

где  $w_{\omega lm}(r)$  удовлетворяет радиальному уравнению

$$\frac{d^2}{dr^{*2}} w_{\omega lm} + U_{\omega lm} w_{\omega lm} = 0 \quad (9.4.62)$$

и следующим граничным условиям:

$$w_{\omega lm} \sim \begin{cases} e^{-i\omega r^*} + R_{\omega lm} e^{i\omega r^*}, & r^* \rightarrow \infty, \\ \left| \frac{\omega}{\tilde{\omega}} \right|^{1/2} T_{\omega lm} e^{-i\tilde{\omega} r^*}, & r^* \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (9.4.63)$$

Здесь

$$\tilde{\omega} = \omega - m\Omega^H, \quad \frac{dr^*}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{r^2 - 2Mr + a^2}, \quad (9.4.64)$$

$$U_{\omega lm} = (\tilde{\omega} - A_{\omega lm})^2 - B_{\omega lm}, \quad (9.4.65)$$

$$A_{\omega lm} = \frac{am}{r^2 + a^2} - \Omega^H m,$$

$$B_{\omega lm} = \Delta \left[ \frac{\lambda_l^m - 2a\omega m}{(r^2 + a^2)^2} + \frac{1}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \frac{d}{dr} \left( \frac{r\Delta}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right) \right], \quad (9.4.66)$$

а  $\lambda_l^m$  – собственное значение, отвечающее функции  $S_l^m$  (9.4.3).

Задача нахождения  $R_{\omega lm}$  и  $T_{\omega lm}$ , а также ее аналог для полей с другими характеристиками (спином, отличным от нуля, массой и зарядом) подробно исследовалась в многочисленных работах. Ее подробное обсуждение и явные выражения для коэффициентов отражения и поглощения, отвечающие этим случаям, см. Чандрасекар (1983), где приведены также ссылки на оригинальные работы.

### § 9.5. Частные случаи

В этом разделе мы обсудим ряд конкретных результатов, вытекающих из общих соотношений (9.4.58) – (9.4.60).

а) Эффект Хокинга. Пусть первоначально, до образования черной дыры, система находилась в вакуумном состоянии. После возникновения черной дыры она становится источником излучения, причем среднее число частиц, излучаемых ею в mode  $\alpha$  и регистрируемых отдаленным наблюдателем,дается следующим выражением:

$$\langle \hat{n}_\alpha \rangle_0 \equiv \langle 0; \text{in} | \hat{n}_\alpha | 0; \text{in} \rangle = \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda_\alpha} Z_\alpha [0, 1 - e^{\lambda_\alpha}; 0] \right\}_{\lambda_\alpha=0} = \frac{\Gamma_\alpha}{\exp(\tilde{\omega}_\alpha/\theta) - 1}, \quad (9.5.1)$$

где  $\Gamma_\alpha = \sigma_\alpha |T_\alpha|^2$ ,  $\tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - m_\alpha \Omega^H$ ,  $\theta = \kappa/2\pi$  – температура черной дыры. Отметим, что хотя при  $\tilde{\omega}_\alpha = 0$  знаменатель (9.5.1) обращается в нуль, среднее число частиц, рождающихся в подобных модах, остается конечным, поскольку одновременно обращается в нуль и  $|T_\alpha|^2$ . Можно также убедиться, что изменение знака знаменателя при  $\tilde{\omega}_\alpha < 0$  сопровождается изменением знака  $\sigma_\alpha$ , так что в целом выражение (9.5.1) остается всегда положительным.

Поскольку коэффициент поглощения пакета  $v_\alpha$  стационарной черной дырой не зависит от момента времени  $v = 2\pi n/E$ , когда этот пакет был испущен, то число частиц, выплетающих на  $\mathcal{I}^+$ , не зависит от момента запаздывающего времени  $v$ . Иными словами, образовавшаяся черная дыра становится источником стационарного излучения. Появление стационарного потока (мы уже отмечали это выше) можно интерпретировать как следствие спонтанного процесса рождения пар частиц в стационарном гравитационном поле вблизи горизонта событий, в результате которого одна из частиц падает внутрь черной дыры, а другая вылетает на бесконечность\*).

