

что эта неустойчивость имеет место для скалярного поля с массой μ такой, что $\mu M/m_{\text{Pl}}^2 \ll 1$; при этом характерное время развития неустойчивости

$$\tau = 24(a/M)^{-1} (m_{\text{Pl}}^2/\mu M)^8 (m_{\text{Pl}}/\mu) t_{\text{Pl}}, \quad (8.1.26)$$

где

$$m_{\text{Pl}} = (\hbar c/G)^{1/2} \approx 2,18 \cdot 10^{-5} \text{ г},$$

$$(8.1.27)$$

$$t_{\text{Pl}} = (\hbar G/c^5)^{1/2} \approx 5,39 \cdot 10^{-43} \text{ с}$$

— планковская масса и планковское время соответственно. Для безмассовых полей эта неустойчивость отсутствует [Детвилер, Ипсер (1973), Пресс, Тюкольский (1973), Тюкольский, Пресс (1974)].

Следует отметить, что хотя описанные выше в этом параграфе процессы (процесс Пенроуза и суперрадиация), приводящие к потере черной дырой энергии, имеют крайне важное принципиальное значение для физики черных дыр, в реальных астрофизических условиях трудно ожидать, чтобы они могли приводить к существенным наблюдаемым явлениям [Машхун (1973), Уолд (1974c), Ковец, Пиран (1975a, b)]. Более интересными по своим возможным следствиям могут быть аналоги процесса Пенроуза, в которых вместо раз渲ла частицы происходит столкновение в эргосфере двух частиц, приводящее к образованию двух новых частиц, одна из которых вылетает на бесконечность [Пиран и др. (1975)]. Разновидностью описанного эффекта является комптоновское рассеяние свободно падающего фотона на электроне, обладающем большим угловым моментом и движущемся в эргосфере [Пиран, Шахам (1977)].

§ 8.2. Глобальная структура поля пробного заряда в пространстве-времени вечной черной дыры

При изучении процессов, происходящих вне черной дыры, естественным является описанный в предыдущей главе подход, состоящий в том, что с

помощью фиксации определенным образом выбранных граничных условий на поверхности черной дыры физическая задача в полном пространстве-времени сводится к задаче во внешней области. Обладая рядом достоинств, этот подход по своей природе является неполным, поскольку в нем целиком исключаются из рассмотрения все явления, происходящие внутри черной дыры. Следует подчеркнуть, что изучение подобных явлений и, в частности, детальное описание особенностей физи-

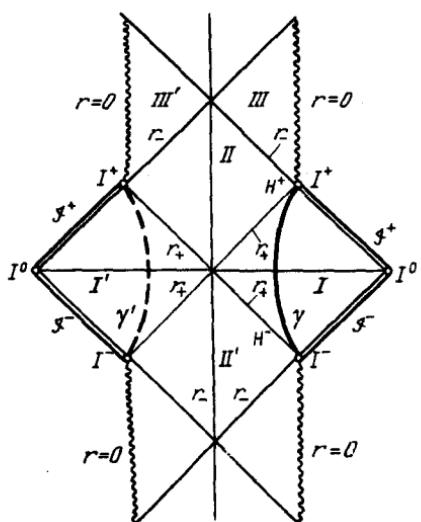


Рис. 72. Диаграмма Пенроуза для полного пространства-времени черной дыры Рейснера – Нордстрема

ческих процессов в тех областях пространства-времени, где согласно классической теории должны находиться сингулярности, представляют важную задачу физики черных дыр. В этих областях, где кривизна пространства-времени велика, в полной мере проявляются квантовые особенности физических взаимодействий. Общий вопрос о структуре пространства-времени внутри черной дыры мы обсудим в гл. 12, после того как изложим теорию квантовых эффектов в черных дырах. В настоящем параграфе мы рассмотрим частный вопрос о структуре физических полей, создаваемых пробными зарядами в полном пространстве-времени черной дыры. При этом рассмотрении мы считаем метрику черной дыры заданной и пренебрегаем влиянием на нее поля пробного заряда.

Пусть пробный точечный заряд электрического (e) или скалярного безмассового (g) поля поконится вне заряженной вечной черной дыры*). На рис. 72, на котором приведена диаграмма Пенроуза для рассматриваемого пространства-времени, мировая линия этого заряда обозначена γ . Метрика Рейсснера — Нордстрема, описывающая гравитационное поле заряженной черной дыры в координатах t, r , покрывающих область I на этом рисунке, имеет вид

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + F^{-1}(r)dr^2 + r^2d\omega^2, \quad (8.2.1)$$

$$F = 1 - 2M/r + Q^2/r^2, \quad d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2,$$

где M — масса, а Q — электрический заряд черной дыры.

