если известны коэффициенты преобразования Боголюбова, определяемые путем решения классических уравнений (9.2.2), является основным для рассматриваемой теории во внешнем поле. Можно убедиться, что матрицы V, M и Λ, входящие в (9.2.29), непосредственно связаны с амплитудами вероятности элементарных процессов рождения, рассеяние и уничтожения во внешнем поле:

$$\begin{aligned}
&\langle i, j; \text{out} \mid 0; \text{in} \rangle = e^{iW_0} V^{ij}, \\
&\langle i; \text{out} \mid j; \text{in} \rangle = e^{iW_0} M^{ij}, \\
&\langle 0; \text{out} \mid i, j; \text{in} \rangle = e^{iW_0} \Lambda^{ij}.
\end{aligned} \tag{9.2.32}$$

§ 9.3. Усреднение по "ненаблюдаемым" состояниям. Матрица плотности

Обсудим теперь более подробно те особенности, которые отличают задачу о рождении частиц в черных дырах от общей задачи во внешнем поле, рассмотренной в предыдущем разделе. Как уже упоминалось, характерным для процессов с участием черных дыр является возможность разделить множество аут-состояний на два класса, представителей которых мы условно будем называть "видимыми" и "невидимыми". К первому классу относятся состояния, отвечающие частицам, вылетающим от черной дыры, ко второму – падающим внутрь нее*). Чтобы сделать это разбиение явным, договоримся использовать вместо индекса i, нумерующего аут-состояния, индекс α для нумерации "видимых" и индекс a для нумерации "невидимых" состояний. Примем также обозначения

$$\begin{aligned}
&\hat{\beta}_\alpha \equiv \hat{a}_{\text{out},\alpha}, \quad \hat{b}_a \equiv \hat{a}_{\text{out},a}, \\
&\mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k; \beta \rangle \mid a_1, \ldots, a_m; b \rangle \equiv \\
&\equiv \hat{\beta}^*_{\alpha_1} \ldots \hat{\beta}^*_{\alpha_k} \hat{b}^*_{a_1} \ldots \hat{b}^*_{a_m} \mid 0; \text{out} \rangle.
\end{aligned} \tag{9.3.1}$$

Произвольный вектор пространства аут-состояний $\mid \Psi \rangle$ допускает следующее разложение:

$$\mid \Psi \rangle = \sum_{k, m} \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_k \\ a_1, \ldots, a_m}} \Psi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k; a_1, \ldots, a_m} \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k; \beta \rangle \mid a_1, \ldots, a_m; b \rangle. \tag{9.3.2}$$

Для среднего значения $\langle \Psi \mid \hat{F} \mid \Psi \rangle$ произвольного оператора $\hat{F}$, зависящего только от "видимых" состояний $\hat{F} = F(\hat{\beta}^*_\alpha, \hat{\beta}_\alpha)$, имеем

$$\begin{aligned}
\langle \Psi \mid \hat{F} \mid \Psi \rangle = \sum_{\substack{k, m \\ k', m'}} \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_k \\ \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{k'} \\ a_1, \ldots, a_m \\ a'_1, \ldots, a'_{m'}}} \bar{\Psi}_{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{k'}; a'_1, \ldots, a'_{m'}} \Psi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k; a_1, \ldots, a_m} \times \\
\times \langle \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{k'}; \beta \mid \langle a'_1, \ldots, a'_{m'}; b \mid F(\hat{\beta}^*_\alpha, \hat{\beta}_\alpha) \mid a_1, \ldots, a_m; b \rangle \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k; \beta \rangle.
\end{aligned} \tag{9.3.3}$$

Поскольку оператор $\hat{F}$ не зависит от $\hat{b}_a$ и $\hat{b}^*_a$, а состояния $\mid a_1, \ldots, a_m; b \rangle$

*) При наличии связанных состояний условимся относить их ко второму классу.

удовлетворяют условиям нормировки

$$\langle a'_1, \ldots, a'_{m'}; b \mid a_1, \ldots, a_m; b \rangle = \delta_{mm'} \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{перестановкам} \\ (a_1, \ldots, a_m)}} \delta_{a'_1 a_1} \ldots \delta_{a'_{m'} a_m}, \tag{9.3.4}$$

то соотношение (9.3.3) можно переписать в виде

$$\langle \Psi \mid F \mid \Psi \rangle =$$

$$= \sum_{k, k'} \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_k \\ \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{k'}}} R_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k; \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{k'}} \langle \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{k'}; \beta \mid \hat{F} \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k; \beta \rangle =$$

$$= \mathrm{Sp}_\beta(\hat{\rho} \hat{F}), \tag{9.3.5}$$

где

$$R_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k; \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{k'}} =$$

$$= \sum_m m! \sum_{a_1, \ldots, a_m} \bar{\Psi}_{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{k'}; a_1, \ldots, a_m} \Psi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k; a_1, \ldots, a_m}, \tag{9.3.6}$$

$$\hat{\rho} = \sum_{k, k'} \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_k \\ \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{k'}}} \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k; \beta \rangle R_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k; \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{k'}} \langle \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{k'}; \beta \mid \tag{9.3.7}$$

и Sp_β означает операцию вычисления следа в пространстве состояний "видимых" частиц.

