Чтобы получить явное аналитическое выражение для $E_{\rm self}$, можно воспользоваться выражением для потенциала A_α, создаваемого точечным зарядом, расположенным на оси вращения в пространстве-времени Керра, найденным Лине (1977а). Получаемое при этом выражение для $E_{\rm self}$ имеет вид

$$E_{\rm self} = \frac{e^2}{2\epsilon} |g_{tt}|^{1/2} + \frac{e^2}{2} \frac{M}{r_0^2 + a^2} . \tag{8.3.10}$$

Если сравнить силу, необходимую для того, чтобы удержать такую частицу в точке r_0, с силой, которая требуется для этого в случае нейтральной частицы с массой $m = m_0 + e^2/2\epsilon$, то их разность

$$\Delta f = |\Delta f^\mu \, \Delta f_\mu|^{1/2} = e^2 \frac{M r_0}{(r_0^2 + a^2)^2} . \tag{8.3.11}$$

Эта избыточная сила Δf^μ, действующая на заряженную частицу, направлена по оси симметрии в сторону от черной дыры.

Если заряженная (со скалярным, электрическим или гравитационным зарядом) частица покоится вблизи вращающейся черной дыры вне оси симметрии, то на нее действует дополнительная сила [Гальцов (1982)]. Эта сила пропорциональна угловому моменту черной дыры и квадрату заряда частицы. Она возникает как реакция на приливное воздействие, оказываемое частицей на черную дыру и стремящееся затормозить ее вращение. Эта сила исчезает, если частица вращается с той же угловой скоростью, что и черная дыра, или находится на оси симметрии.

§ 8.4. Взаимное превращение электромагнитных и гравитационных волн в поле заряженной черной дыры

Хорошо известным следствием нелинейности системы уравнений Эйнштейна – Максвелла является эффект взаимного превращения электромагнитных и гравитационных волн во внешнем электрическом поле [подробное обсуждение этого эффекта и ссылки на соответствующие работы см., например, Сибгатуллин (1984*)].

В настоящем параграфе мы кратко остановимся на описании этого эффекта в применении к задаче о распространении фотонов и гравитонов в поле заряженной черной дыры [Сибгатуллин (1973*, 1974*, 1984*), Сибгатуллин, Алексеев (1974*), Герлах (1974, 1975)].

Пусть имеются метрика $g_{\mu\nu}$ и электромагнитное поле A_μ, удовлетворяющие системе уравнений Эйнштейна – Максвелла, и пусть $h_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}$ и $a_\mu = \delta A_\mu$ – малые возмущения на этом фоне. Тогда из условия, что $g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ и $A_\mu + a_\mu$ также являются решениями этих уравнений, вытекает следующая линеаризованная система для возмущений:

$$k_{\mu\nu;\lambda}{}^{;\lambda} - k^\lambda{}_{\mu;\nu;\lambda} - k^\lambda{}_{\nu;\mu;\lambda} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} k_{;\lambda}{}^{;\lambda} -$$
$$- 2k^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} - \frac{1}{2} k_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + g_{\mu\nu} k^{\alpha\gamma} F_{\alpha\beta} F^\beta_\gamma +$$
$$+ k T_{\mu\nu} + 2F_\mu{}^\alpha f_{\nu\alpha} + 2F_\nu{}^\alpha f_{\mu\alpha} - g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} = 0, \tag{8.4.1a}$$

$$f^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - k_{\beta\rho} F^{\alpha\rho;\beta} - k_\mu{}^\alpha{}_{;\beta} F^{\mu\beta} - k_{\mu\beta}{}^{;\beta} F^{\alpha\mu} + \frac{1}{2} k_{,\beta} F^{\alpha\beta} = 0. \tag{8.4.1b}$$

Здесь

$$k_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h g_{\mu\nu}, \qquad h = h_\alpha{}^\alpha, \qquad k = k_\alpha{}^\alpha,$$

$$f_{\mu\nu} = a_{\nu,\mu} - a_{\mu,\nu}, \quad F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}; \tag{8.4.2}$$

поднятие, опускание индексов и ковариантное дифференцирование осуществляется с помощью метрики $g_{\mu\nu}$, а $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса поля $F_{\mu\nu}$ [см. (П.48)].