Электрическое (A_μ) и скалярное (φ) поля, создаваемые пробным зарядом, покоящимся в точке r_0, θ_0, φ_0 , определяются как решения уравнений [см. (П. 47), (П. 50)]

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = 4\pi j^\mu, \quad F_{\mu\nu} = 2A_{[\nu,\mu]}I, \quad (8.2.2a)$$

$$\square\varphi = -4\pi\rho, \quad (8.2.2b)$$

где

$$j^\mu(x) = e\delta_0^\mu \frac{\delta^3(x - x_0)}{\sqrt{-g(x)}}, \quad \rho(x) = g \frac{\sqrt{-g_{rr}(x)}}{\sqrt{-g(x)}} \delta^3(x - x_0),$$

$$\delta^3(x - x_0) \equiv \delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)\delta(\varphi - \varphi_0). \quad (8.2.3)$$

Решения этих уравнений вне черной дыры (в области I) были получены Лине (1976) и Лейтом, Лине (1976), обнаружившими и исправившими небольшую неточность в формуле, выведенной ранее (при $Q = 0$) Копсоном (1928). Эти решения имеют вид**) [ср. с (7.4.1)]

$$A_\mu(x) = \delta_\mu^0 eG_{em}(x, x_0), \quad G_{em}(x, x_0) = -\frac{1}{rr_0} \left(M + \frac{\Pi}{R} \right), \quad (8.2.4a)$$

$$\varphi(x) = gF(r_0)^{1/2}G_{sc}(x, x_0), \quad G_{sc}(x, x_0) = \frac{1}{R}, \quad (8.2.4b)$$

*) Отметим, что такая постановка задачи в известной мере является идеализированной из-за неустойчивости, присущей подобной черной дыре (см. §§ 12.2 и 13.2).

**) Строго говоря, уравнение (8.2.2a) справедливо лишь для полного электрического поля (т.е. для суммы поля пробного заряда и поля черной дыры). Если поле

где

$$\begin{aligned}
 R^2 &\equiv R^2(x, x_0) = \\
 &= (r - M)^2 + (r_0 - M)^2 - 2(r - M)(r_0 - M)\lambda - (M^2 - Q^2)(1 - \lambda^2), \\
 \Pi &\equiv \Pi(x, x_0) = (r - M)(r_0 - M) - (M^2 - Q^2)\lambda, \\
 \lambda &= \cos\theta \cos\theta_0 + \sin\theta \sin\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0).
 \end{aligned} \tag{8.2.5}$$

Используя метод аналитического продолжения, можно распространить это решение из области I на все пространство-время. Для этого введем в областях I, II, I', II' координаты u, v, θ, φ , регулярные в этих областях и связанные в области I с координатами r, t, θ, φ соотношениями

$$\begin{aligned}
 u &= -\exp\left[-\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}(t - r^*)\right], \quad v = \exp\left[\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}(t + r^*)\right], \\
 r^* &= r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right|, \\
 r_{\pm} &\equiv M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}, \quad \theta = \theta, \quad \varphi = \varphi.
 \end{aligned} \tag{8.2.6}$$

При $-\infty < u, v < \infty$, $(\theta, \varphi) \in S^2$ эти координаты покрывают области I, II, I', II', и аналитическое продолжение метрики Рейсснера – Нордстрема (8.2.1) в них имеет вид

$$ds = -2Bdu dv + r^2 d\omega^2, \tag{8.2.7}$$

где

$$B = \frac{2r_+^4}{r^2} \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{(r_+ - r_-)^2} \exp\left(-r^* \frac{r_+ - r_-}{r_+^2}\right),$$

а $r = r(u, v)$ определяется уравнением

$$uv = \left(1 - \frac{r}{r_+}\right) \exp\left[\left(r - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right|\right) \left(\frac{r_+ - r_-}{r_+^2}\right)\right]. \tag{8.2.8}$$

