

При этом преобразовании коэффициенты  $\Psi_{\alpha_1}, \dots, \alpha_k; a_1, \dots, a_m$  разложения (9.3.2) преобразуются по следующему закону:

$$\Psi'_{\alpha_1, \dots, \alpha_k; a'_1, \dots, a'_m} = \sum_m \Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k; a_1, \dots, a_m} U_{a_1, \dots, a_m; a'_1, \dots, a'_m}, \quad (9.3.10)$$

а коэффициенты матрицы  $R_{\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha'_1, \dots, \alpha'_{k'}}$ , вследствие условия унитарности (9.3.9), остаются неизменными.

Нетрудно убедиться, используя соотношение (9.3.5) для единичного оператора  $\hat{F} = \hat{I}$ , что для нормированного состояния  $|\Psi\rangle$  ( $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ ) матрица плотности  $\hat{\rho}$  удовлетворяет условию нормировки  $\text{Sp}_\beta(\hat{\rho}) = 1$ .

#### § 9.4. Матрица плотности и производящий функционал для квантовых эффектов в черных дырах

Теперь после изложения общей формальной схемы мы обратимся непосредственно к вопросу о ее применении для описания квантовых эффектов в черных дырах. Для простоты мы ограничимся рассмотрением теории безмассового нейтрального скалярного поля  $\varphi$  в пространстве-времени вращающейся черной дыры. Случай безмассовых полей является наиболее важным, поскольку, с одной стороны, именно безмассовые поля дают основной вклад в квантовое излучение черных дыр, а с другой стороны, это рассмотрение дает хорошее приближение при описании рождения массивных частиц в случае, когда хокинговская температура черной дыры много больше энергии покоя этих частиц, и для их описания можно пользоваться ультрапрелиativистским приближением. К обсуждению влияния спина, массы и заряда частиц на процессы их рождения в черных дырах мы вернемся позднее.

На рис. 75 изображена диаграмма Пенроуза для пространства-времени вращающейся черной дыры, возникающей в результате коллапса массивного тела. Будем считать, что координата опережающего конформного времени Бонди  $v$  выбрана таким образом, что световой луч, посланный с  $\mathcal{I}^-$  в момент  $v = 0$ , достигает точки  $r = 0$  точно в момент возникновения горизонта (см. рис. 75). Поскольку после образования черной дыры она довольно быстро становится практически стационарной, мы будем считать, что волновые пакеты, испущенные с  $\mathcal{I}^-$ , начиная с не-

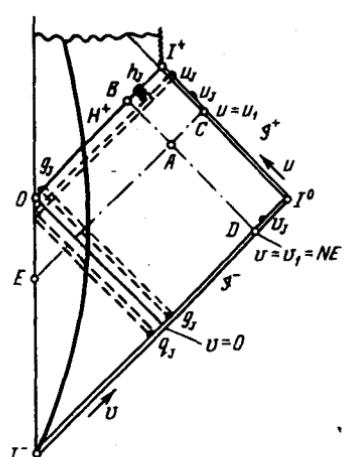


Рис. 75. Диаграмма Пенроуза пространства-времени вращающейся черной дыры, возникающей в результате коллапса массивного тела

которого момента опережающего времени  $v = v_1$ , движутся все время в метрике, совпадающей с метрикой Керра. Для построения базисных волновых функций мы используем разложение решений волнового уравнения

$$\square \varphi = 0 \quad (9.4.1)$$

в метрике Керра по сфероидальным волновым функциям

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} S_l^m(\cos \theta), \quad (9.4.2)$$

где  $S_l^m$  определены как ограниченные на интервале  $[-1, 1]$  собственные функции оператора

$$\left\{ \frac{d}{dz} \left[ (1-z^2) \frac{d}{dz} \right] - \omega^2 a^2 (1-z^2) - \frac{m^2}{1-z^2} \right\} S_l^m(z) = -\lambda_l^m S_l^m(z), \quad (9.4.3)$$

удовлетворяющие условиям нормировки

$$\int_{-1}^1 S_l^m(z) S_{l'}^m(z) dz = \delta_{ll'}, \quad (9.4.4)$$

Обозначим через  $v_{\omega lm}$  решение уравнения (9.4.1), обладающее тем свойством, что его образ  $V_{\omega lm}$  на  $\mathcal{I}^-$  ( $V_{\omega lm}(v, \theta, \varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} [rv_{\omega lm}(r, v, \theta, \varphi)]$ ) имеет вид

$$V_{\omega lm} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega v} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (9.4.5)$$

где  $v$  – координата опережающего конформного времени Бонди (см. § 5.1). Для дальнейшего оказывается удобным рассматривать в качестве базисных не сами функции  $v_{\omega lm}$ , а построенные из них решения типа волновых пакетов. С этой целью зафиксируем действительное число  $E$  ( $0 < E \ll 1$ ) и обозначим ( $j \geq 0$ )

$$v_{jnlm} = E^{-1/2} \int_{jE}^{(j+1)E} e^{2\pi i n \omega / E} v_{\omega lm} d\omega. \quad (9.4.6)$$

Условимся далее коллективный индекс  $jnlm$  обозначать кратко через  $\alpha$ . Волновые пакеты  $v_\alpha$  на  $\mathcal{I}^-$  содержат частоты в интервале от  $jE$  до  $(j+1)E$ , имеют максимум вблизи значения опережающего времени  $v = 2\pi n/E$  и обладают шириной  $\Delta v \sim 2\pi/E$ .

