

§ 8.5. Черная дыра во внешнем поле. Взаимодействие черных дыр

При внешнем воздействии на черную дыру она ведет себя в известной мере так же, как упругое компактное тело. Некоторые особенности "отклика" черной дыры на такое воздействие связаны главным образом с тем, что размеры ее однозначно зависят от ее массы, а гравитационное самодействие последней экстремально велико.

Прежде чем перейти к детальному описанию поведения черных дыр во внешнем поле, остановимся на вопросе, который иногда вызывает недоумение. Представим ситуацию, когда имеется покоящаяся единственная (например, шварцшильдовская) черная дыра и в некоторый момент времени удаленный наблюдатель включает внешнее поле, с тем чтобы определить его воздействие на черную дыру. Для определенности можно считать, что на нее направляется плоская световая волна. Давление такой волны на обычное тело (связанное с эффектами ее поглощения и рассеяния) приведет, вообще говоря, к движению тела. С другой стороны, если проследить за характером движения фронта световой волны в метрике Шварцшильда, то можно убедиться, что для достижения фронтом волны гравитационного радиуса потребуется бесконечно большое время по часам удаленного наблюдателя. Детальный расчет показывает [см., например, Ханни (1977)], что фронт волны огибает черную дыру и волна распространяется дальше. При этом в ней возникает расходящаяся составляющая, свидетельствующая о рассеянии, а вокруг черной дыры образуется новый фронт, отвечающий движению излучения, падающего на нее. Возникает вопрос — как черная дыра может "почувствовать" давление на нее излучения и прийти в движение за конечное (по часам удаленного наблюдателя) время, если с точки зрения этого наблюдателя излучение никогда не достигает горизонта*)?

Для ответа на этот вопрос полезно проанализировать близкую ситуацию, возникающую при рассеянии световой волны на теле размера r_0 , для вещества которого показатель преломления n , непрерывно возрастая от 1 на границе (при $r=r_0$) внутрь, достигает бесконечно большого значения на некоторой поверхности внутри этого тела (при $r=r_1$). Как и в случае черной дыры, распространение света до границы $r=r_1$ может занимать бесконечно большое время. Тело, однако, придет в движение, не дожидаясь завершения этого процесса. Можно показать, что, как только фронт волны достигает поверхности $r=r_0$, поток энергии-импульса через нее становится, вообще говоря, отличным от нуля и связанная с этим потоком сила приводит в движение тело как целое.

Аналогичным образом, если мысленно окружить черную дыру сферой радиуса $r_0 \geq r_g$, то при прохождении световой волны появится поток энергии-импульса через эту поверхность и вся область внутри r_0 (черная дыра и часть окружающего ее пространства) придет в движение по отношению к внешнему наблюдателю. Для обычной световой волны ее энергия в объеме порядка r_g^3 много меньше $r_g c^4/G$, и влияние такой волны на

*) Падающий наблюдатель, естественно, увидит, что по его часам фронт световой волны пересекает горизонт событий за конечное время.

метрику черной дыры пренебрежимо мало. Поэтому в системе отсчета, связанной с черной дырой, все явления в непосредственной близости от нее происходят практически так же, как в отсутствие излучения. Отдаленный же наблюдатель заметит появление движения этой системы отсчета по отношению к его собственной.

Хотя общая задача о движении черной дыры во внешнем поле не допускает аналитического решения, в том частном случае, когда черная дыра не взаимодействует со своим окружением чрезвычайно сильно, имеется возможность детального описания ее движения в рамках своеобразной теории возмущений. Это возможно, в частности, для движения во внешнем гравитационном поле, если характерный размер черной дыры, определяемый ее массой M , много меньше характерного масштаба L неоднородности гравитационного поля, в котором она движется^{*)}. В этом случае действие внешнего гравитационного поля приводит к малому изменению метрики в окрестности черной дыры. Поэтому вне черной дыры, в области, определяемой характерным масштабом M , метрику $g_{\mu\nu}$ можно записать в виде

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \epsilon g_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon^2 g_{\mu\nu}^{(2)} + \dots, \quad (8.5.1)$$

где $g_{\mu\nu}^{(0)}$ — метрика невозмущенной черной дыры (метрика Керра) и $\epsilon = M/L$. Аналогичным образом влияние черной дыры на внешнюю метрику в масштабе порядка L можно считать малым и учесть его в виде поправки, записав внешнюю метрику в виде

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \epsilon g_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon^2 g_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (8.5.2)$$

Предположение об отсутствии в окрестности черной дыры вещества, падение которого может достаточно быстро изменить ее параметры, и условие слабости взаимодействия черной дыры с внешним полем приводят к тому, что разложения (8.5.1) и (8.5.2) имеют общую область применимости. Иными словами, существует область расстояний от черной дыры, определяемая характерным масштабом $l \sim \epsilon^\alpha M$ ($0 < \alpha < 1$, $M \ll l \ll L$), в которой справедливы оба разложения одновременно. Сравнение (сшивание) этих разложений в указанной области позволяет однозначно определить сами разложения.