Следует особо подчеркнуть, что введенная выше матрица плотности $\hat{\rho}$ *не зависит* от способа определения понятия частицы для "невидимых" состояний. На примере преобразований, связывающих ин- и аут-базисы, мы уже отмечали, что отвечающий этому преобразованию оператор $\hat{S}$ является унитарным: $\hat{S}^+ = \hat{S}^{-1}$. Очевидно, что это свойство имеет место для подобных канонических преобразований общего вида. Изменение базиса в подпространстве решений, отвечающих "невидимым" частицам, описывается с помощью унитарного оператора $\hat{U}$, обладающего свойством

$$\hat{U} \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k; \beta \rangle \mid a_1, \ldots, a_m; b \rangle \equiv$$

$$\equiv \sum_{\substack{m' \\ a'_1, \ldots, a'_{m'}}} U_{a_1, \ldots, a_m; a'_1, \ldots, a'_{m'}} \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k; \beta \rangle \mid a'_1, \ldots, a'_{m'}; b \rangle, \tag{9.3.8}$$

$$\sum_{\substack{m' \\ a'_1, \ldots, a'_{m'}}} U_{a_1, \ldots, a_m; a'_1, \ldots, a'_{m'}} \bar{U}_{a''_1, \ldots, a''_{m''}; a'_1, \ldots, a'_{m'}} =$$

$$= \delta_{mm''} \delta_{a_1 a''_1} \ldots \delta_{a_m a''_{m''}} \tag{9.3.9}$$

При этом преобразовании коэффициенты $\Psi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k;\ a_1, \ldots, a_m}$ разложения (9.3.2) преобразуются по следующему закону:

$$\Psi'_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k; a'_1, \ldots, a'_{m'}} = \sum_{\substack{m \\ a_1, \ldots, a_m}} \Psi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k; a_1, \ldots, a_m} U_{a_1, \ldots, a_m; a'_1, \ldots, a'_{m'}}, \tag{9.3.10}$$

а коэффициенты матрицы $R_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k;\ \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{k'}}$, вследствие условия унитарности (9.3.9), остаются неизменными.

Нетрудно убедиться, используя соотношение (9.3.5) для единичного оператора $\hat{F} = \hat{I}$, что для нормированного состояния $|\Psi\rangle$ ($\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$) матрица плотности $\hat{\rho}$ удовлетворяет условию нормировки $\mathrm{Sp}_\beta(\hat{\rho}) = 1$.

§ 9.4. Матрица плотности и производящий функционал для квантовых эффектов в черных дырах

Теперь после изложения общей формальной схемы мы обратимся непосредственно к вопросу о ее применении для описания квантовых эффектов в черных дырах. Для простоты мы ограничимся рассмотрением теории безмассового нейтрального скалярного поля φ в пространстве-времени вращающейся черной дыры. Случай безмассовых полей является наиболее важным, поскольку, с одной стороны, именно безмассовые поля дают основной вклад в квантовое излучение черных дыр, а с другой стороны, это рассмотрение дает хорошее приближение при описании рождения массивных частиц в случае, когда хокинговская температура черной дыры много больше энергии покоя этих частиц, и для их описания можно пользоваться ультрарелятивистским приближением. К обсуждению влияния спина, массы и заряда частиц на процессы их рождения в черных дырах мы вернемся позднее.

На рис. 75 изображена диаграмма Пенроуза для пространства-времени вращающейся черной дыры, возникающей в результате коллапса массивного тела. Будем считать, что координата опережающего конформного времени Бонди v выбрана таким образом, что световой луч, посланный с $\mathcal{J}^-$ в момент $v = 0$, достигает точки $r = 0$ точно в момент возникновения горизонта (см. рис. 75). Поскольку после образования черной дыры она довольно быстро становится практически стационарной, мы будем считать, что волновые пакеты, испущенные с $\mathcal{J}^-$, начиная с не-

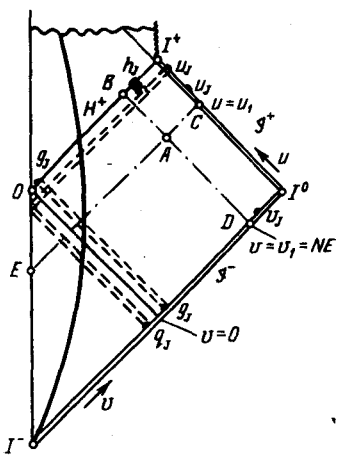

Рис. 75. Диаграмма Пенроуза пространства-времени вращающейся черной дыры, возникающей в результате коллапса массивного тела