Заметим, что для рассматриваемой теории безмассового поля поверхность  $\mathcal{I}^-$  в пространстве Пенроуза играет роль полной поверхности Коши и каноническая форма  $B$  для пары  $\varphi^1, \varphi^2$  решений уравнения (9.4.1):

$$B(\varphi^1, \varphi^2) = \int_{\Sigma} (\varphi^2 \varphi^1_{,\nu} - \varphi^1 \varphi^2_{,\nu}) g^{\nu\mu} d\sigma_{\mu} \quad (9.4.7)$$

допускает следующую запись:

$$B(\varphi^1, \varphi^2) = \int_{\mathcal{I}^-} (\Phi^1 \partial_v \Phi^2 - \Phi^2 \partial_v \Phi^1) dv d\omega, \quad (9.4.8)$$

где  $\Phi^1$  и  $\Phi^2$  – образы полей  $\varphi^1$  и  $\varphi^2$  на  $\mathcal{I}^-$ .

Нетрудно убедиться, используя (9.4.2), (9.4.4) – (9.4.6) и (9.4.8), что волновые пакеты  $v_\alpha$  удовлетворяют условиям нормировки

$$B(v_\alpha, v_{\alpha'}) = B(\bar{v}_\alpha, \bar{v}_{\alpha'}) = 0, \quad B(v_\alpha, \bar{v}_{\alpha'}) = i\delta_{\alpha\alpha'}, \quad (9.4.9)$$

и совместно с  $\bar{v}_\alpha$  образуют полную систему на  $\mathcal{Y}^-$ . Здесь и далее мы используем обозначение

$$\delta_{\alpha\alpha'} \equiv \delta_{jj}, \delta_{nn}, \delta_{ll}, \delta_{mm}. \quad (9.4.10)$$

Указанный набор функций  $(v_\alpha, \bar{v}_\alpha)$  можно выбрать в качестве ин-базиса. Отвечающее этому выбору ин-вакуумное состояние  $|0; in\rangle$  выделяется условием отсутствия потока энергии, падающего с  $\mathcal{Y}^-$  на черную дыру.

Заменив в выражении (9.4.5) опережающее конформное время Бонди  $u$  на запаздывающее  $u$ , получим функции на  $\mathcal{Y}^+$ , которые обозначим  $U_{\omega lm}$ . Их этих функций с помощью преобразования, аналогичного (9.4.6), построим на  $\mathcal{Y}^+$  волновые пакеты  $u_\alpha$ . Образование горизонта событий  $H^+$  приводит к тому, что задание образа функции на  $\mathcal{Y}^+$  еще не определяет решение волнового уравнения (9.4.1). Дополнительные условия, необходимые для однозначного определения решения, могут быть заданы в виде значений решения на горизонте  $H^+$ . Определим волновой пакет  $u_\alpha$  как решение (9.4.1), обращающееся в нуль на горизонте событий и обладающее образом  $U_\alpha$  на  $\mathcal{Y}^+$ . Очевидно, что эти пакеты удовлетворяют условиям нормировки, аналогичным (9.4.9). Если дополнить решения  $(u_\alpha, \bar{u}_\alpha)$  до полной системы с помощью произвольных функций  $(h_\alpha, \bar{h}_\alpha)$ , образы которых обращаются в нуль на  $\mathcal{Y}^+$  и образуют полную нормированную систему функций на  $H^+$ , то систему  $(u_\alpha, \bar{u}_\alpha, h_\alpha, \bar{h}_\alpha)$  можно выбрать как аут-базис. В качестве  $h_\alpha$  удобно выбрать решения, которые определяются следующим образом. Пусть  $\tilde{h}_{\omega lm}$  – решения, обращающиеся в нуль на  $\mathcal{Y}^+$  и принимающие на  $H^+$  значения в координатах (4.4.1)

$$\tilde{h}_{\omega lm}|_{H^+} = \frac{1}{\sqrt{4\pi |\omega - m\Omega^H| (r_+^2 + a^2)}} e^{-i\omega \tilde{\psi}} Y_{lm}(\theta, \tilde{\varphi}), \quad (9.4.11)$$

и пусть  $\tilde{h}_\alpha$  – волновые пакеты (9.4.6), построенные для этих решений. Определим  $h_\alpha$  с помощью соотношения

$$h_\alpha = \theta(\sigma_\alpha) \tilde{h}_\alpha + \theta(-\sigma_\alpha) \tilde{\bar{h}}_\alpha, \quad \sigma_\alpha = \text{sign}(\omega_j - m\Omega^H). \quad (9.4.12)$$

Можно убедиться, что функции  $h_\alpha$  удовлетворяют следующим условиям нормировки:

$$B(h_\alpha, h_{\alpha'}) = B(\bar{h}_\alpha, \bar{h}_{\alpha'}) = 0, \quad B(h_\alpha, \bar{h}_{\alpha'}) = i\delta_{\alpha\alpha'}. \quad (9.4.13)$$

В пространстве-времени вечной черной дыры, описываемом метрикой Керра, волновое уравнение (9.4.1) допускает полное разделение переменных, и поэтому в этом пространстве имеется следующая связь междуведенными волновыми функциями:

$$v_{\omega lm} = R_{\omega lm} u_{\omega lm} + T_{\omega lm} h_{\omega lm}. \quad (9.4.14)$$