Описанный метод сшивания асимптотических разложений для изучения движения черных дыр во внешнем поле и взаимодействия черных дыр друг с другом был развит Д'Эсом (1975а, б, 1978, 1979). В применении к рассматриваемой задаче этот метод приводит к следующим результатам [Демянский, Грищук (1974), Д'Эс (1975а, б, 1979), Кэйтс (1980, 1981), Дамур (1983), Торн, Хартль (1985)].

Член $\epsilon g_{\mu\nu}^{(1)}$ в разложении (8.5.1) обращается в нуль. Хотя пространство-время в целом и не обязано быть асимптотически плоским, можно определить массу M , импульс P и угловой момент J черной дыры по параметрам невозмущенной метрики $g_{\mu\nu}^{(0)}$. Неопределенности в определении этих па-

^{*)} Вообще говоря, неоднородность гравитационного поля характеризуется как радиусом кривизны L_1 пространства-времени, так и теми масштабами в пространстве (L_2) и времени (L_3/c), на которых эта кривизна существенно изменяется. Под L мы будем понимать минимальную из этих величин $L = \min(L_1, L_2, L_3)$.

метров, связанные с членами $\epsilon^2 g_{\mu\nu}^{(2)}$, имеют следующий порядок:

$$\Delta M \sim \epsilon^2 M, \quad \Delta P \sim \epsilon^2 M, \quad \Delta J \sim \epsilon^2 M^2. \quad (8.5.3)$$

Метрика внешнего пространства $g_{\mu\nu}^{(0)}$ является всюду регулярной, в то время как поправки к ней при формальном распространении на все пространство приводят к особенностям на времениподобной мировой линии γ , отвечающей движению черной дыры. В окрестности этой линии γ можно ввести координаты t, x^i , в которых метрика записывается в виде

$$\begin{aligned} g_{00}^{(0)} &= -1 - E_{ij} x^i x^j + \dots, \\ g_{0i}^{(0)} &= \frac{2}{3} \epsilon_{ijk} B^j_l x^k x^l + \dots, \\ g_{ij}^{(0)} &= \delta_{ij} (1 - E_{kl} x^k x^l) + \dots \end{aligned} \quad (8.5.4)$$

(здесь $E_{ij} = R_{i0j0}$ и $B_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} R^{kl}_{j0}$ – "электрическая" и "магнитная" части тензора кривизны).

Изменение той части возмущения $g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}^{(0)}$, которая является конечной на линии движения черной дыры, приводит к небольшой неточности в определении E_{ij} и B_{ij} .

В низшем по ϵ приближении линия движения черной дыры является геодезической, а спин черной дыры переносится вдоль нее параллельно [ДЭс (1975а)]. Поправки [см. Торн, Хартль (1985)], описывающие отклонение движения черной дыры от геодезического и закона переноса ее спина от закона Ферми–Уолкера (П.12), определяются следующими уравнениями:

$$\frac{dP^i}{dt} = -B^i_j J^j, \quad (8.5.5)$$

$$\frac{dJ^i}{dt} = -\epsilon^i_{jk} E^k_l \frac{1}{M} J^j J^l. \quad (8.5.6)$$

Изменения импульса и спина черной дыры, описываемые этими уравнениями, значительно превосходят неопределенности ΔP^i и ΔJ^i (8.5.3):

$$\Delta P^i \sim \frac{1}{M} \epsilon^i_{jk} B^j_l J^k J^l, \quad (8.5.7)$$

$$\Delta J^i \sim M^2 E^i_j J^j,$$

связанные с изменением E^i_j и B^i_j . Поэтому указанные эффекты негеодезичности движения врачающейся черной дыры и прецессии ее углового момента в принципе могут наблюдаться.

Следует подчеркнуть, что уравнения (8.5.5) и (8.5.6) совпадают по форме с уравнениями движения пробных вращающихся частиц во внешнем гравитационном поле. Существенным моментом является то, что учет экстремально сильного гравитационного самодействия, присущего черной дыре, не изменяет вида этих уравнений и с точки зрения удаленного наблюдателя она движется во внешнем поле так же, как малое пробное тело.

