§ 9.2. Квантовое рождение частиц во внешнем поле. Общая теория

Для доказательства тех результатов (относительно квантового рождения частиц в черных дырах), которые упоминались в предыдущем параграфе, и для получения более детальной информации о протекании этих квантовых явлений нам потребуется развитый до известной степени математический аппарат квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени.

С формальной точки зрения задача о рождении частиц в черных дырах является частным случаем более общей задачи о рождении частиц в произвольных внешних полях. Стандартная схема построения соответствующей теории сводится к следующему. Выбирают внешнее поле таким образом, чтобы в отдаленном прошлом и в отдаленном будущем оно отсутствовало. В этих, как говорят, ин- и аут-областях удается однозначно определить понятия частицы и вакуума. В частности, в качестве вакуума обычно выбирают низшее по энергии состояние системы. В результате действия внешнего поля в процессе эволюции системы в исходном вакуумном состоянии происходит рождение частиц, так что результат эволюции состояния, отвечающего ин-вакууму, уже не совпадает с аут-вакуумным состоянием. Полную информацию о процессах рождения частиц, их рассеянии и аннигиляции во внешнем поле содержит в себе оператор, связывающий ин- и аут-состояния и получивший название S-матрицы.

В задаче о рождении частиц в черных дырах имеются два существенных момента, приводящие к необходимости модификации стандартной схемы. Во-первых, хотя в физически реалистической постановке задачи, когда рассматривается процесс коллапса, приводящий к образованию черной дыры, можно считать гравитационное поле в прошлом (до начала коллапса) слабым и определить все состояния, относящиеся к ин-области, "выключить" естественным образом гравитационное поле образовавшейся черной дыры в будущем не представляется возможным. Уменьшение массы черной дыры приводит к увеличению, а не уменьшению поверхностной гравитации и, следовательно, интенсивности ее излучения. Поэтому, например, процесс "выключения" гравитационного поля черной дыры путем формального уменьшения ее массы не приводит к желаемому результату.

Во-вторых, и это более существенно, отдаленный наблюдатель может зарегистрировать состояния только тех частиц, которые вылетают наружу. Частицы, рождающиеся и попадающие внутрь черной дыры, остаются для него "невидимыми". При описании любых наблюдений вне черной дыры по состояниям этих частиц происходит усреднение. Иными словами, наблюдатель вне черной дыры всегда имеет дело только с частью полной квантовой системы, и, в соответствии с общими принципами квантовой механики, излучение черной дыры описывается *матрицей плотности*, даже если первоначально (до образования черной дыры) мы имели дело с чистым квантово-механическим состоянием. Заметим, что необходимое усреднение приводится как раз по тем состояниям, которые отвечают "частицам", всегда остающимся в области сильного поля. Именно для них само понятие "частица" является плохо определенным из-за невозможности "выключения" поля черной дыры. К счастью, результат усреднения, описывающий состояние излучения черной дыры, не зависит от произвола в выборе того или иного способа описания этих "невидимых" состояний.

Подводя краткий итог сказанному, отметим, что интересующая нас задача вычисления характеристик квантового излучения черной дыры естественным образом разбивается на два этапа: вычисление оператора S-матрицы и усреднение его по части аут-состояний, отвечающих "невидимым" частицам. Общий формализм построения S-матрицы для задач во внешнем поле мы приведем в этом параграфе, а задача вычисления матрицы плотности, описывающей излучение черной дыры, будет рассмотрена в следующем.

Изложим (по необходимости кратко) схему построения квантовой теории свободных бозе-полей в заданном внешнем (не обязательно гравитационном) поле*).