Коэффициенты  $R_{\omega lm}$  и  $T_{\omega lm}$  будем называть *коэффициентами отражения и поглощения* волны  $v_{\omega lm}$  черной дырой. Для классической волны величина  $|R_{\omega lm}|^2$  равна отношению энергии рассеянной волны к энергии падающей. Это отношение становится больше единицы для тех волн, для которых выполнено условие суперрадиации. Если выбрать параметр  $E$  при построении пакетов достаточно малым, а  $R_{\omega lm}$  и  $T_{\omega lm}$  гладко зависят от частоты  $\omega$ , то аналогичное разложение можно записать и для волновых пакетов:

$$v_\alpha = R_\alpha u_\alpha + T_\alpha \tilde{h}_\alpha. \quad (9.4.15)$$

Заметим теперь, что волновые ( $v_\alpha \equiv v_{jnlm}$ ) пакеты с достаточно большим значением  $n$  ( $\geq N \equiv v_1/E$ ) в пространстве-времени черной дыры, возникающей в результате коллапса, движутся в метрике, практически не отличающейся от метрики Керра (см. рис. 75). Поэтому для них также выполняется соотношение (9.4.15). Из условий нормировки функций  $v_\alpha$ ,  $u_\alpha$  и  $h_\alpha$  вытекает следующее соотношение:

$$|R_\alpha|^2 + \sigma_\alpha |T_\alpha|^2 = 1. \quad (9.4.16)$$

Из него следует, в частности, что  $|R_\alpha|^2 > 1$  для тех мод, для которых выполнено условие суперрадиации  $\sigma_\alpha < 0$ .

Следующий этап состоит в нахождении коэффициентов преобразования Боголюбова, связывающих построенные ин- и аут-базисы. Эта задача существенно упрощается, если воспользоваться следующим приемом, введенным Уолдом (1975). Далее, не оговаривая этого особо, мы будем рассматривать волновые пакеты, индекс  $\alpha$  для которых удовлетворяет условию  $n \geq N$ , так что для пакетов с этими индексами выполнено соотношение (9.4.15). Определим волновые пакеты  $\tilde{q}_\alpha$ , потребовав, чтобы они были ортогональны  $v_\alpha$ :

$$B(\tilde{q}_\alpha, v_{\alpha'}) = B(\tilde{q}_\alpha, \bar{v}_{\alpha'}) = 0 \quad (9.4.17)$$

и допускали разложение

$$\tilde{q}_\alpha = t_\alpha u_\alpha + r_\alpha \tilde{h}_\alpha. \quad (9.4.18)$$

Через  $q_\alpha$  обозначим волновой пакет, связанный с  $\tilde{q}_\alpha$  соотношением

$$q_\alpha = \theta(\sigma_\alpha) \tilde{q}_\alpha + \theta(-\sigma_\alpha) \bar{\tilde{q}}_\alpha \quad (9.4.19)$$

и нормированный условием

$$B(q_\alpha, \bar{q}_{\alpha'}) = i \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (9.4.20)$$

Условия ортогональности и нормировки приводят к выполнению наряду с (9.4.16) также следующих соотношений:

$$|r_\alpha|^2 + \sigma_\alpha |t_\alpha|^2 = 1, \quad t_\alpha \bar{R}_\alpha + \sigma_\alpha r_\alpha \bar{T}_\alpha = 0. \quad (9.4.21)$$

Из свойств симметрии метрики Керра по отношению к преобразованию  $t \rightarrow -t$ ,  $\varphi \rightarrow -\varphi$  следует равенство [см., например, Унру (1974)]

$$T_\alpha = \sigma_\alpha t_\alpha. \quad (9.4.22)$$

Используя соотношения (9.4.15), (9.4.16), (9.4.18), (9.4.21) и (9.4.22), можно получить

$$u_\alpha = \bar{T}_\alpha \tilde{q}_\alpha + \bar{R}_\alpha v_\alpha. \quad (9.4.23)$$

Это соотношение показывает, что если проследить за эволюцией в прошлое пакета  $u_\alpha$ , то часть его ( $\bar{R}_\alpha v_\alpha$ ), рассеиваясь на стационарном поле черной дыры, выходит на  $\mathcal{I}^-$  при  $v > 0$ , а другая ( $\bar{T}_\alpha \tilde{q}_\alpha$ ) проходит через колапсирующее тело в момент времени, предшествующий возникновению горизонта событий, и выходит на  $\mathcal{I}^-$  при  $v < 0$ . Хокинг (1975) показал, что для описания распространения этой второй части можно использовать приближение геометрической оптики и что в этом приближении волновой пакет  $\tilde{Q}_\alpha$  на  $\mathcal{I}^-$  получается с помощью преобразования (9.4.6) из функции

$$\tilde{Q}_{\omega lm} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{\omega}}} e^{i\tilde{\omega}\ln(-v)/\kappa} Y_{lm}(\theta, \varphi)\theta(-v). \quad (9.4.24)$$

Здесь  $\tilde{\omega} = \omega - m\Omega^H$ , а  $\theta(x)$  – ступенчатая функция, отличная от нуля и равная 1 при  $x > 0$ .

Для получения этого результата достаточно рассмотреть поведение поверхности постоянной фазы для волны  $u_{\omega lm}$ . В приближении геометрической оптики эта поверхность – световая. Вне колапсирующего тела, в области, где геометрия пространства-времени хорошо аппроксимируется метрикой Керра, эта поверхность описывается уравнением  $\tilde{U} = \text{const}$ , где  $\tilde{U}$  – запаздывающая координата Керра, а ее образующие – световые геодезические  $\tilde{U} = \text{const}$ ,  $\tilde{\varphi}_+ = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$  (см. § 4.4). При продолжении в прошлое эти геодезические проходят через колапсирующее вещество и выходят на  $\mathcal{I}^-$  в точке с координатами  $v, \varphi, \theta_1$  ( $v < 0$ ). Можно убедиться [Хокинг (1975)], что при  $\tilde{U} \rightarrow \infty$  имеют место следующие соотношения:

$$\tilde{U} = -\kappa^{-1} \ln(-v), \quad \tilde{\varphi}_+ = -\Omega^H \kappa^{-1} \ln(-v) + \varphi,$$

связывающие  $\tilde{U}, \tilde{\varphi}_+$  с  $v, \varphi$ . Если учесть, что на  $\mathcal{I}^+$  координаты  $\tilde{U}, \tilde{\varphi}_+$  совпадают с  $u, \varphi$ , то приходим к выражению (9.4.24) для  $\tilde{Q}_{\omega lm}$ . Указанное приближение выполняется тем лучше, чем в более поздние моменты времени  $u$  выходит на  $\mathcal{I}^+$  пакет  $u_\alpha$ . Мы будем считать, что число  $N$  выбрано достаточно большим и описанное приближение выполняется с необходимой степенью точности.