Аналогичным образом можно показать [Бичак (1980)], что при действии на черную дыру с зарядом Q и массой M внешнего электрического поля E она приобретает ускорение $a = QE/M^*$). Интересно отметить, что Эрнст (1976б) получил точное решение уравнений Эйнштейна—Максвелла, описывающее движение заряженной черной дыры в однородном электрическом поле. Соответствующая метрика в запаздывающих координатах имеет вид

$$ds^2 = B^2(-Hdu^2 - 2du dr - 2wr^2 du dx + r^2 G^{-1} dx^2) + \\ + B^{-2} r^2 G dz^2, \quad (8.5.8)$$

где

$$B = 1 + QE_0 x + \frac{1}{4} E_0^2 (r^2 G + Q^2 x^2), \\ G = 1 - \dot{x}^2 - 2Mwx^3 - Q^2 w^2 \dot{x}^4, \quad (8.5.9) \\ H = -w^2 r^2 G + wr \frac{dG}{dx} + 1 + 6Mwx + 6Q^2 w^2 x^2 - \\ - 2(M + 2Q^2 wx)r^{-1} + Q^2 r^{-2}.$$

Здесь w — ускорение черной дыры, а E_0 — напряженность внешнего электрического поля. При выполнении условия $QE_0 = Mw$ узловые сингулярности, присущие метрике (8.5.8) в общем случае, отсутствуют. Отметим, что отсутствие явной зависимости от времени метрики, описывающей ускоренное движение тела, связано с соответствующим выбором координат. Аналогичным свойством обладает метрика плоского пространства в координатах Риндлера, связанных с равноускоренным движением наблюдателей.

Метод сшивания асимптотических разложений (см. выше) позволяет также исследовать взаимодействие двух черных дыр. В случае, если расстояние между ними значительно превосходит их гравитационные радиусы, а сами дыры движутся друг относительно друга со скоростью, много меньшей скорости света, уравнения движения взаимодействующих черных дыр были получены Д'Эсом (1975б, 1979) [см. также Торн, Хартль (1985)]. Гравитационное поле вблизи каждой из черных дыр описывается возмущенной метрикой Керра, а вдали от черных дыр метрика находится с помощью постニュтонанского приближения до нужного порядка точности. Сшивание этих разложений приводит к следующей системе уравнений для движения одной из черных дыр и прецессии ее углового момента в поле другой черной дыры:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F_1^{(1)} + F_1^{(2)} + O(\epsilon^4), \quad (8.5.10a)$$

$$\frac{dJ_1}{dt} = [(\vec{\Omega}_1^{(1)} + \vec{\Omega}_1^{(2)} + \vec{\Omega}^{(3)}) \times J_1]. \quad (8.5.10b)$$

Здесь и далее используются обозначения: x_i — положение и v_i — скорость

^{*)} Об эффектах, связанных с действием на черную дыру электромагнитного поля, см. также Галыцов и др. (1984 *).

i-й черной дыры, обладающей массой M_i и угловым моментом J_i ; $r_{21} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, $\mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ – положение и скорость второй черной дыры по отношению к первой; $r = |r_{21}|$, $n = r_{21}/r$; $J_i = |J_i|$ и $j_i = J_i/J_i$ – величина и единичный вектор направления углового момента *i*-й черной дыры. Параметр малости ϵ равен отношению максимального из гравитационных радиусов к характерному расстоянию между черными дырами. $F_1^{(1)}$ – значение силы, найденное Эйнштейном, Инфельдом, Гофманом (1938), отвечающей геодезическому закону движения одного тела в гравитационном поле, создаваемом вторым телом:

$$F_1^{(1)} = \frac{M_1 M_2}{r^2} \left\{ n \left(1 - \frac{4M_2 + 5M_1}{r} + \mathbf{v}_1^2 + 2\mathbf{v}_2^2 - 4\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 - \frac{3}{2} (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n})^2 \right) - \mathbf{v}_{21} [\mathbf{n} (3\mathbf{v}_2 - 4\mathbf{v}_1)] \right\}. \quad (8.5.11)$$

Член $F_1^{(2)}$ в (8.5.10a), равный

$$F_1^{(2)} = \frac{M_1 J_2}{r^3} \{ 6n([j_2 \times \mathbf{n}] \mathbf{v}_{12}) + 4[j_2 \times \mathbf{v}_{12}] - 6[j_2 \times \mathbf{n}] (\mathbf{v}_{12} \mathbf{n}) \} + \frac{M_2 J_1}{r^3} \{ 6n([j_1 \times \mathbf{n}] \mathbf{v}_{12}) + 3[j_1 \times \mathbf{v}_{12}] - 3[j_1 \times \mathbf{n}] (\mathbf{v}_{12} \mathbf{n}) \}, \quad (8.5.12)$$

описывает дополнительную силу, связанную со спин-орбитальным взаимодействием. Член $O(\epsilon^4)$ в этом же уравнении отвечает спин-спиновому взаимодействию и взаимодействию, связанному с квадрупольным моментом черной дыры, – оба имеют порядок малости ϵ^4 .

