ФИЗИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ПОЛЕ ЧЕРНЫХ ДЫР. ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

§ 8.1. Извлечение энергии из черных дыр. Суперрадиация

В этой главе мы продолжим обсуждение эффектов взаимодействия классических частиц и полей с черными дырами*). Начнем с рассмотрения вопроса об эффективности процесса извлечения энергии из вращающихся черных дыр. Напомним, что хотя по определению черная дыра – это область, откуда никакие тела и световые лучи не могут выйти наружу, существуют ситуации, когда с помощью определенных физических процессов можно извлекать из черной дыры энергию. Как мы увидим далее, эта энергия извлекается из поля, связанного с черной дырой и окружающего ее. Это, в частности, возможно, когда черная дыра вращается или является заряженной. Примерами таких процессов служат процесс Пенроуза (см. § 6.2) и электродинамические процессы, рассмотренные в предыдущей главе. В этом параграфе мы установим некоторые общие ограничения на возможную эффективность такого рода процессов.

Рассмотрим эффективность процесса Пенроуза (см. рис. 64). Пусть $\epsilon_i = -p_i^\mu \xi_{(t)\mu}$ – энергия и $j_i = p_i^\mu \xi_{(\varphi)\mu}$ – угловой момент частицы i с импульсом p_i^μ, движущейся в гравитационном поле керровской черной дыры ($i = 0$ отвечает падающей частице, распадающейся в эргосфере; $i = 1$ – частице, вылетающей на бесконечность; $i = 2$ – частице, поглощаемой черной дырой). Заметим теперь, что на горизонте событий вектор

$$l^\mu = \xi^\mu_{(t)} + \Omega^H \xi^\mu_{(\varphi)}, \tag{8.1.1}$$

где Ω^H – угловая скорость черной дыры, является световым и касательным к образующим горизонта. Поскольку p_2^μ – времениподобный вектор, а l^μ направлен в будущее, то

$$0 \geqslant l^\mu p_{2\mu} = -\epsilon_2 + \Omega^H j_2 \tag{8.1.2}$$

и, следовательно, для частицы, падающей внутрь черной дыры,

$$j_2 \leqslant \epsilon_2/\Omega^H. \tag{8.1.3}$$

В частности, если вылетающая частица обладает большей энергией, чем падающая ($\epsilon_1 - \epsilon_0 = -\epsilon_2 > 0$), то аналогичное соотношение выполняется и для угловых моментов:

$$j_1 - j_0 = -j_2 \geqslant -\epsilon_2/\Omega^H \geqslant 0. \tag{8.1.4}$$

*) Особенности физических процессов в поле черных дыр, для которых существенна их квантовая специфика, обсуждаются в последующих главах.

При поглощении частицы черной дырой ее параметры M и J изменяются:

$$\delta M = \epsilon_2, \quad \delta J = j_2, \tag{8.1.5}$$

причем условие (8.1.3) означает, что

$$\delta M \geqslant \Omega^H \delta J. \tag{8.1.6}$$

Физические процессы, приводящие к такому изменению параметров δM и δJ черной дыры, которые связаны соотношением

$$\delta M/\Omega^H - \delta J = 0, \tag{8.1.7}$$

называют *обратимыми*. Дифференциальное уравнение (8.1.7), связывающее изменение параметров M и J при обратимом процессе, можно проинтегрировать [Кристодулу (1970)]. Для этого заметим, что полный дифференциал функции

$$\tilde{A} = M^2 + \sqrt{M^4 - J^2} \tag{8.1.8}$$

записывается в виде

$$\delta\tilde{A} = \frac{J}{\sqrt{M^4 - J^2}} \left(\frac{\delta M}{\Omega^H} - \delta J \right). \tag{8.1.9}$$

Здесь

$$\Omega^H = \frac{a}{r_+^2 + a^2} = \frac{a}{2Mr_+} = \frac{J}{2(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2})}.$$

Из соотношений (8.1.6) и (8.1.9) видно, что для рассмотренных выше процессов, связанных с падением частиц на черную дыру, имеет место неравенство

$$\delta\tilde{A} \geqslant 0, \tag{8.1.10}$$

причем равенство справедливо тогда и только тогда, когда процесс обратимый. Величина

$$M_{\text{ir}} = (\tilde{A}/2)^{1/2} \tag{8.1.11}$$

получила название *неприводимой массы* черной дыры [Кристодулу (1970)]. Из уравнений (8.1.8) и (8.1.11) получаем

$$M^2 = M_{\text{ir}}^2 + \frac{1}{4}\frac{J^2}{M_{\text{ir}}^2} \geqslant M_{\text{ir}}^2. \tag{8.1.12}$$

Из этого соотношения вытекает, что в результате процесса Пенроуза исходную массу M нельзя сделать меньше M_{ir}, и, следовательно, максимально возможный выигрыш энергии в этом процессе равен $\Delta\mathcal{E} = \Delta Mc^2$, где

$$\Delta M = M_0 - M_{\text{ir}}(M_0, J_0), \tag{8.1.13}$$

а M_0 и J_0 – исходные масса и угловой момент черной дыры, $M_{\text{ir}}(M_0, J_0)$ – отвечающая им неприводимая масса.