Введем еще одно семейство решений  $g_\alpha$ , определив их с помощью задания образов  $G_\alpha$  на  $\mathcal{I}^-$ :

$$G_\alpha(v, \theta, \varphi) = \bar{Q}_\alpha(-v, \theta, \varphi). \quad (9.4.25)$$

Покажем, что линейные комбинации  $p_\alpha$  и  $n_\alpha$  функций  $g_\alpha$  и  $q_\alpha$ :

$$p_\alpha = c_\alpha g_\alpha + s_\alpha \bar{q}_\alpha,$$

$$n_\alpha = c_\alpha q_\alpha + s_\alpha \bar{g}_\alpha, \quad (9.4.26)$$

где

$$s_\alpha = (w^{-2\sigma_\alpha} - 1)^{-1/2}, \quad c_\alpha = (1 - w_\alpha^{2\sigma_\alpha})^{-1/2}, \quad (9.4.27)$$

$$w_\alpha = e^{-\pi(\omega_j - m\Omega^H)/\kappa},$$

обладают положительно-частотными по отношению к опережающему времени  $v$  образами на  $\mathcal{Y}^-$ .

Для доказательства достаточно заметить, что функции  $p_\alpha$  и  $n_\alpha$  получаются с помощью преобразования (9.4.6) из решений, которые на  $\mathcal{Y}^-$  содержат следующую зависимость от  $v$  ( $-\infty < \tilde{\omega} < \infty$ ):

$$F_{\omega lm}(v) = \theta(v)e^{-i\tilde{\omega} \ln v/\kappa} + \theta(-v)e^{-\pi \tilde{\omega}/\kappa} e^{-i\tilde{\omega} \ln(-v)/\kappa}. \quad (9.4.28)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 e^{-ipv} e^{-i\tilde{\omega} \ln(-v)/\kappa} dv = \\ & = -e^{\pi \tilde{\omega}/\kappa} \int_0^\infty e^{-ipv} e^{-i\tilde{\omega} \ln v/\kappa} dv \quad \text{при } p > 0. \end{aligned} \quad (9.4.29)$$

В этом нетрудно убедиться, осуществив деформацию контура интегрирования в правой части (9.4.29) в нижней полуплоскости. Поэтому при  $p > 0$  имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipv} F_{\omega lm}(v) dv = 0, \quad (9.4.30)$$

откуда и вытекает условие положительной частотности функций  $p_\alpha$  и  $n_\alpha$ .

Выберем в качестве ин-базисных положительно-частотных решений наборы функций

$$W_\alpha^{\text{in}} = \begin{pmatrix} v_\alpha \\ p_\alpha \\ n_\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = jnlm, \quad (9.4.31)$$

при  $n$ , больших выбранного выше значения  $N$ , дополнив их произвольным образом положительно-частотными на  $\mathcal{Y}^-$  функциями до полного ортонормированного базиса. Аналогичным образом аут-базис образуем путем дополнения наборов функций

$$W_\alpha^{\text{out}} = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ h_\alpha \\ g_\alpha \end{pmatrix}, \quad n > N, \quad (9.4.32)$$

до полной ортонормированной системы. Удобство описанного выбора

базисов, предложенного Уолдом (1975), состоит в том, что при этом выборе происходит факторизация матриц преобразования Боголюбова, и мы имеем

$$W_\alpha^{\text{in}} = A_\alpha^+ W_\alpha^{\text{out}} - B_\alpha' \bar{W}_\alpha^{\text{out}}. \quad (9.4.33)$$

Матрицы преобразований  $A_\alpha$  и  $B_\alpha$ , связывающие наборы ин-базисных ( $W_\alpha^{\text{in}}$ ) и аут-базисных ( $W_\alpha^{\text{out}}$ ) функций, легко определяются с помощью соотношений (9.4.15), (9.4.18) и (9.4.26) и имеют вид

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \bar{R}_\alpha & s_\alpha \bar{t}_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & c_\alpha r_\alpha \\ 0 & c_\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad B_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c_\alpha \bar{t}_\alpha \\ -T_\alpha & -s_\alpha r_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & s_\alpha \end{pmatrix}, \quad \sigma_\alpha < 0,$$

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \bar{R}_\alpha & 0 & c_\alpha \bar{t}_\alpha \\ \bar{T}_\alpha & 0 & c_\alpha \bar{r}_\alpha \\ 0 & c_\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad B_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -s_\alpha \bar{t}_\alpha & 0 \\ 0 & -s_\alpha \bar{r}_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -s_\alpha \end{pmatrix}, \quad \sigma_\alpha > 0. \quad (9.4.34)$$

Таким образом, с помощью описанного способа перехода к базисам Уолда нам удалось получить явное выражение для тех коэффициентов преобразований Боголюбова, которые определяют связь ин- и аут-базисных функций при больших значениях  $n \geq N$ . Используя общие формулы (9.2.29) и (9.2.30), можно получить выражение для оператора  $S$ -матрицы.