Отличные от нуля компоненты аналитически продолженных решений (8.2.2) в этих координатах суть

$$A \equiv A_\mu dx^\mu = -\frac{e}{rr_0} \left(M + \frac{\Pi}{R}\right) \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \left(\frac{dv}{v} - \frac{du}{u}\right), \tag{8.2.9}$$

$$F^{uv} = \frac{e}{Br^2 r_0} \left\{ M + \frac{\Pi}{R} - \frac{r}{R^3} [r_0 - M - (r - M)\cos\theta] (r_0^2 - 2Mr_0 + Q^2) \right\},$$

$$F^{v\theta} = \frac{e}{2rr_0} \frac{\sin\theta}{R^3} \frac{r_+ - r_-}{r_+^2} (r_0^2 - 2Mr_0 + Q^2)v, \tag{8.2.10}$$

пробного заряда рассматривать как возмущение, то уравнение для этого возмущения отличается от (8.2.2а) членами, описывающими возмущение гравитационного поля (см. § 8.4). Мы, следуя работам Лине и Лейта, опускаем эти дополнительные члены, что не изменяет общего вывода об особенностях поля внутри черной дыры. При $Q = 0$ эти дополнительные члены отсутствуют.

$$F^{u\theta} = - \frac{e}{2r_0} \frac{\sin \theta}{R^3} \frac{r_+ - r_-}{r_+^2} (r_0^2 - 2Mr_0 + Q^2)u,$$

$$\varphi = gF(r_0)^{1/2} \frac{1}{R}. \quad (8.2.11)$$

В этих формулах r понимается как функция от u и v , определяемая соотношением (8.2.8). Нетрудно видеть, что это решение инвариантно относительно преобразования $u \rightarrow -u$, $v \rightarrow -v$, отображающего область I на область I'. Поэтому наряду с сингулярностью, отвечающей мировой линии γ заряда, оно обладает также сингулярностью на линии γ' , отвечающей дополнительному заряду $-e$ (или $-g$ в случае скалярного поля) в области I'. Поэтому выражения (8.2.9) – (8.2.11) не являются решением поставленной задачи о нахождении поля, создаваемого одиночным зарядом.

Искомое решение может быть получено, если учесть, что в областях I' и II', лежащих вне области влияния пробных зарядов, поле естественно выбрать равным нулю*). Это решение может быть представлено в следующем виде [Зельников, Фролов (1982*, 1983*), Демянский, Новиков (1982)]:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{\text{reg}} + F_{\mu\nu}^{\text{sing}}, \quad F_{\mu\nu}^{\text{reg}} = F_{\mu\nu}\theta(v), \quad F_{\mu\nu}^{\text{sing}} = \Psi_{\mu\nu}\delta(v), \quad (8.2.12a)$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi^{\text{reg}} + \varphi^{\text{sing}}, \quad \varphi^{\text{reg}} = \varphi\theta(v), \quad \varphi^{\text{sing}} = \Psi\delta(v), \quad (8.2.12b)$$

где $F_{\mu\nu}$ и φ – решения (8.2.10) и (8.2.11). Сингулярные члены $F_{\mu\nu}^{\text{sing}}$ и φ^{sing} обеспечивают выполнимость однородных уравнений поля на поверхности $v = 0$. Подставляя (8.2.12a) в уравнения Максвелла (8.2.2a), получаем

$$\Psi^{\mu\nu} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} \Psi^{\mu\nu}) = -F^{\mu\nu} \Big|_{v=0}. \quad (8.2.13)$$

Ограничено на H^- решение этих уравнений имеет вид

$$\Psi_{\mu\nu} = -2e\delta_{[\mu}^\nu \delta_{\nu]}^\theta \sin \theta \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{r_0} \frac{M + \sqrt{M^2 - Q^2}}{r_0 - M - \sqrt{M^2 - Q^2} \cos \theta}. \quad (8.2.14)$$

Аналогично, подставляя (8.2.12b) в уравнение для скалярного поля (8.2.2b), получаем

$$(1 - \lambda^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} - 2\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} - \frac{r_+ - r_-}{r_+} \Psi = 0, \quad (8.2.15)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} = 0, \quad \lambda = \cos \theta.$$

Если черная дыра не является экстремальной ($Q < M$), то единственным ограниченным на H^- решением (8.2.15) будет $\Psi = 0$. Для экстремальной

*.) Обсуждение вопроса о граничных условиях для поля пробного заряда в пространстве-времени вечной черной дыры можно найти в работе Демянского, Новикова (1982).