Общее выражение для действия, описывающего систему действительных бозе-полей $\varphi_A(x)$ $(A = 1, \ldots, M)$, взаимодействующих с произвольным заданным внешним полем $g_Y(x)$ $(Y = 1, \ldots, Q)$, записывается следующим образом:

$$S[\varphi] = -\frac{1}{2}\int [\varphi_{A,\mu} P^{AB\mu\nu}\varphi_{B,\nu} + \varphi_A N^{AB\mu}\varphi_{B,\mu} + \varphi_A T^{AB}\varphi_B]\, d^4x, \tag{9.2.1}$$

где $P^{AB\mu\nu} = P^{(AB)(\mu\nu)}$, $N^{AB\mu} = N^{[AB]\mu}$, $T^{AB} = T^{(AB)}$ – действительные функции от внешнего поля g_Y и его производных. Напомним, что по повторяющимся индексам (в том числе по индексам A и B) производится суммирование. Варьирование этого действия по динамическим переменным φ_A приводит к следующим уравнениям поля:

$$D^{AB}\varphi_B \equiv \left[P^{AB\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - (N^{AB\mu} - P^{AB\mu\nu}{}_{,\nu})\partial_\mu - \left(T^{AB} + \frac{1}{2}N^{AB\mu}{}_{,\mu}\right)\right]\varphi_B = 0. \tag{9.2.2}$$

Поскольку для произвольной пары функций φ_A^1 и φ_A^2 имеет место соотношение

$$\varphi_A^2 D^{AB}\varphi_B^1 - \varphi_A^1 D^{AB}\varphi_B^2 = [B^\mu(\varphi^1, \varphi^2)]_{,\mu}, \tag{9.2.3a}$$

где

$$B^\mu(\varphi^1, \varphi^2) = \varphi_A^2 P^{AB\mu\nu}\varphi_{B,\nu}^1 - \varphi_A^1 P^{AB\mu\nu}\varphi_{B,\nu}^2 + \varphi_A^1 N^{AB\mu}\varphi_B^2, \tag{9.2.3b}$$

то, используя теорему Стокса (П. 32) **), можно убедиться, что выражение

$$B(\varphi^1, \varphi^2) = \int_\Sigma B^\mu(\varphi^1, \varphi^2)\, d\sigma_\mu, \tag{9.2.4}$$

вычисленное для произвольной пары решений φ^1, φ^2 уравнения (9.2.2),

---

) Более подробное изложение этой теории, а также теории ферми-полей в искривленном пространстве-времени см. Де Витт (1965, 1975), Биррел. Девис (1982), Фролов (1979, 1986).

**) Если пространство некомпактно, то предполагается, что решения φ^1 и φ^2 достаточно быстро убывают на бесконечности.

не зависит от выбора полной поверхности Коши Σ. Антисимметричную билинейную форму B, заданную на пространстве решений уравнения (9.2.2), будем называть *канонической формой*, отвечающей этому уравнению.

В квантовой теории поле $\hat{\varphi}_A(x)$ рассматривается как операторное решение уравнения (9.2.2). Канонические коммутационные соотношения, которым подчиняется этот оператор, формулируются стандартным образом. Пусть

$$\hat{\pi}^A(x) = \frac{\delta S}{\delta \varphi_{A,0}(x)} = -P^{AB0\nu}\varphi_{B,\nu} + \frac{1}{2}N^{AB0}\varphi_B$$

– импульс поля $\hat{\varphi}_A$; тогда

$$[\varphi_A(x, x^0), \hat{\varphi}_B(x', x^0)] = 0, \; [\hat{\pi}^A(x, x^0), \hat{\pi}^B(x', x^0)] = 0,$$

$$[\hat{\varphi}_A(x, x^0), \hat{\pi}^B(x', x^0)] = i\delta^B_A\,\delta^3(x, x'). \tag{9.2.5}$$

Простой проверкой можно убедиться, что канонические коммутационные соотношения (9.2.5) полностью эквивалентны следующему соотношению*):

$$[B(\varphi^1, \hat{\varphi}), B(\varphi^2, \hat{\varphi})] = iB(\varphi^1, \varphi^2) \tag{9.2.6}$$

при условии, что оно выполнено для произвольной пары φ^1_A и φ^2_A классических решений системы (9.2.2).

