Нетрудно убедиться, что формулы (8.2.24) совпадают с выражением для поля от равноускоренного электрического заряда [см., например, Бульвар (1980)]; при этом член, пропорциональный $\delta(V)$ в (8.2.24), правильно воспроизводит сингулярный при $V = 0$ член, введенный в работе Бонди, Голда (1955).

§ 8.3. Сдвиг собственной энергии заряженной частицы в поле черной дыры

В этом параграфе мы рассмотрим эффект изменения собственной энергии заряженной частицы при помещении ее в сильное статическое гравитационное поле. Этот эффект состоит в следующем. Полная масса заряженной частицы складывается из ее "механической" массы, локализованной в точке, где находится заряд, и "электромагнитной" массы, распределенной по области, где отлично от нуля электромагнитное поле. При помещении заряженной частицы в неоднородное гравитационное поле последнее поразному действует на "локальную" и "распределенную" массы, вызывая "деформацию" электрического поля заряда, что приводит к дополнительному изменению собственной энергии. Поскольку это изменение зависит от положения тела, то силы, действующие в гравитационном поле на частицы с одинаковой полной инертной массой в случае, когда одна из частиц заряжена, а другая нейтральна, отличаются друг от друга.

Впервые вопрос о влиянии гравитационного поля на собственную энергию электрического заряда рассматривался Ферми (1921). Им был исследован случай, когда электрический заряд покоится в однородном гравитационном поле, и показано, что электромагнитное взаимодействие, вызывающее изменение инертной массы частицы, одновременно вызывает точно такое же изменение ее гравитационной массы, что находится в полном соответствии с принципом эквивалентности. Для неоднородного гравитационного поля аргументы, основанные на принципе эквивалентности, при рассмотрении системы в целом неприменимы, и, вообще говоря, следует ожидать, что соотношение между собственной энергией заряженной частицы и изменением ее гравитационной массы будет носить более сложный характер.

Для частицы, находящейся в поле черной дыры, это действительно так, и соответствующие поправки (в приближении $GM/c^2r \ll 1$) были найдены Виленкиным (1979а). Там же было показано, что эффект неоднородности гравитационного поля приводит к появлению дополнительной силы выталкивания заряда в направлении от черной дыры. Еще раньше Унру (1976а) показал, что аналогичная сила действует на пробный заряд, помещенный внутри тонкой полой массивной оболочки.

Смит, Уилл (1980) и Фролов, Зельников (1980) обратили внимание на то, что величина сдвига собственной энергии электрического заряда в поле шварцшильдовской черной дыры допускает точное вычисление, и вычислили величину дополнительной силы выталкивания. Этот результат позднее был обобщен на случай черных дыр Рейсснера – Нордстрема [Зельников, Фролов (1982*)], Керра [Лейт, Лине (1982)] и Керра – Ньюмена [Лохья (1982)].

Для вычисления величины сдвига собственной энергии заряда в поле черной дыры мы предположим, что классическая частица, т.е. система связанных электрических зарядов, покоится на оси симметрии в стационарном гравитационном поле и удерживается соответствующим образом выбранной внешней силой. Обозначим через $\xi^{\mu}_{(t)}$ векторное поле Киллинга, времениподобное на бесконечности и нормированное там условием $\xi^{\mu}_{(t)}\ \xi_{(t)\mu} = -1$. Тогда энергия такой системы равна*)

$$E = -\int_{\Sigma} T_{\mu\nu}\, \xi^{\mu}_{(t)}\, d\sigma^{\nu}, \tag{8.3.1}$$

где $T_{\mu\nu}$ – полный метрический тензор энергии-импульса системы. Для определенности будем рассматривать в качестве модели заряженной частицы жесткую непроводящую тонкую сферу массы m_0 и радиуса ϵ, по поверхности которой распределен заряд e. Имея в виду дальнейший переход к пределу точечной частицы, будем считать, что ϵ значительно меньше характерных размеров неоднородностей гравитационного и внешнего электромагнитного полей, и в окончательном ответе будем пренебрегать членами $O(\epsilon)$.