Эта система инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} &h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} - \xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu}, \\ &a_\mu \to a_\mu + \lambda_{;\mu} - \xi^\alpha A_{\mu;\alpha} - \xi^\alpha{}_{;\mu} A_\alpha. \end{aligned} \tag{8.4.3}$$

Для ликвидации калибровочного произвола удобно наложить следующие дополнительные условия:

$$k^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \qquad a^\alpha{}_{;\alpha} = 0. \tag{8.4.4}$$

Мы рассмотрим эффект взаимодействия электромагнитных и гравитационных возмущений, связанный с появлением членов, содержащих электрическое поле f, в уравнении (8.4.1a) и членов, содержащих гравитационное возмущение k, в уравнении (8.4.1b), в приближении, когда длина волны λ электромагнитных и гравитационных волн много меньше характерного размера L неоднородностей фоновых полей $g_{\mu\nu}$ и A_μ. Используя приближение геометрической оптики*), запишем возмущения $k_{\mu\nu}$ и a_μ в следующем виде:

$$a_\mu = \mathrm{Re}\left[(\alpha_\mu + \epsilon\beta_\mu + \ldots)\, e^{iS/\epsilon}\right], \tag{8.4.5a}$$

$$k_{\mu\nu} = \mathrm{Re}\left[(\kappa_{\mu\nu} + \epsilon\pi_{\mu\nu} + \ldots)\, e^{iS/\epsilon}\right], \tag{8.4.5b}$$

где ϵ — некий параметр, характеризующий степень малости рассматриваемого члена по отношению к безразмерному параметру λ/L. Фазовые функции S в выражениях (8.4.5) выбраны так, что они совпадают друг с другом. Этого можно добиться за счет переопределения предэкспонент в случае, если их различие порядка $O(\epsilon)$. В противном случае, если разница в фазах S_a и S_k в выражениях для a_μ и $k_{\mu\nu}$ не мала ($S_a - S_k = O(\epsilon^0)$), члены, обусловливающие перемешивание, входят с высокочастотным множителем $e^{(S_a - S_k)/\epsilon}$, и перемешивание в низшем по ϵ порядке отсутствует.

Если обозначить $l_\alpha = S_{,\alpha}$, то при подстановке (8.4.5) в уравнения (8.4.1) и в калибровочные условия (8.4.4) приравнивание нулю членов порядка ϵ^{-2} и ϵ^{-1} приводит к следующему соотношению (уравнение эйконала):

$$l_\alpha l^\alpha = 0 \tag{8.4.6}$$

и уравнениям

$$l^\mu \kappa_{\mu\nu} = 0, \qquad l^\mu \alpha_\mu = 0, \tag{8.4.7}$$

$$l^\beta{}_{;\beta}\, \alpha^\mu + 2 l^\beta \alpha^\mu{}_{;\beta} = N_1{}^\mu, \tag{8.4.8a}$$

$$l^\beta{}_{;\beta}\, \kappa_{\mu\nu} + 2 l^\beta \kappa_{\mu\nu;\beta} = N_{2\,\mu\nu}, \tag{8.4.8b}$$

---

*) О применении метода геометрической оптики к распространению высокочастотных гравитационных волн см. Айзааксон (1968 a, b). Детальное изложение этого метода для электромагнитных и гравитационных возмущений можно найти в книге Мизнера, Торна, Уилера (1973).

где

$$N_1{}^{\mu} = l_\beta \left(\frac{1}{2} F^{\mu\beta} \kappa^{\alpha}{}_{\alpha} - F_\gamma{}^{\mu} \kappa^{\gamma\alpha} \right), \tag{8.4.9a}$$

$$N_{2\mu\nu} = -4 \left[F_\mu{}^{\alpha} l_{[\nu} \alpha_{\alpha]} + F_\nu{}^{\alpha} l_{[\mu} \alpha_{\alpha]} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \alpha_\alpha l_\beta \right]. \tag{8.4.9b}$$

Условие (8.4.6) показывает, что поверхность постоянной фазы $S = \text{const}$ – световая. Поэтому интегральные линии $x^\mu = x^\mu(\lambda)$, определяемые уравнением

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = l^\mu(x) \tag{8.4.10}$$

и лежащие на этой поверхности, являются световыми геодезическими, а параметр λ – аффинный.