Следующим этапом является вычисление матрицы плотности, описывающей излучение черной дыры. Обозначим через

$$\hat{\beta}_\alpha = iB(\bar{u}_\alpha, \hat{\phi}),$$

$$\hat{\beta}_\alpha^* = -iB(u_\alpha, \hat{\phi})$$

операторы уничтожения и рождения частиц в состоянии  $u_\alpha$ . Пусть нас интересует вычисление средних вида  $\langle 0; \text{in} | F(\hat{\beta}_\alpha^*, \hat{\beta}_\alpha) | 0; \text{in} \rangle$ . Используя выражения (9.2.29), (9.2.30) для оператора  $S$ -матрицы и представляя  $| 0; \text{in} \rangle$  в виде  $| 0; \text{in} \rangle = \hat{S} | 0; \text{out} \rangle$ , можно определить коэффициенты разложения (9.3.2) и вычислить искомую матрицу плотности.

В общем случае матрица плотности  $\hat{\rho}$ , описывающая наблюдаемые на  $\mathcal{Y}^+$  и возникающая при усреднении по состояниям  $h_\alpha$ , зависит от деталей процесса образования черной дыры. Однако, если интересоваться значениями наблюдаемых на  $\mathcal{Y}^+$  лишь в достаточно поздние моменты запаздывающего времени ( $u > u_1$ ), то эти детали оказываются несущественными и значения этих наблюдаемых зависят только от параметров образованнойся стационарной черной дыры. В этом можно убедиться, если рассмотреть матрицу плотности  $\hat{\rho}_N$ , получаемую из  $\hat{\rho}$  дополнительным усреднением по всем состояниям на  $\mathcal{Y}^+$ , кроме  $u_\alpha$  с  $n \geq N$ . Для получения явного выражения  $\hat{\rho}_N$  оказывается достаточным знания вычисленных выше коэффициентов преобразований Боголюбова  $A_\alpha$  и  $B_\alpha$  при  $n \geq N$ . Опуская детали вычисле-

ний, которые можно найти в работах Фролова (1983<sup>\*a</sup>, 1986<sup>\*</sup>), приведем здесь лишь окончательный результат:

$$\hat{\rho}_N = \prod_{\alpha} \hat{\rho}_{\alpha}, \quad n \geq N \quad (9.4.35)$$

$$\hat{\rho}_{\alpha} = Q_{\alpha} : \exp [-Q_{\alpha} \hat{\beta}_{\alpha}^* \hat{\beta}_{\alpha}] := Q_{\alpha} \exp [\ln(1 - Q_{\alpha}) \hat{\beta}_{\alpha}^* \hat{\beta}_{\alpha}],$$

где  $Q_{\alpha} = (1 - w_{\alpha}^2)(1 - w_{\alpha}^2 |R_{\alpha}|^2)^{-1}$ , а :: означает операцию нормального упорядочения относительно операторов  $\hat{\beta}_{\alpha}$  и  $\hat{\beta}_{\alpha}^*$ . (Последнее равенство написано с учетом известного соотношения:  $\exp \tau \hat{\beta}^* \hat{\beta} := \exp [\ln(1 + \tau) \hat{\beta}^* \hat{\beta}]$ .)

Для невращающихся черных дыр выражение (9.4.35) было получено Хокингом. Пусть  $|n_{\alpha}\rangle$  – состояние, когда имеется  $n_{\alpha}$  частиц в моде  $\alpha$ . Тогда

$$\hat{\rho}_{\alpha} = \sum_{n_{\alpha}, n'_{\alpha}} \rho_{n_{\alpha} n'_{\alpha}} |n_{\alpha}\rangle \langle n'_{\alpha}|. \quad (9.4.36a)$$

Для невращающейся черной дыры

$$\rho_{n_{\alpha} n'_{\alpha}} = \delta_{n_{\alpha} n'_{\alpha}} (\Gamma_{\alpha})^{n_{\alpha}} (e^{\omega/\theta} - \epsilon)^{\epsilon} (e^{\omega/\theta} - \epsilon + \epsilon \Gamma_{\alpha})^{-n_{\alpha} + \epsilon}, \quad (9.4.36b)$$

где  $\Gamma_{\alpha} = |T_{\alpha}|^2$ , а  $\epsilon = 1$ . Аналогичное выражение справедливо для  $\hat{\rho}_{\alpha}$  и в случае ферми-частиц, с той лишь разницей, что  $\epsilon$  в этом случае равно  $-1$ , а  $n_{\alpha}$  может принимать значения 0 и 1 [Уолд (1975), Хокинг (1976b)]. Если пренебречь процессами рассеяния на гравитационном поле ( $R_{\alpha} = 0$ ), то полученное выражение переписывается в следующем виде:

$$\hat{\rho}_N = e^{-\hat{\mathcal{H}}_0/\theta}, \quad (9.4.37a)$$

где  $\hat{\mathcal{H}}_0$  – свободный гамильтониан, описывающий вылетающие из  $\mathcal{Y}^+$  частицы:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} \hat{\beta}_{\alpha}^* \hat{\beta}_{\alpha}, \quad n \geq N \quad (9.4.37b)$$

а

$$\theta = \kappa/2\pi \quad (9.4.38)$$

– хокинговская температура черной дыры.