Полная энергия E частицы складывается из 1) E_0 – части энергии, связанной с "механической" массой частицы m_0 ($E_0 = |\xi_{(t)} \cdot \xi_{(t)}|^{1/2} m_0 c^2$); 2) $E_{\rm self}$ – собственной энергии, т.е. энергии самодействия заряда частицы; 3) $E_{\rm ext}$ – энергии взаимодействия частицы с внешним полем; 4) $E_{\rm int}$ – энергии того дополнительного взаимодействия, которое обеспечивает устойчивость заряженной частицы. Введение дополнительного взаимодействия обусловливает выполнимость теоремы Лауэ. Если обозначить через ϵ_0 равновесный радиус незаряженной частицы, то $E_{\rm int}(\epsilon) = E_{\rm int}(\epsilon_0) + \frac{1}{2} K(\epsilon - \epsilon_0)^2$, и за счет выбора достаточно большой величины эффективной жесткости K изменения (вызванные внесением заряда в поле) равновесного размера $\Delta\epsilon = \epsilon - \epsilon_0$ и энергии $\Delta E = E_{\rm int}(\epsilon) - E_{\rm int}(\epsilon_0)$ можно сделать сколь угодно малыми. В дальнейшем будем пренебрегать величинами $\Delta\epsilon$ и ΔE, считая, что жесткость K выбрана соответствующим образом. Включив в E_0 постоянную величину $E_{\rm int}(\epsilon_0)$, запишем выражение для полной энергии частицы в виде разложения по степеням заряда e частицы:

$$E = E_0 + E_{\rm ext} + E_{\rm self}\,. \tag{8.3.2}$$

Вдали от тяготеющих тел в отсутствие внешнего поля формула (8.3.2) сводится к следующему выражению:

$$E = mc^2, \tag{8.3.3}$$

где $m = m_0 + e^2/2\epsilon c^2$. Отличие m от m_0 обусловлено энергией, заключенной в поле, создаваемом зарядом. При внесении незаряженной частицы в статическое гравитационное поле ее энергия в результате совершенной работы уменьшится и станет равной $E_0 = |\xi_{(t)} \cdot \xi_{(t)}|^{1/2} mc^2$. Если же частица заряжена, часть совершаемой работы идет на перестройку создавае-

---

*) Мы используем определение (П.26) для $d\sigma_{\mu}$, при котором элемент объема поверхности $x^0 = \text{const}$ равен $d\sigma_{\mu} = \delta^0_{\mu}\sqrt{-g}\, d^3x$.

мого ею поля. В результате $E_0 + E_{\text{self}}$ не совпадает, вообще говоря, с $|\xi_{(t)} \cdot \xi_{(t)}|^{1/2} mc^2$.

Выражение для E_{self} можно записать в виде

$$E_{\text{self}} = \int_{\Sigma} \Pi^{\beta} d\sigma_{\beta}, \tag{8.3.4}$$

где

$$-\Pi^{\beta} = T^{\beta}_{\alpha} \xi^{\alpha}_{(t)} \equiv \frac{1}{4\pi}\left(F^{\beta}{}_{\mu} F_{\alpha}{}^{\mu} - \frac{1}{4} \delta^{\beta}_{\alpha} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right) \xi^{\alpha}_{(t)}, \tag{8.3.5}$$

а $F_{\alpha\beta}$ – напряженность поля, создаваемая током

$$j^{\mu}(x) = \delta^{\mu}_{0} \frac{e}{4\pi\epsilon^2\sqrt{-g(x)}} \delta(l(x, x_0) - \epsilon), \tag{8.3.6}$$

описывающим распределение зарядов частицы. Здесь $l(x, x_0)$ – инвариантное расстояние точки (t, x) от точки (t, x_0) центра заряженной частицы, вычисленное вдоль геодезической, соединяющей эти точки, а ϵ – инвариантный размер частицы. Интегрирование в (8.3.4) проводится по пространственноподобной поверхности Σ, пересекающей горизонт H^+. Заметим, что интеграл (8.3.4) по части Σ, расположенной внутри горизонта событий, представляет собой энергию поля, находящегося внутри черной дыры, и соответствующий вклад входит как часть в определение полной массы черной дыры. Поэтому, интересуясь вычислением сдвига энергии в поле заданной черной дыры, будем считать параметры последней фиксированными и, в соответствии с этим, интегрирование в (8.3.4) вести по части Σ, лежащей вне черной дыры*).

Используя уравнения Максвелла

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi j^{\mu}, \tag{8.3.7}$$

можно преобразовать выражение (8.3.5) к виду

$$\Pi^{\beta} = \frac{1}{8\pi} (\xi^{\nu} A_{\alpha} F^{\alpha\beta} - \xi^{\beta} A_{\alpha} F^{\alpha\nu} - 2\xi^{\alpha} A_{\alpha} F^{\nu\beta})_{;\nu} + \frac{1}{2} \xi^{\beta} A^{\alpha} j_{\alpha} - j^{\beta} \xi^{\alpha} A_{\alpha}. \tag{8.3.8}$$