Для введения понятия частицы оказывается удобным рассмотреть множество комплексных решений, удовлетворяющих тем же уравнениям (9.2.2) и тем же граничным условиям, что и поле φ_A, и выбрать в этом пространстве решений базис, т.е. полную систему линейно независимых решений. Удобно потребовать, чтобы этот базис состоял из комплексно-сопряженных друг другу решений $u^i_A(x)$, $\bar{u}^i_A(x)$, удовлетворяющих следующим *условиям нормировки*:

$$B(u^i, u^j) = B(\bar{u}^i, \bar{u}^j) = 0, \; B(u^i, \bar{u}^j) = i\delta^{ij}. \tag{9.2.7}$$

Здесь индексы i, j, ... нумеруют базисные решения. Каждое решение уравнений (9.2.2), удовлетворяющее наложенным граничным условиям, допускает разложение по этому базису. В частности, для оператора поля $\hat{\varphi}_A$ имеем

$$\hat{\varphi}_A(x) = \sum_i [\hat{a}_i u^i_A(x) + \hat{a}^*_i \bar{u}^i_A(x)], \tag{9.2.8}$$

где

$$\hat{a}_i = iB(\bar{u}^i, \hat{\varphi}), \; \hat{a}^*_i = -iB(u^i, \hat{\varphi}). \tag{9.2.9}$$

Если поле $\hat{\varphi}_A$ эрмитово ($\hat{\varphi}^*_A = \hat{\varphi}_A$), то $\hat{a}^*_i = (\hat{a}_i)^*$. Постоянные операторы $\hat{a}^*_i$ и $\hat{a}_i$, называемые *операторами рождения* и *уничтожения частиц* в состоянии с волновой функцией $u^i_A(x)$, удовлетворяют следующим коммута-

---

*) Заметим, что коммутационные соотношения, записанные в форме (9.2.6), имеют бо́льшую область применимости, чем (9.2.5). В частности, они справедливы для теории со связями (т.е. когда $\det(P^{AB00}) = 0$), для которых правила (9.2.5) стандартного канонического квантования требуют изменения.

ционным соотношениям:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^*, \hat{a}_j^*] = 0, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^*] = \delta_{ij}. \tag{9.2.10}$$

В этом легко убедиться, если использовать соотношение (9.2.6) и условия нормировки (9.2.7).

Вакуумное состояние $|\,0\rangle$, отвечающее данному выбору базиса, определяется условием

$$\hat{a}_i\,|\,0\rangle = 0. \tag{9.2.11}$$

Состояние $|\,i_1, \ldots, i_n\rangle$, в котором имеется n частиц с волновыми функциями $u^{i_1}_A(x), \ldots, u^{i_n}_A(x)$, получается из вакуума в результате действия на него соответствующего числа операторов рождения:

$$|\,i_1, \ldots, i_n\rangle = \hat{a}^*_{i_1} \ldots \hat{a}^*_{i_n}\,|\,0\rangle. \tag{9.2.12}$$

Эти базисные многочастичные состояния являются собственными для оператора $\hat{n}_i = \hat{a}_i^* \hat{a}_i$ числа частиц в моде i:

$$\hat{n}_i\,|\,i_1, \ldots, i_n\rangle = n_i\,|\,i_1, \ldots, i_n\rangle, \quad n_i = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ii_k} \tag{9.2.13}$$

и удовлетворяют следующим условиям ортонормируемости и полноты:

$$\langle i_1, \ldots, i_n\,|\,j_1, \ldots, j_m\rangle = 0, \text{ если } n \neq m,$$

$$\langle i_1, \ldots, i_n\,|\,j_1, \ldots, j_n\rangle = \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{перестановкам} \\ (i_1, \ldots, i_n)}} \delta_{i_1 j_1} \ldots \delta_{i_n j_n}, \tag{9.2.14}$$

$$\hat{I} = |\,0\rangle\langle 0\,| + \sum_{n=1}^{\infty} |\,i_1, \ldots, i_n\rangle \frac{1}{n!} \langle i_1, \ldots, i_n\,|. \tag{9.2.15}$$

В последнем равенстве $\hat{I}$ – единичный оператор, а суммирование ведется по всем $(i_1, \ldots, i_n)$.