Выражение (9.4.35) для матрицы плотности  $\hat{\rho}_N$  позволяет вычислять средние значения наблюдаемых  $\hat{F} = F(\hat{\beta}_{\alpha}^*, \hat{\beta}_{\alpha})$  на  $\mathcal{Y}^+$ :

$$\langle 0; in | F(\hat{\beta}_{\alpha}^*, \hat{\beta}_{\alpha}) | 0; in \rangle = Sp_{\beta}(\hat{\rho}_N \hat{F}). \quad (9.4.39)$$

В квантовой теории поля и квантовой статистике хорошо известен и широко употребляется следующий прием, позволяющий существенно упростить вычисления выражений типа (9.4.39). Выберем в качестве  $\hat{F}$  оператор

$$\begin{aligned} \hat{K}[\psi, \bar{\psi}] &= \exp \left( \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \hat{\beta}_{\alpha}^* \right) \exp \left( \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \hat{\beta}_{\alpha} \right) \equiv \\ &\equiv : \exp \left[ \sum_{\alpha} \left( \psi_{\alpha} \hat{\beta}_{\alpha}^* + \bar{\psi}_{\alpha} \hat{\beta}_{\alpha} \right) \right] : \end{aligned} \quad (9.4.40)$$

Заметим теперь, что если оператор  $\hat{F}$  в (9.4.39) задан в нормальной форме

$$\begin{aligned}\hat{F} &= F(\hat{\beta}_\alpha^*, \hat{\beta}_\alpha) = \\ &= \sum_{m, m'} \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_m \\ \alpha'_1, \dots, \alpha'_{m'}}} F_{\alpha_1, \dots, \alpha_m; \alpha'_1, \dots, \alpha'_{m'}} \hat{\beta}_{\alpha_1}^* \dots \hat{\beta}_{\alpha_m}^* \hat{\beta}_{\alpha'_1} \dots \hat{\beta}_{\alpha'_{m'}},\end{aligned}\quad (9.4.41)$$

то его можно записать в следующем виде:

$$F(\hat{\beta}_\alpha^*, \hat{\beta}_\alpha) = \left[ F\left( \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_\alpha} \right) K(\psi, \bar{\psi}) \right]_{\psi = \bar{\psi} = 0}, \quad (9.4.42)$$

где

$$\begin{aligned}F\left( \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_\alpha} \right) &= \\ &= \sum_{m, m'} \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_m \\ \alpha'_1, \dots, \alpha'_{m'}}} F_{\alpha_1, \dots, \alpha_m; \alpha'_1, \dots, \alpha'_{m'}} X \\ &\times \frac{\partial^m}{\partial \psi_{\alpha_1} \dots \partial \psi_{\alpha_m}} \frac{\partial^m}{\partial \bar{\psi}_{\alpha'_1} \dots \partial \bar{\psi}_{\alpha'_{m'}}}.\end{aligned}\quad (9.4.43)$$

Обозначим

$$Z[\psi, \bar{\psi}] = \text{Sp}_\beta [\hat{\rho}_N \hat{K}(\psi, \bar{\psi})]; \quad (9.4.44)$$

тогда имеем

$$\langle 0; \text{in} | F(\hat{\beta}_\alpha^*, \hat{\beta}_\alpha) | 0; \text{in} \rangle = \left\{ F\left( \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_\alpha} \right) Z[\psi, \bar{\psi}] \right\}_{\psi = \bar{\psi} = 0}. \quad (9.4.45)$$

Иными словами, вместо того чтобы каждый раз заново вычислять  $\langle \hat{F} \rangle \equiv \text{Sp}_\beta (\hat{\rho}_N \hat{F})$ , достаточно провести вычисления этой величины один раз для  $\hat{F} = \hat{K}[\psi, \bar{\psi}]$  и найти величину  $Z[\psi, \bar{\psi}]$ , которая называется *производящим функционалом*. После этого задача вычисления  $\langle \hat{F} \rangle$  сводится к дифференцированию  $Z[\psi, \bar{\psi}]$ .

Можно посредством небольшой модификации описанного метода существенно расширить класс задач, решаемых с его помощью. Во-первых, оказывается удобным в качестве  $\hat{K}$  выбрать следующее выражение:

$$\hat{K}[\psi, \bar{\psi}, \mu] = : \exp [- \sum_{\alpha} (\mu_\alpha \hat{\beta}_\alpha^* \hat{\beta}_\alpha - \psi_\alpha \hat{\beta}_\alpha^* - \bar{\psi}_\alpha \hat{\beta}_\alpha) ] :. \quad (9.4.46)$$

Поскольку дифференцирование по  $\mu_\alpha$  приводит к появлению выражения  $\hat{n}_\alpha = \hat{\beta}_\alpha^* \hat{\beta}_\alpha$ , то введение зависимости от  $\mu$  в  $\hat{K}$  позволяет легко вычислять средние от выражений, содержащих операторы числа частиц  $\hat{n}_\alpha$ . Во-вторых, путем введения дополнительных переменных  $\gamma_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha$  в  $Z$  можно получить формулы, позволяющие вычислять средние от оператора  $\hat{F}$  не только в

вакуумном, но и в произвольном многочастичном начальном состоянии. С этой целью заметим, что

$$\langle \Psi | \hat{F} | \Psi \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho}_\Psi \hat{F}), \quad (9.4.47)$$

где

$$\hat{\rho}_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|. \quad (9.4.48)$$

В частности,

$$\langle 0; \text{in} | \hat{F} | 0; \text{in} \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho}_0 \hat{F}), \quad (9.4.49)$$

где

$$\hat{\rho}_0 = |0; \text{in}\rangle\langle 0; \text{in}| = : \exp(-\sum_\alpha \hat{a}_{\text{in},\alpha}^* \hat{a}_{\text{in},\alpha}): \quad (9.4.50)$$

Здесь : : — операция нормального упорядочения относительно операторов

$$\hat{a}_{\text{in},\alpha} = iB(\bar{v}_\alpha, \hat{\phi}), \quad \hat{a}_{\text{in},\alpha}^* = -iB(v_\alpha, \hat{\phi}). \quad (9.4.51)$$