С помощью теоремы Стокса интеграл от выражения в скобках в правой части этой формулы можно свести к сумме интеграла по поверхности черной дыры и интеграла по бесконечно удаленной поверхности. Из-за быстрого убывания полей на бесконечности второй из этих интегралов обращается в нуль. Нетрудно убедиться, что для частицы, расположенной на оси симметрии, и первый интеграл (по поверхности черной дыры) также равен нулю. Таким образом, если учесть параллельность ξ^{α} и j^{α}, окончательно имеем

$$E_{\text{self}} = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} A_{\alpha} j^{\alpha} \xi^{\beta} d\sigma_{\beta}. \tag{8.3.9}$$

---

*) Выражения (8.3.4) – (8.3.5) для собственной энергии заряда с описанным выше условием на выбор области интегрирования Σ находятся в полном соответствии с общим выражением (11.2.48) для изменения массы системы, содержащей черную дыру, при изменении параметров самой системы. Интересно отметить, что для шварцшильдовской черной дыры интеграл по части поверхности Σ, лежащей под горизонтом, тождественно равен нулю.

Чтобы получить явное аналитическое выражение для $E_{\rm self}$, можно воспользоваться выражением для потенциала A_α, создаваемого точечным зарядом, расположенным на оси вращения в пространстве-времени Керра, найденным Лине (1977а). Получаемое при этом выражение для $E_{\rm self}$ имеет вид

$$E_{\rm self} = \frac{e^2}{2\epsilon} |g_{tt}|^{1/2} + \frac{e^2}{2} \frac{M}{r_0^2 + a^2} . \tag{8.3.10}$$

Если сравнить силу, необходимую для того, чтобы удержать такую частицу в точке r_0, с силой, которая требуется для этого в случае нейтральной частицы с массой $m = m_0 + e^2/2\epsilon$, то их разность

$$\Delta f = |\Delta f^\mu \, \Delta f_\mu|^{1/2} = e^2 \frac{M r_0}{(r_0^2 + a^2)^2} . \tag{8.3.11}$$

Эта избыточная сила Δf^μ, действующая на заряженную частицу, направлена по оси симметрии в сторону от черной дыры.

Если заряженная (со скалярным, электрическим или гравитационным зарядом) частица покоится вблизи вращающейся черной дыры вне оси симметрии, то на нее действует дополнительная сила [Гальцов (1982)]. Эта сила пропорциональна угловому моменту черной дыры и квадрату заряда частицы. Она возникает как реакция на приливное воздействие, оказываемое частицей на черную дыру и стремящееся затормозить ее вращение. Эта сила исчезает, если частица вращается с той же угловой скоростью, что и черная дыра, или находится на оси симметрии.

§ 8.4. Взаимное превращение электромагнитных и гравитационных волн в поле заряженной черной дыры

Хорошо известным следствием нелинейности системы уравнений Эйнштейна – Максвелла является эффект взаимного превращения электромагнитных и гравитационных волн во внешнем электрическом поле [подробное обсуждение этого эффекта и ссылки на соответствующие работы см., например, Сибгатуллин (1984*)].

В настоящем параграфе мы кратко остановимся на описании этого эффекта в применении к задаче о распространении фотонов и гравитонов в поле заряженной черной дыры [Сибгатуллин (1973*, 1974*, 1984*), Сибгатуллин, Алексеев (1974*), Герлах (1974, 1975)].

Пусть имеются метрика $g_{\mu\nu}$ и электромагнитное поле A_μ, удовлетворяющие системе уравнений Эйнштейна – Максвелла, и пусть $h_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}$ и $a_\mu = \delta A_\mu$ – малые возмущения на этом фоне. Тогда из условия, что $g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ и $A_\mu + a_\mu$ также являются решениями этих уравнений, вытекает следующая линеаризованная система для возмущений:

$$k_{\mu\nu;\lambda}{}^{;\lambda} - k^\lambda{}_{\mu;\nu;\lambda} - k^\lambda{}_{\nu;\mu;\lambda} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} k_{;\lambda}{}^{;\lambda} -$$
$$- 2k^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} - \frac{1}{2} k_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + g_{\mu\nu} k^{\alpha\gamma} F_{\alpha\beta} F^\beta_\gamma +$$
$$+ k T_{\mu\nu} + 2F_\mu{}^\alpha f_{\nu\alpha} + 2F_\nu{}^\alpha f_{\mu\alpha} - g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} = 0, \tag{8.4.1a}$$

$$f^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - k_{\beta\rho} F^{\alpha\rho;\beta} - k_\mu{}^\alpha{}_{;\beta} F^{\mu\beta} - k_{\mu\beta}{}^{;\beta} F^{\alpha\mu} + \frac{1}{2} k_{,\beta} F^{\alpha\beta} = 0. \tag{8.4.1b}$$