Простые рассуждения показывают, что при заданной начальной массе M_0 максимальное значение ΔM:

$$\Delta M_{\max} = (1 - 1/\sqrt{2})\, M_0 \approx 0{,}29 M_0 \tag{8.1.14}$$

достигается для экстремальной черной дыры с $J_0 = M_0^2$.

Нетрудно убедиться, что величина $\tilde{A}$ лишь численным коэффициентом отличается от выражения для площади A керровской черной дыры:

$$A \equiv 4\pi (r_+^2 + a^2) = 8\pi \tilde{A}. \tag{8.1.15}$$

Поэтому условие (8.1.10), означающее неубывание площади поверхности черной дыры для рассматриваемых процессов, по сути дела, является частным случаем общей теоремы Хокинга (§ 5.4).

Теорема Хокинга позволяет сделать ряд общих выводов относительно процессов с участием черных дыр. Прежде всего, неравенство (8.1.6) нетрудно распространить на случай заряженных черных дыр и для процессов, в которых участвуют заряженные частицы. Для этого достаточно воспользоваться выражением (8.1.15), где в случае заряженной вращающейся дыры

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}. \tag{8.1.16}$$

Условие $\delta A \geqslant 0$ в этом случае дает

$$\delta M \geqslant \Omega^H \delta J + \Phi^H \delta Q, \tag{8.1.17}$$

где δJ и δQ – изменение углового момента и заряда черной дыры, а

$$\Phi^H = Q r_+ / (r_+^2 + a^2) \tag{8.1.18}$$

– ее электрический потенциал.

Если в соотношении (8.1.17), обобщающем (8.1.6), имеет место равенство, то, как и ранее, такие процессы будем называть обратимыми. Общим свойством обратимых процессов является то, что площадь поверхности черных дыр для них не возрастает.

Подчеркнем, что в выражении (8.1.17) δJ – полное изменение углового момента черной дыры. При этом не играет роли – связано ли это изменение с угловым моментом падающей частицы, отвечающим ее орбитальному движению, или с ее внутренним угловым моментом (спином). Применение общего неравенства (8 1.17) в последнем случае позволяет, в частности, показать, что со стороны вращающейся черной дыры на спиновую частицу действует дополнительное гравитационное спин-спиновое взаимодействие [Хокинг, (1972a), Уолд (1972), Бекенштейн (1973b)].

Рассмотрим в качестве иллюстрации простейший случай, когда частица со спином s и зарядом e, обладая энергией ϵ, падает на черную дыру, двигаясь точно по оси симметрии. Если такая частица упадет в черную дыру, то, используя законы сохранения, имеем

$$\delta Q = e, \quad \delta J = \sigma s, \quad \delta M \leqslant \epsilon. \tag{8.1.19}$$

Здесь $\sigma = 1$, если спин направлен по направлению вращения черной дыры, и $\sigma = -1$ в противоположном случае. Возможность неравенства в последнем из соотношений (8.1.19) связана с тем, что часть энергии может быть излучена. Соотношения (8.1.17) и (8.1.19) показывают, что частица со спином может упасть на черную дыру только в том случае, если ее энергия ϵ превышает величину $\sigma s \Omega^H + e\Phi^H$. Второе слагаемое $e\Phi^H$ имеет смысл обычной электростатической энергии отталкивания. Первое слагаемое при $\sigma = 1$ описывает отталкивание, а при $\sigma = -1$ – притяжение за счет спин-спинового взаимодействия [в теории гравитации подобное взаимодействие имеет место для любых двух вращающихся тел; подробный вывод выражения для этой силы и описание аналогии между гравитационным

спин-спиновым взаимодействием и электромагнитным взаимодействием магнитных диполей см. Уолд (1972)].

Поскольку движение частиц в приближении геометрической оптики непосредственно связывается с распространением волновых пакетов, естественно ожидать, что при определенных условиях падение волны на вращающуюся черную дыру также может приводить к усилению этой волны. Убедимся (с помощью теоремы Хокинга), что этот процесс действительно возможен, и выведем условия, при которых он имеет место.