Определим производящий функционал  $Z[\psi, \mu; \gamma]$  соотношением

$$Z[\psi, \mu; \gamma] = \text{Sp}(\hat{\rho}_\gamma \hat{K}[\psi, \bar{\psi}, \mu]), \quad (9.4.52)$$

где

$$\hat{\rho}_\gamma =: \exp[-\sum_{\substack{\alpha \\ n \geq N}} \hat{a}_{\text{in},\alpha}^* \hat{a}_{\text{in},\alpha} + \sum_{\substack{\alpha \\ n \geq N}} (\gamma_\alpha \hat{a}_{\text{in},\alpha}^* + \gamma_\alpha \hat{a}_{\text{in},\alpha})]: \quad (9.4.53)$$

При  $\mu_\alpha = 0, \gamma_\alpha = \bar{\gamma}_\alpha = 0$   $Z[\psi, \mu; \gamma]$  очевидным образом совпадает с выражением (9.4.44).

Явное выражение для производящего функционала  $Z[\psi, \mu; \gamma]$  имеет следующий вид [Фролов (1983<sup>a</sup>, 1986<sup>\*</sup>)]:

$$Z[\psi, \mu; \gamma] = \prod_{\substack{\alpha \\ n \geq N}} Z_\alpha[\psi_\alpha, \mu_\alpha; \gamma_\alpha], \quad (9.4.54)$$

где

$$Z_\alpha[\psi_\alpha, \mu_\alpha; \gamma_\alpha] = \frac{Q_\alpha}{C_\alpha} \exp\left(\frac{P_\alpha}{C_\alpha}\right). \quad (9.4.55)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= (1 - w_\alpha^2)(1 - w_\alpha^2 |R_\alpha|^2)^{-1}, \\ C_\alpha &= Q_\alpha + \mu_\alpha - Q_\alpha \mu_\alpha, \\ P_\alpha &= (C_\alpha - \mu_\alpha Q_\alpha |R_\alpha|^2) \bar{\gamma}_\alpha \gamma_\alpha + Q_\alpha R_\alpha \gamma_\alpha \bar{\psi}_\alpha + \\ &+ Q_\alpha \bar{R}_\alpha \bar{\gamma}_\alpha \psi_\alpha + (1 - Q_\alpha) \bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha, \end{aligned} \quad (9.4.56)$$

$R_\alpha$  — коэффициент отражения, входящий в соотношение (9.4.15), а  $w_\alpha$  определено равенством (9.4.27).

В заключение этого параграфа мы приведем два общих соотношения, устанавливающие связь производящего функционала  $Z[\psi, \mu; \gamma]$  с основ-

ными, представляющими физический интерес величинами, характеризующими квантовые эффекты в черных дырах.

Введем следующие обозначения:

$$D_{\alpha}^{l_{\alpha}} = \frac{1}{(l_{\alpha})!} \frac{\partial^{l_{\alpha}}}{\partial \gamma_{\alpha}^{l_{\alpha}}} \frac{\partial^{l_{\alpha}}}{\partial \bar{\gamma}_{\alpha}^{l_{\alpha}}}, \quad \Delta_{\alpha}^{k_{\alpha}} = \frac{1}{(k_{\alpha})!} \frac{\partial^{k_{\alpha}}}{\partial \psi_{\alpha}^{k_{\alpha}}} \frac{\partial^{k_{\alpha}}}{\partial \bar{\psi}_{\alpha}^{k_{\alpha}}}. \quad (9.4.57)$$

1) Пусть  $|\alpha'_1, \dots, \alpha'_m; \text{ in}\rangle = \hat{a}_{\text{in}, \alpha'_1}^* \dots \hat{a}_{\text{in}, \alpha'_m}^* |0; \text{ in}\rangle, \hat{Q} = Q(\hat{n}_{\alpha_1}, \dots, \dots, \hat{n}_{\alpha_k})$  – функция операторов  $\hat{n}_{\alpha} \equiv \hat{\beta}_{\alpha}^* \hat{\beta}_{\alpha}$  и  $\hat{F} = F(\hat{\beta}_{\alpha}^*, \hat{\beta}_{\alpha})$  – оператор, заданный в нормальной форме вида (9.4.41). Тогда

$$\langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_m; \text{ in} | Q(\hat{n}_{\alpha_1}, \dots, \hat{n}_{\alpha_k}) | \alpha'_1, \dots, \alpha'_m; \text{ in} \rangle = \\ = \left\{ D_{\alpha'_1}^1 \dots D_{\alpha'_m}^1 Q \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_{\alpha_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \lambda_{\alpha_k}} \right) Z[\psi = 0, \mu = 1 - e^{\lambda}; \gamma] \right\}_{\lambda=\gamma=0}, \quad (9.4.58)$$

$$\langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_m; \text{ in} | F(\hat{\beta}_{\alpha}^*, \hat{\beta}_{\alpha}) | \alpha'_1, \dots, \alpha'_m; \text{ in} \rangle = \\ = \left\{ D_{\alpha'_1}^1 \dots D_{\alpha'_m}^1 F \left( \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_{\alpha}} \right) Z[\psi, \mu = 0; \gamma] \right\}_{\psi=\gamma=0}. \quad (9.4.59)$$