черной дыры ($Q = M$) имеется также решение $\Psi = \text{const}$, однако значение $\Psi|_{H^-}$ не определяется внешним скалярным полем и поэтому не имеет отношения к заряду g . Таким образом, в областях I, II, I' и II' решение поставленной задачи дается соотношениями (8.2.12a), (8.2.12b) и (8.2.13) при $\Psi = 0$.

Аналитическое продолжение легко позволяет определить A_μ и φ в области III'. Вне горизонта Коши (например, в области III) решение однозначно распространить, вообще говоря, нельзя, поскольку в этой области оно зависит от условий, которые требуется задавать дополнительно. В пределе $Q = 0$ полученное решение описывает поля от точечных источников в пространстве-времени вечной шварцшильдовской черной дыры, метрика которой в координатах u, v, θ, φ имеет вид*)

$$ds^2 = -2B du dv + r^2 d\omega^2, \quad (8.2.16)$$

где

$$\begin{aligned} B &= \frac{2r_g^3}{r} e^{-r/r_g}, \quad r_g = 2M, \\ uv &= \left(1 - \frac{r}{r_g}\right) e^{r/r_g}. \end{aligned} \quad (8.2.17)$$

Появление δ -образной особенности в полученном выше решении для электромагнитного поля связано с постановкой задачи, при которой считается, что заряд все время покоился около черной дыры. Аналогичная особенность возникает и в полном решении, описывающем массивное векторное поле от источника вне черной дыры [Фролов (1978, 1986*)] **. Описанные выше особенности при $v = 0$ сглаживаются, если рассмотреть решения, описывающие случай, когда заряд вносится в поле черной дыры.

Интересно отметить, что имеется тесная связь полученного выше полного решения для поля от пробного заряда в пространстве-времени черной дыры с решением для поля от равноускоренного заряда в плоском пространстве-времени [Зельников, Фролов (1982*, 1983*)]. Для установления этой связи заметим, что если в метрике (8.2.16), описывающей гравитационное поле черной дыры, устремить параметр M к бесконечности, то в конечной области пространства-времени вблизи горизонта событий влияние кривизны неограниченно уменьшается, и гравитационное поле в этой области все с большей степенью точности можно считать однородным. Формально переход к пределу однородного поля в метрике (8.2.16) осуществляется следующим образом. Вводятся координаты U, V, X, Y , связанные с u, v, θ, φ соотношениями

$$\begin{aligned} U &= 4Me^{-1/2}u, \quad V = 4Me^{-1/2}v, \\ X^2 + Y^2 &= 16M^2 \operatorname{tg}^2(\theta/2), \quad Y/X = \operatorname{tg}\varphi. \end{aligned} \quad (8.2.18)$$

*) Эти координаты связаны с координатами \tilde{u}, \tilde{v} [см. (2.7.12)] соотношениями $u = \tilde{v} - \tilde{u}$, $v = \tilde{v} + \tilde{u}$.

**) О поведении массивного векторного поля вблизи шварцшильдовской черной дыры см. также Гальцов и др. (1984*).

В этих координатах метрика (8.2.16) принимает вид

$$ds^2 = -\frac{2M}{r} e^{1-r/2M} dUdV + \left(\frac{r}{2M}\right)^2 \frac{dX^2 + dY^2}{\left(1 + \frac{X^2 + Y^2}{16M^2}\right)}, \quad (8.2.19)$$

где r связано с U и V соотношением

$$UV = 16M^2 \left(1 - \frac{r}{2M}\right) e^{r/2M-1}. \quad (8.2.20)$$

Если теперь при фиксированных значениях координат U, V, X, Y устремить M к бесконечности, то (8.2.19) переходит в метрику плоского пространства

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dUdV + dX^2 + dY^2 = -dT^2 + dZ^2 + dX^2 + dY^2 = \\ &= -dT^2 + dZ^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2. \end{aligned} \quad (8.2.21)$$

Здесь

$$T = \frac{1}{2}(U + V), \quad Z = -\frac{1}{2}(U - V), \quad \rho^2 = X^2 + Y^2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Y}{X}. \quad (8.2.22)$$

Уравнение $r = r_0$ движения пробного заряда при этом принимает вид

$$U_0 V_0 \equiv -Z_0^2 + T^2 = -w^{-2}, \quad X_0 = Y_0 = 0, \quad (8.2.23)$$

где w — модуль 4-ускорения движения заряда. В пределе $M \rightarrow \infty$ поверхности горизонтов H^\pm превращаются в световые гиперплоскости, описываемые уравнением $UV = 0$ [”горизонты” пространства Ринделера (1966)]. Инвариантное расстояние до горизонта для частицы, имеющей 4-ускорение w , стремится при этом к конечному значению w^{-1} .