Очевидно, что выбор базиса $(u^i_A, \bar{u}^i_A)$ и связанного с ним определения "частицы" далеко не однозначен. Приведенная выше формальная конструкция приобретает физический смысл только в том случае, когда удается четко описать набор признаков, по которым мы отличаем вакуумное или одночастичное состояние от всех остальных возможных квантовых состояний системы. В конечном счете этот вопрос сводится к описанию детектора, с помощью которого мы регистрируем частицы. Согласно квантовой теории измерений этот прибор описывается эрмитовым оператором, собственными векторами которого являются состояния, отвечающие определенному числу регистрируемых этим прибором частиц.

В стандартной схеме теории, когда внешнее поле "выключается" в отдаленном прошлом и в отдаленном будущем, можно определить все необходимые понятия в этих асимптотических ин- и аут-областях. В каждой из них приходится иметь дело со свободной теорией бозе-полей в плоском пространстве-времени, для которой однозначно определены сохраняющиеся операторы энергии $\hat{P}_0$ и импульса $\hat{P}_i$, отвечающие трансляциям по временно́й (x^0) и пространственным (x^i) координатам в

пространстве Минковского:

$$[\hat{P}_a, \varphi] = \frac{1}{i} \xi_a^\mu \partial_\mu \varphi. \tag{9.2.16}$$

Здесь $\xi_a^\mu = \delta_a^\mu$ – векторные поля Киллинга, порождающие соответствующие трансляции. Вакуумное состояние в каждой из асимптотических областей определяется как низшее собственное состояние оператора энергии $\hat{P}_0$. Этот выбор однозначно соответствует тому, что в качестве базисных выбираются функции, обладающие свойством положительной частотности по отношению к временно́й координате x^0:

$$\xi_0^\mu \partial_\mu u_A^i(x) = -i\omega_i u_A^i. \tag{9.2.17}$$

Чтобы отличить два базиса, состоящие из решений $(u_A^i, \bar{u}_A^i)$, для которых соотношения (9.2.17) играют роль асимптотических граничных условий в будущем (аут-базис) или в прошлом (ин-базис), мы будем снабжать базисные функции индексом out и in соответственно. Аналогичным образом мы будем использовать эти дополнительные индексы для того, чтобы различать величины, определяемые с помощью этих базисов. Так, например,

$$\hat{\varphi}_A = \sum_i (\hat{a}_{\text{in},i} u_{\text{in},A}^i + \hat{a}_{\text{in},i}^* \bar{u}_{\text{in},A}^i) =$$

$$= \sum_i (\hat{a}_{\text{out},i} u_{\text{out},A}^i + \hat{a}_{\text{out},i}^* \bar{u}_{\text{out},A}^i), \tag{9.2.18}$$

$$\hat{a}_{\text{in},i} \mid 0; \text{in} \rangle = 0, \ \hat{a}_{\text{out},i} \mid 0; \text{out} \rangle = 0. \tag{9.2.19}$$

Поскольку ин- и аут-базисные функции удовлетворяют различным граничным условиям, то ин- и аут-базисы, вообще говоря, не совпадают. Коэффициенты матриц A^{ij} и B^{ij}, связывающих ин- и аут-базисы

$$u_{\text{out},A}^i = \sum_j (A^{ij} u_{\text{in},A}^j + B^{ij} \bar{u}_{\text{in},A}^j), \tag{9.2.20}$$

носят название *коэффициентов преобразования Боголюбова.* Используя условия нормировки (9.2.7), имеем

$$A^{ij} = iB(\bar{u}_{\text{in}}^j, u_{\text{out}}^i), \ B^{ij} = -iB(u_{\text{in}}^j, u_{\text{out}}^i). \tag{9.2.21}$$

Для сокращения записи удобно ввести следующие матричные обозначения:

$$\hat{b}_{\substack{\text{in}\\\text{out}}} = (\hat{a}_{\substack{\text{in},i\\\text{out}}}, \hat{a}^*_{\substack{\text{in},i\\\text{out}}}),$$

$$v_{\substack{\text{in}\\\text{out}}} = \begin{pmatrix} u^i_{\substack{\text{in}\\\text{out}}} \\ \bar{u}^i_{\substack{\text{in}\\\text{out}}} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} A^{ij} & B^{ij} \\ \bar{B}^{ij} & \bar{A}^{ij} \end{pmatrix}. \tag{9.2.22}$$