Поскольку метрика Керра – Ньюмена, описывающая геометрию заряженной черной дыры, является стационарной и аксиально-симметричной, при описании распространения волны на ее фоне удобно использовать разложение по собственным функциям операторов $\xi^{\mu}_{(t)}\partial_{\mu} \equiv \partial_t$ и $\xi^{\mu}_{(\varphi)}\partial_{\mu} \equiv \partial_{\varphi}$. Рассмотрим поведение моды поля φ_A с квантовыми числами ω, m, временная и угловая зависимость которой имеет вид

$$\varphi_A \sim f_A(r, \theta)\exp(-i\omega t + im\varphi). \tag{8.1.20}$$

Поле φ_A может описывать скалярные, электромагнитные, гравитационные волны*) (или другие бозонные поля, кванты которых, в частности, могут обладать массой μ и зарядом e). Вдали от черной дыры решение (8.1.20) описывает совокупность квантов, каждый из которых обладает энергией $\hbar\omega$, φ-компонентой углового момента $\hbar m$, а также, возможно, электрическим зарядом e. Поэтому для такой волны отношения потока φ-компоненты углового момента и электрического заряда через сферу большого радиуса, окружающую черную дыру, к потоку энергии через эту сферу равны соответственно m/ω и $e/\hbar\omega$. (Это нетрудно доказать строго с помощью явных выражений для тензора энергии-импульса и тока, отвечающих рассматриваемому полю φ_A.) Используя законы сохранения энергии и углового момента, связанные с симметрией рассматриваемой задачи, и закон сохранения электрического заряда, можно показать, что взаимодействие волны φ_A с черной дырой приводит к изменению массы δM, углового момента δJ и заряда δQ последней, причем

$$\delta J = \frac{m}{\omega}\,\delta M, \quad \delta Q = \frac{e}{\hbar\omega}\,\delta M. \tag{8.1.21}$$

Используя неравенство (8.1.17), вытекающее из теоремы Хокинга, получаем

$$\delta M\left(1 - \frac{m\Omega^H}{\omega} - \frac{e\Phi^H}{\hbar\omega}\right) \geqslant 0. \tag{8.1.22}$$

В частности, для мод, удовлетворяющих условию

$$\hbar\omega < \hbar m\Omega^H + e\Phi^H, \tag{8.1.23}$$

процесс рассеяния приводит к уменьшению массы черной дыры. При выполнении этого условия рассеянная волна обладает энергией, большей, чем

*) При распространении электромагнитных и гравитационных волн вблизи заряженной черной дыры возможно их взаимное превращение друг в друга (подробно этот эффект рассмотрен в § 8.4). Этот эффект смешивания не изменяет общего условия усиления волн, однако требует более аккуратного рассмотрения.

падающая, т.е. происходит усиление падающей волны [Зельдович (1971*, 1972*); Мизнер (1972); Старобинский (1973*); Старобинский, Чурилов (1973*); Унру (1974)]. Это явление получило название *суперрадиации*.

На возможность эффекта усиления волн вращающимися черными дырами было впервые обращено внимание Зельдовичем (1971, 1972), который исходил из аналогии таких черных дыр с вращающимися поглощающими телами. Для последних описанный Зельдовичем эффект усиления родствен в известной мере по своей природе эффекту Вавилова – Черенкова. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим в обычном плоском пространстве цилиндрическую волну, падающую на цилиндр радиуса R, вращающийся с угловой скоростью Ω относительно оси, совпадающей с осью z. Соответствующее решение φ_A имеет вид

$$\varphi_A = f_A(\rho)\exp[i(m\varphi - \omega t)]. \tag{8.1.24}$$

На поверхности цилиндра $\rho = R$ это поле отвечает возмущению, бегущему с фазовой скоростью $d\varphi/dt = \omega/m$. Если скорость ΩR движения вещества поверхности диэлектрического или проводящего цилиндра превышает линейную скорость $R\omega/m$, с которой фаза падающей волны перемещается по поверхности цилиндра, вместо поглощения происходит усиление волны. Соответствующее условие имеет вид

$$\omega < \Omega m. \tag{8.1.25}$$

Подробное обсуждение относящихся к этому эффекту вопросов можно найти в работе Болотовского, Столярова (1980*).