Уравнение (8.5.10 b) описывает прецессию углового момента черной дыры по отношению к сопутствующей ортонормированной системе, которая не испытывает вращения по отношению к бесконечно удаленному наблюдателю. Гравимагнитная ($\vec{\Omega}_1^{(1)}$) и геодезическая ($\vec{\Omega}_1^{(2)}$) составляющие угловой скорости этой прецессии и составляющая $\vec{\Omega}_1^{(3)}$, связанная со взаимодействием квадрупольного момента черной дыры с кривизной, равны соответственно

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_1^{(1)} &= \frac{1}{r^3} [-J_2 + 3\mathbf{n}(\mathbf{n} J_2)], \\ \vec{\Omega}_1^{(2)} &= \frac{M_2}{r^2} \left[\left(\frac{3}{2} \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 \right) \times \mathbf{n} \right], \\ \vec{\Omega}_1^{(3)} &= \frac{3M_2}{M_1 r^3} \mathbf{n}(\mathbf{n} J_1). \end{aligned} \quad (8.5.13)$$

В пределе, когда $M_1 \ll M_2$, эти формулы совпадают с уравнениями движения пробной вращающейся частицы в поле массивного вращающегося тела. (Подробное описание решения последней задачи можно найти в книге Мизнера, Торна, Уилера (1973), где также содержатся ссылки на многочисленные оригинальные работы.)

В противоположном пределе, когда относительная скорость v двух черных дыр близка к скорости света, можно использовать разложение

по малому параметру γ^{-1} , где $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$. Этот метод был применен Д'Эсом (1975b, 1979) для решения задачи о рассеянии двух ультрарелятивистских черных дыр, движущихся параллельно навстречу друг другу. Исходным пунктом при этом являлось выражение для метрики одиночной равномерно движущейся невращающейся черной дыры в пределе, когда скорость ее движения стремится к скорости света. Эта метрика может быть получена с помощью преобразований из метрики Шварцшильда, записанной в изотропных координатах:

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - M/2r}{1 + M/2r} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2r} \right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (8.5.14)$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, а M – масса черной дыры. Осуществив лоренцево преобразование

$$\begin{aligned} \bar{t} &= (1 - v^2)^{-1/2} (t + vx), & \bar{y} &= y, \\ \bar{x} &= (1 - v^2)^{-1/2} (x + vt), & \bar{z} &= z, \end{aligned} \quad (8.5.15)$$

перепишем (8.5.14) в следующем виде:

$$ds^2 = (1 + A)^2 (-d\bar{t}^2 + d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2) + \\ + \left[\left(\frac{1 - A}{1 + A} \right)^2 - (1 + A)^4 \right] \frac{(d\bar{t} - vd\bar{x})^2}{(1 - v^2)}, \quad (8.5.16)$$

где

$$A = \frac{M}{2r} = \frac{\mu(1 - v^2)}{2[(\bar{x} - v\bar{t})^2 + (1 - v^2)(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)]^{1/2}}, \quad (8.5.17)$$

$$\mu = \gamma M = M/\sqrt{1 - v^2}.$$

Переходя к пределу $v \rightarrow 1$ в (8.5.16) при постоянном значении μ и обозначая $\bar{t} - \bar{x} = \bar{v}$, $\bar{t} + \bar{x} = \bar{u}$, получаем [Айхельбург, Сексл (1971)]

$$ds^2 = -d\bar{v} d\bar{u} + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 + 4\mu \left[\frac{1}{|\bar{v}|} - \delta(\bar{v}) \ln(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \right] d\bar{v}^2. \quad (8.5.18)$$

Это выражение с помощью преобразования координат $du = d\bar{u} - \frac{4\mu}{|\bar{v}|} d\bar{v}$, $v = \bar{v}$ можно привести к виду

$$ds^2 = -du dv + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 - 4\mu\delta(v) \ln(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) dv^2. \quad (8.5.19)$$

Из этой формы метрики видно, что соответствующее гравитационное поле представляет собой особый случай аксиально-симметричной плоской гравитационной волны, сосредоточенной на поверхности $v = 0$, разделяющей два плоских полупространства: $v > 0$ и $v < 0$. Выполненная предельная процедура приводит к изменению алгебраического типа тензора Вейля: метрика (8.5.19) имеет тип N вместо типа D , которым обладала исходная метрика (8.5.14) *). Соответствующий тензор кривизны всюду обращается

*.) Это свойство метрики Шварцшильда было обнаружено Пирани (1959). Позднее Пенроуз (1976) показал, что этим свойством обладает пространство-время общего вида. А именно, с точки зрения наблюдателя, скорость движения которого приближается к скорости света и который пользуется параметром времени γt , где $\gamma =$

в нуль, за исключением поверхности $v = 0$, на которой его отличные от нуля компоненты имеют особенности типа $\delta(v)$.

В случае, когда имеются две ультрарелятивистские черные дыры, движущиеся параллельно навстречу друг другу, их гравитационное поле, до взаимодействия сконцентрированное в виде двух плоских волн, описываемых метриками (8.5.19), после взаимодействия испытывает искажение, вызванное рассеянием этих гравитационных волн при прохождении друг через друга. Д'Эс (1978) показал, что если прицельный параметр сравним с величиной $M\gamma^2$, где M – характерная масса черных дыр, а γ – типичный лоренц-фактор в системе центра масс, то возникает гравитационное излучение с характерной мощностью ~ 1 (в единицах c^5/G) в виде узких пучков с телесным углом $\sim \gamma^{-2}$ по направлениям движения черных дыр. Причина этого излучения состоит в появлении быстропеременного ускорения черных дыр в момент близкого прохождения возле друг друга.