Используя эти обозначения, имеем

$$v_{\text{out}} = Cv_{\text{in}}, \ b_{\text{in}} = b_{\text{out}} C, \ \hat{\varphi} = \hat{b}_{\text{in}} v_{\text{in}} = \hat{b}_{\text{out}} v_{\text{out}}, \tag{9.2.23}$$

$$b_{\text{out}} = b_{\text{in}} C^{-1}, \ v_{\text{in}} = C^{-1} v_{\text{out}}.$$

Для коэффициентов матрицы C^{-1}, обратной по отношению к C, соот-

ношения (9.2.21) позволяют получить следующее выражение:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} A^{+} & -B' \\ -B^{+} & A' \end{pmatrix}. \tag{9.2.24}$$

В приведенных формулах штрих вверху означает транспонирование, а + – эрмитово сопряжение матриц: $(\ )^{+} = (\overline{\ \ })'$. Условия $CC^{-1} = C^{-1}C = I$ означают выполнение равенств

$$\begin{aligned} &AA^{+} - BB^{+} = I, \quad A^{+}A - B'\bar{B} = I, \\ &(A^{-1}B)' = A^{-1}B, \quad (\bar{B}A^{-1})' = \bar{B}A^{-1}. \end{aligned} \tag{9.2.25}$$

(здесь I – единичная матрица).

Оператор S-матрицы, связывающий ин- и аут-состояния, определяется соотношениями

$$\hat{b}_{\text{in}}\hat{S} = \hat{S}\hat{b}_{\text{out}}. \tag{9.2.26}$$

Можно убедиться, что этот оператор является унитарным $(\hat{S}\hat{S}^{+} = \hat{I})$, обладает свойством

$$\hat{S}\,|\,i_1, \ldots, i_n; \text{out}\,\rangle = |\,i_1, \ldots, i_n; \text{in}\,\rangle \tag{9.2.27}$$

и допускает следующее представление:

$$\hat{S} = \sum_n |\,i_1, \ldots, i_n; \text{in}\,\rangle \frac{1}{n!} \langle i_1, \ldots, i_n; \text{out}\,|. \tag{9.2.28}$$

Если подставить $\hat{b}_{\text{in}} = \hat{b}_{\text{out}}C$ в (9.2.26), то, решая получившееся уравнение, можно выразить оператор $\hat{S}$ через $\hat{b}_{\text{out}}$. Соответствующее решение допускает следующее представление [Березин (1965*), Де Витт (1965)]:

$$\hat{S} = e^{iW_0} : \exp\left(\frac{1}{2} a'_{\text{out}}\, \Lambda \hat{a}_{\text{out}} + \hat{a}^{+}_{\text{out}}(M - I)\hat{a}_{\text{out}} + \frac{1}{2}\hat{a}^{+}_{\text{out}}\, V \hat{a}^{*}_{\text{out}}\right):, \tag{9.2.29}$$

где $::$ означает операцию нормального упорядочения*) относительно аут-операторов, $\hat{a}^{*}_{\text{out}} = (\hat{a}^{+}_{\text{out}})'$ и

$$\begin{aligned} &\Lambda = A^{-1}B, \quad V = -\bar{B}A^{-1}, \quad M = A^{-1\prime}, \\ &e^{iW_0} = \theta\,[\det(A^{+}A)]^{-1/4}, \quad |\,\theta\,| = 1 \end{aligned} \tag{9.2.30}$$

(здесь $\hat{a}'_{\text{out}}\Lambda\hat{a}_{\text{out}} \equiv \sum_{i,j} \hat{a}_{\text{out},i}\,\Lambda^{ij}\hat{a}_{\text{out},j}$ и т.д.).

Из (9.2.25) вытекает симметричность матриц Λ и V:

$$\Lambda' = \Lambda, \quad V' = V. \tag{9.2.31}$$

Этот результат, состоящий в том, что имеется возможность явно вычислить оператор S-матрицы, содержащий полную информацию о квантовых эффектах рождения, рассеяния и поглощения частиц во внешнем поле,

---

) Эта операция состоит в том, что в разложении соответствующего выражения в ряд по операторам рождения и уничтожения все операторы рождения располагаются слева от операторов уничтожения. То же выражение (9.2.29) описывает S-матрицу и в случае ферми-полей. При этом матрицы Λ и V антисимметричны. Общее выражение для них через коэффициенты Боголюбова дано в книгах Березина (1965), Де Витта (1965).

