} M. \tag{7.4.12}$$

Потока поля через горизонт, большего, чем $\tilde{\Phi}_{max,1}$, быть не может.

§ 7.5. Магнитосфера черной дыры

Задачи, рассмотренные в предыдущем параграфе, иллюстрируют важные свойства электрических и магнитных полей в окрестности черных дыр. Однако эти задачи вряд ли непосредственно приложимы к описанию реальных электродинамических процессов, которые должны протекать в астрофизических условиях. Причина этого, как уже отмечалось, состоит в том, что в окрестности черной дыры поля не могут рассматриваться как вакуумные – всегда имеется разреженная плазма (и поле становится бессиловым) или же возникают еще более сложные ситуации.

---

*) Полный поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность, в том числе и горизонт, конечно, равен нулю (см. § 7.1). Когда говорят о потоке поля, пронизывающего дыру, рассматривают только входящие (или выходящие) силовые линии.