Если прицельный параметр сравним с величиной $\mu = M\gamma$, то излучение мало вдоль направления движения дыр вплоть до углов $\theta \lesssim \gamma^{-1}$. При больших углах (в диапазоне $\gamma^{-1} \ll \theta \ll 1$) суммарная энергия гравитационного излучения в единицу телесного угла имеет величину $dE/d\Omega \approx 0,248M\gamma/2\pi$. В предположении, что при лобовом столкновении черных дыр равной массы гравитационное излучение довольно изотропно, Д'Эс (1978) пришел к выводу, что эффективность преобразования энергии черных дыр 2μ в энергию излучения ΔE составляет примерно 25%: $\Delta E/2\mu \approx 0,248$ [Смэрр и др. (1976); см. также Смэрр (1977, 1979), Бовин (1983)].

Общее ограничение на максимальную эффективность превращения в энергию гравитационного излучения ΔE энергии черных дыр при их лобовом столкновении можно получить, исходя из теоремы Хокинга [Пенроуз (1974), Смэрр и др. (1976)]. Если черные дыры обладают одинаковой массой M и их скорости движения на бесконечности навстречу друг другу в системе центра масс равны v , то для максимальной эффективности $\epsilon = \Delta E/2\mu$ имеем

$$\epsilon \leq 1 - \sqrt{\frac{1-v^2}{2}}.$$

Как показывают приведенные выше оценки, реальная эффективность для ультрарелятивистских черных дыр составляет $\approx 25\%$ от максимальной $\epsilon(v=1) = 1$. При столкновении нерелятивистских черных дыр она почти на два порядка меньше. Так, для энергии гравитационного излучения при лобовом столкновении двух невращающихся черных дыр с одинаковой массой, обладавших нулевой относительной скоростью на бесконечности, численный счет дает выражение [Смэрр (1979); см. также Петрич и др. (1985)]

$$\Delta E = 2,5 \cdot 10^{-3} M.$$

Напомним (см. § 3.3), что количество излученной энергии при радиальном

$= (1-v^2)^{-1/2}$ и τ – собственное время, геометрия окружающего пространства-времени стремится к геометрии плоской гравитационной волны. В пределе $\gamma \rightarrow \infty$ мировая линия этого наблюдателя – нулевая геодезическая, а $\gamma\tau$ – аффинный параметр вдоль нее.

падении с параболической скоростью *пробной* частицы с массой *m* на черную дыру описывается формулой

$$\Delta E = 0,01 m^2 / M.$$

Отметим, что эта же формула хорошо воспроизводит приведенный выше результат численного счета, если в нее в качестве *m* подставить приведенную массу двух черных дыр *m* = *M*/2.

При воздействии внешнего поля черная дыра испытывает деформацию. Рассмотрим (кратко), как изменяются свойства черной дыры при "внесении" ее в гравитационное поле, создаваемое стационарным распределением вещества. Эта задача допускает довольно полное решение в том случае, когда черная дыра не вращается, а гравитационное поле является аксиально-симметричным [Изразиль, Кхан (1964), Дорошкевич и др. (1965*), Мизак, Жекерес (1966), Изразиль (1973), Героч, Хартль (1982)]. Обобщение на случай вращающейся черной дыры можно найти в работе Томиматсу (1984).

Прежде всего напомним [см., например, Крамер и др. (1980)], что статическое аксиально-симметричное вакуумное гравитационное поле описывается с помощью метрики Вейля

$$ds^2 = -e^{2U} dt^2 + e^{-2U} [e^{2V} (dp^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2], \quad (8.5.20)$$

где *U* и *V* являются функциями от *p* и *z* и удовлетворяют уравнениям

$$U_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho} U_{,\rho} + U_{,zz} = 0, \quad (8.5.21a)$$

$$V_{,\rho} = \rho (U_{,\rho}^2 - U_{,z}^2), \quad V_{,z} = 2\rho U_{,\rho} U_{,z}. \quad (8.5.21b)$$

Нетрудно убедиться, что (8.5.21a) обеспечивает выполнимость условий интегрируемости системы (8.5.21b). Поскольку решение системы (8.5.21 b) для известной функции *U*(*p*, *z*) легко находится в квадратурах, вакуумная метрика (8.5.20) однозначно определяется выбором решения уравнения (8.5.21a). В частности, метрика Шварцшильда в этих координатах отвечает следующему решению:

$$U = U_S \equiv \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right), \quad V = V_S \equiv \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - \mu^2} \right), \quad (8.5.22)$$

где

$$\lambda = \frac{R_+ + R_-}{2M}, \quad \mu = \frac{R_+ - R_-}{2M}, \quad R_\pm = \sqrt{\rho^2 + (z \pm M)^2}; \quad (8.5.23)$$

при этом горизонт событий *H* определяется условием

$$\rho = 0, \quad -M \leq z \leq M. \quad (8.4.24)$$

Согласно теореме единственности (см. § 6.3) это решение является единственным, описывающим черную дыру в вакууме в асимптотически плоском пространстве-времени. Всякое другое вакуумное решение, обладающее регулярным горизонтом *), не может быть асимптотически плоским.