При описанном выше предельном переходе выражения (8.2.12) (при $Q = 0$) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{UV} &= \frac{2e}{w^2} \frac{(\rho^2 + \xi + w^{-2})}{S^3} \theta(V), \\ \tilde{F}_{U\rho} &= -\frac{4e\rho V}{w^2 S^3} \theta(V), \end{aligned} \quad (8.2.24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{V\rho} &= \frac{4e\rho U}{w^2 S^3} \theta(V) - \frac{2e\rho}{\rho^2 + w^{-2}} \delta(V), \\ \varphi &= \frac{g}{w} \frac{2\theta(V)}{S}, \end{aligned} \quad (8.2.25)$$

где

$$S = [(\rho^2 + \xi + w^{-2})^2 + 4\xi w^{-2}]^{1/2}, \quad \xi = UV. \quad (8.2.26)$$

Выражения (8.2.24) для $\tilde{F}_{\mu\nu}$ могут быть получены из следующего 4-потенциала:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\mu dx^\mu &= -\frac{e}{2} \theta(V) \left(\frac{\rho^2 + \xi + w^{-2}}{S} - 1 \right) \left(\frac{dV}{V} - \frac{dU}{U} \right) - \\ &- 2e\theta(V) \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + w^{-2}}. \end{aligned} \quad (8.2.27)$$

Нетрудно убедиться, что формулы (8.2.24) совпадают с выражением для поля от равноускоренного электрического заряда [см., например, Бульвар (1980)]; при этом член, пропорциональный $\delta(V)$ в (8.2.24), правильно воспроизводит сингулярный при $V = 0$ член, введенный в работе Бонди, Голда (1955).

§ 8.3. Сдвиг собственной энергии заряженной частицы в поле черной дыры

В этом параграфе мы рассмотрим эффект изменения собственной энергии заряженной частицы при помещении ее в сильное статическое гравитационное поле. Этот эффект состоит в следующем. Полная масса заряженной частицы складывается из ее "механической" массы, локализованной в точке, где находится заряд, и "электромагнитной" массы, распределенной по области, где отлично от нуля электромагнитное поле. При помещении заряженной частицы в неоднородное гравитационное поле последнее по-разному действует на "локальную" и "распределенную" массы, вызывая "деформацию" электрического поля заряда, что приводит к дополнительному изменению собственной энергии. Поскольку это изменение зависит от положения тела, то силы, действующие в гравитационном поле на частицы с одинаковой полной инертной массой в случае, когда одна из частиц заряжена, а другая нейтральна, отличаются друг от друга.

Впервые вопрос о влиянии гравитационного поля на собственную энергию электрического заряда рассматривался Ферми (1921). Им был исследован случай, когда электрический заряд покоятся в однородном гравитационном поле, и показано, что электромагнитное взаимодействие, вызывающее изменение инертной массы частицы, одновременно вызывает точно такое же изменение ее гравитационной массы, что находится в полном соответствии с принципом эквивалентности. Для неоднородного гравитационного поля аргументы, основанные на принципе эквивалентности, при рассмотрении системы в целом неприменимы, и, вообще говоря, следует ожидать, что соотношение между собственной энергией заряженной частицы и изменением ее гравитационной массы будет носить более сложный характер.

Для частицы, находящейся в поле черной дыры, это действительно так, и соответствующие поправки (в приближении $GM/c^2r \ll 1$) были найдены Виленкиным (1979а). Там же было показано, что эффект неоднородности гравитационного поля приводит к появлению дополнительной силы выталкивания заряда в направлении от черной дыры. Еще раньше Унру (1976а) показал, что аналогичная сила действует на пробный заряд, помещенный внутри тонкой полой массивной оболочки.

Смит, Уилл (1980) и Фролов, Зельников (1980) обратили внимание на то, что величина сдвига собственной энергии электрического заряда в поле шварцшильдовской черной дыры допускает точное вычисление, и вычислили величину дополнительной силы выталкивания. Этот результат позднее был обобщен на случай черных дыр Рейсснера – Нордстрема [Зельников, Фролов (1982*)], Керра [Лейт, Лине (1982)] и Керра – Ньюмана [Лохья (1982)].