Дополним векторное поле l^μ до комплексной световой тетрады (l^μ, $n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu$), потребовав, чтобы векторы этой тетрады были нормированы условиями

$$l^\mu n_\mu = -1, \qquad m^\mu \bar{m}_\mu = 1 \tag{8.4.11}$$

(остальные скалярные произведения обращаются в нуль), а сами тетрады были ковариантно постоянны вдоль интегральных кривых l^μ:

$$l^\mu m^\nu{}_{;\mu} = l^\mu n^\nu{}_{;\mu} = 0. \tag{8.4.12}$$

Из условия ортогональности $l^\mu m_\mu = 0$ следует, что векторы $m_\mu, \bar{m}_\mu$ касательны к поверхности $S = \text{const}$. Можно показать [см., например, Сибгатуллин (1984*)], что оставшийся произвол в калибровочных преобразованиях (8.4,3), сохраняющих дополнительные условия (8.4.7), может быть использован для того, чтобы привести выражения для α_μ и $\kappa_{\mu\nu}$ к виду

$$\begin{aligned} &\alpha_\mu = A\bar{m}_\mu + \bar{A}\, m_\mu, \\ &\frac{1}{2} \kappa_{\mu\nu} = H\bar{m}_\mu \bar{m}_\nu + \bar{H}\, m_\mu m_\nu. \end{aligned} \tag{8.4.13}$$

Умножая (8.4.8a) на m^μ и (8.4.8b) на $m^\mu m^\nu$ и вводя обозначения $\Phi_0 = F^{\alpha\beta} l_\alpha m_\beta$ и $l^\beta{}_{;\beta} = -2\rho$, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{dA}{d\lambda} - \rho A = \bar{\Phi}_0 H, \tag{8.4.14a}$$

$$\frac{dH}{d\lambda} - \rho H = -\Phi_0 A. \tag{8.4.14b}$$

Из этих уравнений следует соотношение

$$[l^\mu(|A|^2 + |H|^2)]_{;\mu} = 0, \tag{8.4.15}$$

которое можно интерпретировать как закон сохранения суммарного числа фотонов и гравитонов.

Систему уравнений (8.4.14) можно несколько упростить, если от полевых переменных A, H перейти к величинам

$$\tilde{A} = zA, \qquad \tilde{H} = zH, \tag{8.4.16a}$$

где

$$z = z(\lambda) \equiv z_0 \exp\left[-\int_{\lambda_0}^{\lambda} \rho\, d\lambda\right]. \tag{8.4.16b}$$

В терминах этих переменных уравнения (8.4.14) принимают вид

$$\frac{d\tilde{A}}{d\lambda} = \bar{\Phi}_0 \tilde{H}, \quad \frac{d\tilde{H}}{d\lambda} = -\Phi_0 \tilde{A}. \tag{8.4.17}$$

В случае, когда $\Phi_0 = \bar{\Phi}_0$, эта система сводится к уравнению второго порядка

$$\frac{d^2\tilde{A}}{dx^2} + \tilde{A} = 0, \tag{8.4.18}$$

где $x = \int \Phi_0 d\lambda$. Это уравнение показывает, что амплитуда как электромагнитного, так и гравитационного поля испытывает осцилляции, связанные с процессом взаимного превращения фотонов и гравитонов. Период этих осцилляций $\Delta\lambda$ определяется из условия [Сибгатуллин (1974*)]

$$2\pi = \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda} \Phi_0 d\lambda. \tag{8.4.19}$$

Все сказанное выше непосредственно переносится на случай, когда высокочастотные фотоны и гравитоны распространяются в поле заряженной черной дыры. Уравнение эйконала (8.4.6):

$$g^{\mu\nu} S_{,\mu} S_{,\nu} = 0 \tag{8.4.20}$$

в метрике Рейсснера–Нордстрема (8.2.1) допускает полный интеграл

$$S = t \pm R(r) \pm \Psi(\theta) + m\varphi, \tag{8.4.21}$$

где

$$\begin{aligned} R(r) &= \int F^{-1} \sqrt{1 - b^2 F/r^2}\, dr, \\ \Psi(\theta) &= \int \sqrt{b^2 - m^2/\sin^2\theta}\, d\theta, \quad F = 1 - 2M/r + Q^2/r^2. \end{aligned} \tag{8.4.22}$$