*) Строго говоря, требуется регулярность так называемого горизонта Киллинга, определяемого в статическом пространстве условием $\partial_t \cdot \partial_t = 0$, где ∂_t — векторное

Поэтому, строго говоря, возмущенная черная дыра обязательно описывается невакуумным решением уравнений Эйнштейна. В простейшем случае можно считать, что вещество, создающее внешнее гравитационное поле, расположено на некотором расстоянии от черной дыры. Тогда в окрестности ее горизонта гравитационное поле описывается вакуумной метрикой Вейля (8.5.20). И хотя точное решение подобной полной задачи удается найти лишь для очень частных случаев распределения вещества, изучение свойств вакуумных решений Вейля вблизи регулярного горизонта позволяет получить довольно полную информацию о возможном влиянии внешних воздействий на поверхность черной дыры *).

Решение, описывающее возмущенную черную дыру, можно записать в следующем виде [Героч, Хартль (1982)]:

$$U = U_S + \hat{U}, \quad V = V_S + \hat{V}, \quad (8.5.25)$$

где U_S и V_S даются выражениями (8.5.22), а \hat{U} является решением однородного уравнения (8.5.21а), удовлетворяющим условию регулярности на отрезке $\rho = 0$, $-M \leq z \leq M$ и в некоторой его окрестности и принимающим на его концах одинаковые значения

$$\hat{U}(\rho = 0, z = -M) = \hat{U}(\rho = 0, z = M) \equiv u. \quad (8.5.26)$$

Значение \hat{V} однозначно определяется из уравнения (8.5.21б) при условии, что $V = 0$ на участках оси $\rho = 0$, лежащих вне вещества. Условие (8.5.26), связанное с отсутствием узловых сингулярностей, гарантирует обращение в нуль суммарной силы, действующей со стороны внешнего поля на черную дыру как целое, что обеспечивает возможность существования регулярного статического решения. Используя второе уравнение из (8.5.21б), можно показать, что на горизонте событий H имеет место соотношение

$$\hat{V} = 2\hat{U} - 2u. \quad (8.5.27)$$

С помощью преобразования координат

$$\rho = e^u r \sqrt{1 - \frac{2M_0}{r}} \sin \theta, \quad z = e^u (r - 2M_0) \cos \theta, \quad (8.5.28)$$

$$M_0 = M e^{-u} \quad (8.5.29)$$

можно метрику (8.5.20) привести к следующему виду:

$$ds^2 = -e^{2\hat{U}} \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right) dt^2 + e^{2\hat{V}-2\hat{U}+2u} \times \\ \times \left[\left(1 - \frac{2M_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + e^{-2\hat{V}} \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (8.5.30)$$

поле Киллинга. В статическом асимптотически плоском пространстве горизонт Киллинга совпадает с горизонтом событий (см. § 6.3).

*) Интересно отметить, что хотя метрика Вейля, описывающая статическую деформированную аксиально-симметричную черную дыру, принадлежит к общему типу I по Петрову, на горизонте событий она имеет тип D [Пападопулос, Ксантопулос (1984)].

Горизонт событий H в этих координатах описывается уравнением $r = 2M_0$ и двумерная метрика на его поверхности с учетом (8.5.27) записывается так:

$$ds^2 = 4M_0^2 (e^{2\hat{U}-2u} d\theta^2 + e^{-2\hat{U}+2u} \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (8.5.31)$$

Нетрудно убедиться, что поверхность горизонта представляет собой деформированную аксиально-симметричным образом сферу^{*)}, площадь которой

$$A = 16\pi M_0^2. \quad (8.5.32)$$

Действие внешнего гравитационного поля, в качестве потенциала которого выступает величина $\exp \hat{U}$, на черную дыру в известной мере аналогично действию этого поля на эластичное массивное тело. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим случай, когда значение \hat{U} вблизи полюсов больше значения \hat{U} на экваторе. В этом случае на любое пробное тело, покоящееся вблизи полюса, будет действовать сила, стремящаяся приблизить его к экватору. В соответствии с этим, как видно из соотношения (8.5.31), поверхность горизонта оказывается сплюснутой у полюсов. Поверхностная гравитация *к* постоянна на поверхности горизонта:

$$k = e^u / 4M_0. \quad (8.5.33)$$

Отличие наблюдаемого на бесконечности значения массы M от величины M_0 , определяющей площадь горизонта событий и играющей роль неприводимой массы (см. § 8.1), объясняется следующим образом. Рассмотрим процесс "внесения" шварцшильдовской черной дыры (для которой, очевидно, $M = M_0$) в заданное внешнее гравитационное поле. Если этот процесс осуществляется достаточно медленно, то площадь поверхности A черной дыры не изменяется и, следовательно, в этом процессе сохраняется постоянной величина M_0 . Величина же $M = e^u M_0$ испытывает изменение при изменении гравитационного потенциала e^u внешнего поля в месте, где находится черная дыра. Разность $M - M_0 = M_0 (e^u - 1)$ представляет собой работу, совершенную внешним гравитационным полем при "внесении" в него черной дыры. Можно показать [Героч, Харпль (1982)], что при выполнении сильного энергетического условия (см. Приложение) потенциал *и* принимает только неположительные значения.

Приведем в качестве примера, иллюстрирующего эти общие рассуждения, явное выражение для метрики, описывающей черную дыру во внешнем квадрупольном поле [Дорошкевич и др. (1965^{*)}]:

$$\hat{U} = \frac{1}{4} q (3\lambda^2 - 1) (3\mu^2 - 1), \quad (8.5.34)$$

$$\hat{V} = -3q\lambda(1-\mu^2) - \frac{9}{16} q^2 (\lambda^2 - 1) (1 - \mu^2) (9\mu^2\lambda^2 - \lambda^2 - \mu^2 + 1),$$

где q – параметр, характеризующий квадрупольный момент системы, создающей внешнее гравитационное поле. На горизонте $\lambda = 1$, $\mu = z/M$, и поэтому

^{*)} Следует упомянуть, что возможны вакуумные аксиально-симметричные статические метрики, описывающие пространство-время вблизи горизонта, с топологией тора [см., например, Героч, Харпль (1982), Ксантопулос (1983) и ссылки в этих работах]. Однако, как это следует из теоремы Хокинга (см. § 6.2), при выполнении условия энергодоминантности внешнее пространство в этом случае не может быть одновременно регулярным и асимптотически плоским.

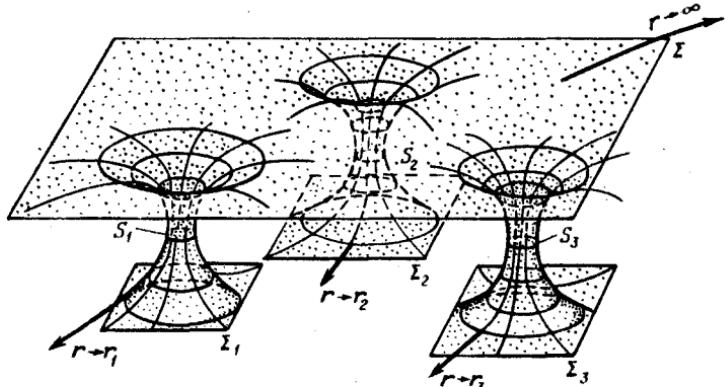


Рис. 73. Мгновенно-статическая конфигурация трех взаимодействующих черных дыр (двумерное пространственное сечение пространства-времени)

му нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае $u = q$. Гауссова кривизна поверхности горизонта событий равна

$$K = \frac{e^q}{4M_0^2} (1 + 3q - 12q\mu^2 - 9q^2\mu^2 + 9q^2\mu^4). \quad (8.5.35)$$

Постоянное внешнее квадрупольное поле, описываемое решением (8.5.34), может быть создано удаленными покоящимися массами. Это решение также приближенно описывает влияние на черную дыру удаленных свободных масс, скорости движения которых под действием взаимного притяжения вначале малы, а поле почти статично.

При получении полных точных аксиально-симметричных стационарных решений, описывающих поведение черной дыры в гравитационном поле, основную трудность, как уже указывалось выше, составляет нахождение решения в области, где присутствует материя. К важным случаям, для которых можно получить точные решения, относятся ситуации, когда черная дыра находится либо в однородном электрическом [Эрнст (1976б)], либо в однородном магнитном поле [Эрнст (1976а), Эрнст, Уайлд (1976), Гальцов, Петухов (1978*), Гальцов (1980*), Уайлд, Кернс (1980), Алиев и др. (1980*), Уайлд и др. (1981), Крори и др. (1983, 1984), Дадлих (1983), Дхираудхар, Дадлих (1984а, б)].