Подчеркнем, что условие усиления (8.1.23) универсально и не зависит от спина поля. Для частиц со спином m отвечает квантовому числу полного (орбитального или спинового) углового момента. От спина поля существенно зависит величина коэффициента усиления волны. Если для электромагнитного поля максимальное увеличение энергии волны составляет 4,4%, то для гравитационной волны – уже 138% [Старобинский, Чурилов (1973*)]. При определенных условиях такое усиление возможно для гравитационного излучения от частицы, движущейся вблизи вращающейся черной дыры. Если при этом частице сообщается такая же энергия, какую она излучает на бесконечность, то такая частица будет обращаться, не падая на черную дыру, и может служить своеобразным катализатором для извлечения энергии из черной дыры. Подобные орбиты получили название "*плавающих*" [Мизнер (1972), Пресс, Тюкольский (1972)].

С явлением суперрадиации связан следующий, довольно любопытный эффект [Дамур и др. (1976), Зурос, Эрдли (1979), Детвилер (1980)]. Пусть вне вращающейся черной дыры по круговой орбите вращается волновой пакет массивного скалярного поля и пусть энергия связи на этой орбите такова, что массивные частицы, составляющие этот пакет, не могут излучиться на бесконечность. Возможен, однако, поток этих частиц через горизонт событий. Если частота квантов, падающих внутрь черной дыры, удовлетворяет условию суперрадиации, то их падение сопровождается более интенсивным излучением наружу. Частицы этого излучения, обладая теми же квантовыми числами, что и частицы пакета, не могут вылететь на бесконечность, что приводит к накоплению их вблизи орбиты пакета и в конечном счете к развитию неустойчивости. Детвилер (1980) показал,

что эта неустойчивость имеет место для скалярного поля с массой μ такой, что $\mu M/m_{\rm Pl}^2 \ll 1$; при этом характерное время развития неустойчивости

$$\tau = 24\,(a/M)^{-1}\,(m_{\rm Pl}^2/\mu M)^8\,(m_{\rm Pl}/\mu)\,t_{\rm Pl}, \tag{8.1.26}$$

где

$$m_{\rm Pl} = (\hbar c/G)^{1/2} \approx 2{,}18\cdot 10^{-5}\ \text{г},$$
$$t_{\rm Pl} = (\hbar G/c^5)^{1/2} \approx 5{,}39\cdot 10^{-43}\ \text{с} \tag{8.1.27}$$

– планковская масса и планковское время соответственно. Для безмассовых полей эта неустойчивость отсутствует [Детвилер, Ипсер (1973), Пресс, Тюкольский (1973), Тюкольский, Пресс (1974)].

Следует отметить, что хотя описанные выше в этом параграфе процессы (процесс Пенроуза и суперрадиация), приводящие к потере черной дырой энергии, имеют крайне важное принципиальное значение для физики черных дыр, в реальных астрофизических условиях трудно ожидать, чтобы они могли приводить к существенным наблюдаемым явлениям [Машхун (1973), Уолд (1974c), Ковец, Пиран (1975a, b)]. Более интересными по своим возможным следствиям могут быть аналоги процесса Пенроуза, в которых вместо развала частицы происходит столкновение в эргосфере двух частиц, приводящее к образованию двух новых частиц, одна из которых вылетает на бесконечность [Пиран и др. (1975)]. Разновидностью описанного эффекта является комптоновское рассеяние свободно падающего фотона на электроне, обладающем большим угловым моментом и движущемся в эргосфере [Пиран, Шахам (1977)].

§ 8.2. Глобальная структура поля пробного заряда в пространстве-времени вечной черной дыры

При изучении процессов, происходящих вне черной дыры, естественным является описанный в предыдущей главе подход, состоящий в том, что с помощью фиксации определенным образом выбранных граничных условий на поверхности черной дыры физическая задача в полном пространстве-времени сводится к задаче во внешней области. Обладая рядом достоинств, этот подход по своей природе является неполным, поскольку в нем целиком исключаются из рассмотрения все явления, происходящие внутри черной дыры. Следует подчеркнуть, что изучение подобных явлений и, в частности, детальное описание особенностей физи-

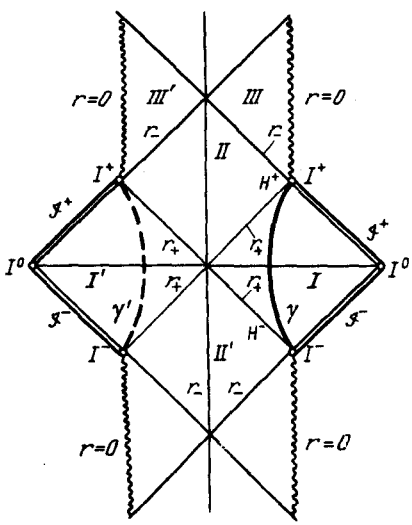

Рис. 72. Диаграмма Пенроуза для полного пространства-времени черной дыры Рейснера – Нордстрема