Световые лучи, образующие поверхность $S = \text{const}$, параметризуются произвольными постоянными b и m, имеющими смысл прицельного параметра и углового момента, и описываются уравнениями

$$S = \text{const}, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = \text{const}, \quad \frac{\partial S}{\partial m} = \text{const}. \tag{8.4.23}$$

Для данной конгруэнции световых лучей аффинный параметр λ связан с r соотношением $d\lambda = dr(1 - Fb^2r^{-2})^{-1/2}$, а комплексная световая тетрада может быть выбрана так, что Φ_0 является действительной величиной и имеет вид

$$\Phi_0 = bQ/r^3. \tag{8.4.24}$$

При этом уравнение (8.4.19), определяющее период осцилляций, принимает вид

$$2\pi = Qb \int \frac{dr}{r^3 \sqrt{1 - Fb^2 r^{-2}}}. \tag{8.4.25}$$

Если на заряженную черную дыру падает высокочастотная электромагнитная волна с амплитудой A_{in} и прицельным параметром b, то после прохождения вблизи черной дыры (если только последняя ее не захватит) возникнут выходящие электромагнитная и гравитационная волны с амплитудами A_{out} и H_{out} [Сибгатуллин (1974*, 1984*)]:

$$A_{\text{out}} = A_{\text{in}} \cos\left[2Qb \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^3\sqrt{1 - Fb^2 r^{-2}}}\right],$$

$$H_{\text{out}} = A_{\text{in}} \sin\left[2Qb \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^3\sqrt{1 - Fb^2 r^{-2}}}\right], \tag{8.4.26}$$

где r_0 – минимальное значение r для светового луча с данным прицельным параметром b. Это значение совпадает с максимальным корнем уравнения

$$F(r) = r^2/b^2. \tag{8.4.27}$$

При $b = b_{\text{cr}}$, где

$$b_{\text{cr}}^2 = 4M^2\left[x + \frac{5}{2} + \sqrt{1+8x} + (8x)^{-1}\left(\sqrt{1+8x} - 1\right)\right],$$

$$x = 1 - Q^2/M^2, \tag{8.4.28}$$

этот корень, равный

$$r_0 = r_{\text{cr}} = \frac{M}{2}\left(3 + \sqrt{1+8x}\right), \tag{8.4.29}$$

становится кратным. В этом случае интегралы в (8.4.26) расходятся. Соответствующий прицельный параметр отвечает неустойчивой замкнутой круговой орбите.

Расходимость интегралов в (8.4.26) связана с невыполнением условий применимости приближения геометрической оптики. Учет волновых свойств света и гравитационного излучения приводит к конечному ответу. Оказывается, что при $|b - b_{\text{cr}}| \leqslant O(\omega^{-1})$ количество актов взаимопревращения волн вблизи экстремальной ($Q = M$) черной дыры порядка единицы, а суммарная интенсивность выходящих электромагнитных и гравитационных волн составляет конечную часть интенсивности падающего электромагнитного излучения. Остальная энергия при этом поглощается черной дырой.

Для вращающейся заряженной черной дыры описанный выше эффект взаимного превращения фотонов и гравитонов сопровождается дополнительным вращением плоскости их поляризации [Сибгатуллин (1984*)]. Подчеркнем, что эффект взаимопревращения может иметь место только вблизи заряженных дыр. Хотя, как уже отмечалось ранее, их заряд в реальных астрофизических условиях, по-видимому, не может быть велик, тем не менее существуют процессы, приводящие к возникновению у черной дыры отличного от нуля электрического заряда. Один из таких процессов, связанный с действием на вращающуюся черную дыру внешнего магнитного поля, был описан в предыдущей главе. Другой возможный процесс, предложенный Шварцманом (1971*), связан с разницей в действии давления излучения на электроны и ионы вещества, аккрецирующего на черную дыру.