если известны коэффициенты преобразования Боголюбова, определяемые путем решения классических уравнений (9.2.2), является основным для рассматриваемой теории во внешнем поле. Можно убедиться, что матрицы V, M и Λ, входящие в (9.2.29), непосредственно связаны с амплитудами вероятности элементарных процессов рождения, рассеяние и уничтожения во внешнем поле:

$$\begin{aligned}
&\langle i, j; \text{out} \mid 0; \text{in} \rangle = e^{iW_0} V^{ij}, \\
&\langle i; \text{out} \mid j; \text{in} \rangle = e^{iW_0} M^{ij}, \\
&\langle 0; \text{out} \mid i, j; \text{in} \rangle = e^{iW_0} \Lambda^{ij}.
\end{aligned} \tag{9.2.32}$$

§ 9.3. Усреднение по "ненаблюдаемым" состояниям. Матрица плотности

Обсудим теперь более подробно те особенности, которые отличают задачу о рождении частиц в черных дырах от общей задачи во внешнем поле, рассмотренной в предыдущем разделе. Как уже упоминалось, характерным для процессов с участием черных дыр является возможность разделить множество аут-состояний на два класса, представителей которых мы условно будем называть "видимыми" и "невидимыми". К первому классу относятся состояния, отвечающие частицам, вылетающим от черной дыры, ко второму – падающим внутрь нее*). Чтобы сделать это разбиение явным, договоримся использовать вместо индекса i, нумерующего аут-состояния, индекс α для нумерации "видимых" и индекс a для нумерации "невидимых" состояний. Примем также обозначения

$$\begin{aligned}
&\hat{\beta}_\alpha \equiv \hat{a}_{\text{out},\alpha}, \quad \hat{b}_a \equiv \hat{a}_{\text{out},a}, \\
&\mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k; \beta \rangle \mid a_1, \ldots, a_m; b \rangle \equiv \\
&\equiv \hat{\beta}^*_{\alpha_1} \ldots \hat{\beta}^*_{\alpha_k} \hat{b}^*_{a_1} \ldots \hat{b}^*_{a_m} \mid 0; \text{out} \rangle.
\end{aligned} \tag{9.3.1}$$

Произвольный вектор пространства аут-состояний $\mid \Psi \rangle$ допускает следующее разложение:

$$\mid \Psi \rangle = \sum_{k, m} \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_k \\ a_1, \ldots, a_m}} \Psi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k; a_1, \ldots, a_m} \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k; \beta \rangle \mid a_1, \ldots, a_m; b \rangle. \tag{9.3.2}$$

Для среднего значения $\langle \Psi \mid \hat{F} \mid \Psi \rangle$ произвольного оператора $\hat{F}$, зависящего только от "видимых" состояний $\hat{F} = F(\hat{\beta}^*_\alpha, \hat{\beta}_\alpha)$, имеем

$$\begin{aligned}
\langle \Psi \mid \hat{F} \mid \Psi \rangle = \sum_{\substack{k, m \\ k', m'}} \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_k \\ \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{k'} \\ a_1, \ldots, a_m \\ a'_1, \ldots, a'_{m'}}} \bar{\Psi}_{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{k'}; a'_1, \ldots, a'_{m'}} \Psi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k; a_1, \ldots, a_m} \times \\
\times \langle \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{k'}; \beta \mid \langle a'_1, \ldots, a'_{m'}; b \mid F(\hat{\beta}^*_\alpha, \hat{\beta}_\alpha) \mid a_1, \ldots, a_m; b \rangle \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k; \beta \rangle.
\end{aligned} \tag{9.3.3}$$

Поскольку оператор $\hat{F}$ не зависит от $\hat{b}_a$ и $\hat{b}^*_a$, а состояния $\mid a_1, \ldots, a_m; b \rangle$

*) При наличии связанных состояний условимся относить их ко второму классу.