2) Пусть  $P(k_{\alpha_1}, \dots, k_{\alpha_n} | l_{\alpha_1}, \dots, l_{\alpha_n})$  – вероятность излучения черной дырой на  $\mathcal{Y}^+$   $k_{\alpha_i}$  квантов в моде  $u_{\alpha_1}, \dots, k_{\alpha_n}$  квантов в моде  $u_{\alpha_n}$  при условии, что на  $\mathcal{Y}^-$  имелось  $l_{\alpha_i}$  квантов в моде  $v_{\alpha_1}, \dots, l_{\alpha_n}$  квантов в моде  $v_{\alpha_n}$  ( $k_{\alpha_i} \geq 0, l_{\alpha_i} \geq 0, k_{\alpha_l} + l_{\alpha_l} > 0$ ). Тогда справедливы равенства

$$P(k_{\alpha_1}, \dots, k_{\alpha_n} | l_{\alpha_1}, \dots, l_{\alpha_n}) = P(k_{\alpha_1} | l_{\alpha_1}) \dots P(k_{\alpha_n} | l_{\alpha_n}), \quad (9.4.60)$$

$$P(k_{\alpha} | l_{\alpha}) = (D_{\alpha}^{l_{\alpha}} \Delta_{\alpha}^{k_{\alpha}} Z_{\alpha}[\psi_{\alpha}, 1; \gamma_{\alpha}])_{\gamma_{\alpha}=\psi_{\alpha}=0}.$$

Таким образом, вычисление средних значений наблюдаемых, корреляционных функций и распределений вероятностей для квантовых процессов в поле черной дыры эффективно сводится к выполнению операций дифференцирования производящего функционала  $Z$ , определяемого соотношениями (9.4.54) – (9.4.56). Подчеркнем, что производящий функционал полностью определен, если наряду с поверхностной гравитацией  $k$  и угловой скоростью  $\Omega^H$  черной дыры известны также коэффициенты отражения  $R_{\alpha}$  и поглощения  $T_{\alpha}$  волновых пакетов  $v_{\alpha}$  черной дырой. При этом, по описанным выше причинам, достаточно значения этих величин для волновых пакетов  $v_{\alpha}$ , движущихся в стационарной метрике Керра образовавшейся черной дыры. Нахождение коэффициентов  $R_{\alpha}$  и  $T_{\alpha}$  требует решения одномерной задачи рассеяния. Запишем решение  $v_{\omega lm}$  уравнения (9.4.1) в метрике Керра в виде

$$v_{\omega lm} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} e^{-i\omega t} w_{\omega lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (9.4.61)$$

где  $w_{\omega lm}(r)$  удовлетворяет радиальному уравнению

$$\frac{d^2}{dr^{*2}} w_{\omega lm} + U_{\omega lm} w_{\omega lm} = 0 \quad (9.4.62)$$

и следующим граничным условиям:

$$w_{\omega lm} \sim \begin{cases} e^{-i\omega r^*} + R_{\omega lm} e^{i\omega r^*}, & r^* \rightarrow \infty, \\ \left| \frac{\omega}{\tilde{\omega}} \right|^{1/2} T_{\omega lm} e^{-i\tilde{\omega} r^*}, & r^* \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (9.4.63)$$

Здесь

$$\tilde{\omega} = \omega - m\Omega^H, \quad \frac{dr^*}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{r^2 - 2Mr + a^2}, \quad (9.4.64)$$

$$U_{\omega lm} = (\tilde{\omega} - A_{\omega lm})^2 - B_{\omega lm}, \quad (9.4.65)$$

$$A_{\omega lm} = \frac{am}{r^2 + a^2} - \Omega^H m,$$

$$B_{\omega lm} = \Delta \left[ \frac{\lambda_l^m - 2a\omega m}{(r^2 + a^2)^2} + \frac{1}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \frac{d}{dr} \left( \frac{r\Delta}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right) \right], \quad (9.4.66)$$

а  $\lambda_l^m$  – собственное значение, отвечающее функции  $S_l^m$  (9.4.3).

Задача нахождения  $R_{\omega lm}$  и  $T_{\omega lm}$ , а также ее аналог для полей с другими характеристиками (спином, отличным от нуля, массой и зарядом) подробно исследовалась в многочисленных работах. Ее подробное обсуждение и явные выражения для коэффициентов отражения и поглощения, отвечающие этим случаям, см. Чандрасекар (1983), где приведены также ссылки на оригинальные работы.

### § 9.5. Частные случаи

В этом разделе мы обсудим ряд конкретных результатов, вытекающих из общих соотношений (9.4.58) – (9.4.60).

а) Эффект Хокинга. Пусть первоначально, до образования черной дыры, система находилась в вакуумном состоянии. После возникновения черной дыры она становится источником излучения, причем среднее число частиц, излучаемых ею в mode  $\alpha$  и регистрируемых отдаленным наблюдателем,дается следующим выражением:

$$\langle \hat{n}_\alpha \rangle_0 \equiv \langle 0; \text{in} | \hat{n}_\alpha | 0; \text{in} \rangle = \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda_\alpha} Z_\alpha [0, 1 - e^{\lambda_\alpha}; 0] \right\}_{\lambda_\alpha=0} = \frac{\Gamma_\alpha}{\exp(\tilde{\omega}_\alpha/\theta) - 1}, \quad (9.5.1)$$

где  $\Gamma_\alpha = \sigma_\alpha |T_\alpha|^2$ ,  $\tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - m_\alpha \Omega^H$ ,  $\theta = \kappa/2\pi$  – температура черной дыры. Отметим, что хотя при  $\tilde{\omega}_\alpha = 0$  знаменатель (9.5.1) обращается в нуль, среднее число частиц, рождающихся в подобных модах, остается конечным, поскольку одновременно обращается в нуль и  $|T_\alpha|^2$ . Можно также убедиться, что изменение знака знаменателя при  $\tilde{\omega}_\alpha < 0$  сопровождается изменением знака  $\sigma_\alpha$ , так что в целом выражение (9.5.1) остается всегда положительным.