Интересная возможность изучения взаимодействия черных дыр состоит в рассмотрении так называемых *мгновенно-статических конфигураций*, описывающих систему взаимодействующих черных дыр в момент времени, когда все они покоятся [Мизнер, Уилер (1957), Мизнер (1960, 1963), Линдквист (1963), Брилл, Линдквист (1963), Гиббонс (1972), Боуэн, Йорк (1980), Кулкарни и др. (1983), Боуени др. (1984), Кулкарни (1984)]. Эта возможность основывается на том, что в момент временной симметрии метрика $g_{\mu\nu}$ пространства-времени выбирается так, что удовлетворяются условия $g_{\mu 0} = -\delta_{\mu}^0$, $\partial g_{\mu\nu}/\partial t = 0$, а трехмерная геометрия пространства $h_{ij} = g_{ij}$ находится путем решения уравнения

$$R^{(3)} = 0, \quad (8.5.36)$$

где $R^{(3)}$ – скаляр трехмерной кривизны метрики h_{ij} . Если присутствует электромагнитное поле, то в момент временной симметрии отличны от нуля только компоненты $E_i = F_{i0}$, а начальные условия в этот момент времени для системы уравнений Эйнштейна – Максвелла имеют вид

$$R^{(3)} = 2E_i E^i, \quad E^i_{,i} = 0. \quad (8.5.37)$$

Решение уравнений (8.5.37), описывающее систему N взаимодействующих заряженных черных дыр [Линдквист (1963), Брилл, Линдквист (1963)], выглядит следующим образом:

$$dl^2 \equiv h_{ij} dx^i dx^j = (\chi \psi)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (8.5.38)$$

$$E_i = [\ln(\chi/\psi)]_{,i},$$

где

$$\chi = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}, \quad \psi = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|},$$

$$\alpha_i > 0, \quad \beta_i > 0, \quad \mathbf{r} = (x, y, z).$$

(Двумерное сечение соответствующей метрики для случая $N = 3$ схематично изображено на рис. 73.) Масса M_i и заряд Q_i i -й черной дыры, определяемые по асимптотикам решения на бесконечности листа Σ_i (при $r \rightarrow r_i$), суть

$$M_i = \alpha_i + \beta_i + \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (8.5.39a)$$

$$Q_i = \beta_i - \alpha_i + \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\beta_i \alpha_j - \alpha_i \beta_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (8.5.39b)$$

Масса M и заряд Q системы взаимодействующих черных дыр, определяемые по асимптотикам решения на бесконечности листа Σ (при $r \rightarrow \infty$), равны

$$M = \sum_{i=1}^N (\alpha_i + \beta_i), \quad Q = \sum_{i=1}^N (\beta_i - \alpha_i). \quad (8.5.40)$$

[При $\beta_i = \alpha_i$ решение (8.5.38) описывает систему взаимодействующих незаряженных черных дыр – см. Мизнер, Уилер (1957), Мизнер (1960, 1963), Гиббонс (1972).]

Нетрудно убедиться, что

$$Q = \sum_{i=1}^N Q_i, \quad M_{int} \equiv M - \sum_{i=1}^N M_i = - \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} < 0. \quad (8.5.41)$$

Эти соотношения показывают, что заряды черных дыр складываются аддитивно, в то время как гравитационный дефект масс, связанный со взаимодействием черных дыр, приводит к тому, что суммарная масса системы оказывается меньше суммы их масс. Обсуждение свойств двумерных поверхностей, отвечающих положению горизонтов видимости в момент времени

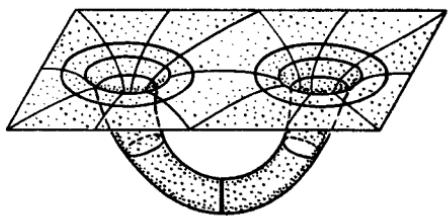


Рис. 74. Решение типа кротовой норы
(двумерное пространственное сечение
пространства-времени)

менной симметрии для системы взаимодействующих черных дыр, см. Брилл, Линдквист (1963), Гиббонс (1972), Бишоп (1984).

Мизнер (1960, 1963) и Линдквист (1963) обобщили решение (8.5.38) на случай, когда вместо системы черных дыр имеется набор "кротовых нор" (двумерное сечение подобного пространства в случае одной "кротовой норы" схематично изображено на рис. 74).

Подчеркнем еще раз, что в общем случае система черных дыр, описываемая решением (8.5.38), не может оставаться в покое все время. Исключением является ситуация, когда $\alpha_i = 0$ и для всех черных дыр выполняется условие $M_i = Q_i$ [Хартль, Хокинг (1972)]. Если $\alpha_i \neq 0$, то выражение (8.5.38) может быть использовано в качестве начальных условий при изучении динамики движения черных дыр с помощью численных методов [см., например, Смарр и др. (1976), Смарр (1979)].

Описанный выше метод построения геометрии пространства-времени для системы черных дыр в момент временной симметрии может быть распространен на случай, когда черные дыры обладают вращением [Боуэн, Йорк (1980), Боуэн и др. (1984), Кулкарни (1984)]. Относительно возможности существования равновесных стационарных аксиально-симметричных конфигураций из вращающихся черных дыр см. Оохара, Сато (1981), Кихара, Томиматсу (1982), Томиматсу, Кихара (1982), Сато (1983), Томиматсу (1983), Ямазаки (1983 а, б), Бичак, Хоенселаерс (1985) и ссылки в этих работах.