Возможна также другая интерпретация результата (9.5.1), в рамках которой более отчетливо выявляется роль нестационарности гравитационного поля в процессе образования черной дыры [эта интерпретация обсуждается, например, в работах Герлаха (1976) и Зельдовича (1976\*)]. Рассмотрим поведение волнового пакета, испущенного с  $\mathcal{I}^-$  при  $v < 0$  с характерной частотой  $\omega$  так, что он проходит коллапсирующее тело и выходит наружу непосредственно перед моментом образования горизонта. Такой пакет испытывает сильное красное смещение, и его характерная частота становится  $\omega'$ . Как бы велика ни была частота  $\omega$ , найдется такой момент  $v < 0$ , начиная с которого  $\omega' \lesssim 1/T_g$ , где  $T_g = r_g/c$  – характерное время гравитационного коллапса.

Для подобных квантов действие переменного гравитационного поля коллапсирующей системы является существенно неадиабатически. Число квантов при неадиабатическом возмущении уже не сохраняется, а в вакуумном состоянии происходит рождение частиц. Чем больше частота нулевых вакуумных колебаний, тем ближе к горизонту они должны двигаться для того, чтобы оказалось выполненным условие неадиабатичности и родился реальный квант, и тем позднее выйдет он к отдаленному наблюдателю. Поскольку в вакууме имеются нулевые колебания со сколь угодно высокой частотой, этот процесс приводит к бесконечно растянутому во времени процессу излучения черной дыры.

Заметим, что в плоском пространстве процессы рождения частиц стационарным полем и полем, изменяющимся во времени, довольно существенно отличаются по своим характеристикам [см., например, Швингер (1956\*)]. Особенность задачи о рождении частиц в черных дырах состоит в том, что рождение происходит в окрестности горизонта событий, который является светоподобной поверхностью. Именно поэтому описанные "стационарная" и "нестационарная" интерпретации этого эффекта не противоречат, а взаимно дополняют друг друга.

б) Индуцированное излучение. Пусть на черную дыру с  $\mathcal{I}^-$  падает  $m$  частиц в моде  $\alpha$ . Тогда для среднего значения числа частиц в состоянии  $\alpha$

\* ) Унру (1981) обратил внимание на то, что явление квантового рождения частиц в черных дырах допускает гидродинамическую аналогию. Если при течении жидкости или газа имеется замкнутая двумерная поверхность, разделяющая области дозвукового и сверхзвукового течения (сопло Лаваля), то в подобной системе должно возникнуть излучение фоновых с тепловым спектром.

на  $\mathcal{Y}^+$  получаем, используя (9.4.58), следующее выражение:

$$\langle \hat{n}_\alpha \rangle_m = \langle m_\alpha; \text{in} | \hat{n}_\alpha | m_\alpha; \text{in} \rangle = \\ = \{ D_\alpha^{m_\alpha} [(-1 + Q_\alpha^{-1} + |R_\alpha|^2 \bar{\gamma}_\alpha \gamma_\alpha) e^{\bar{\gamma}_\alpha \gamma_\alpha}] \}_{\gamma=0} = \langle \hat{n}_\alpha \rangle_0 + m_\alpha |R_\alpha|^2. \quad (9.5.2)$$

Член  $\langle \hat{n}_\alpha \rangle_0$  описывает спонтанное рождение частиц из вакуума и дается выражением (9.5.1). В работе Бекенштейна, Майзельса (1977) было обращено внимание на то, что полученное выражение можно эквивалентным образом переписать в следующем виде:

$$\langle \hat{n}_\alpha \rangle_m = A_\alpha^\downarrow + B_\alpha^\downarrow m_\alpha + (1 - B_\alpha^\uparrow) m_\alpha, \quad (9.5.3)$$

а величины

$$A_\alpha^\downarrow = B_\alpha^\downarrow = \langle \hat{n}_\alpha \rangle_0 = \frac{\sigma_\alpha |T_\alpha|^2}{\exp(\tilde{\omega}_\alpha/\theta) - 1}, \quad (9.5.4)$$

$$B_\alpha^\uparrow = \frac{\sigma_\alpha |T_\alpha|^2}{1 - \exp(-\tilde{\omega}_\alpha/\theta)} \quad (9.5.5)$$

можно интерпретировать как аналог коэффициентов Эйнштейна для процессов в черных дырах. Член  $A_\alpha^\downarrow$  описывает спонтанное рождение частиц из вакуума,  $B_\alpha^\uparrow$  играет роль коэффициента поглощения, а  $B_\alpha^\downarrow m_\alpha$  описывает индуцированное излучение частиц в моде  $\alpha$ .

Величину  $1 - B_\alpha^\uparrow$  можно интерпретировать как вероятность рассеяния моды  $\alpha$  черной дырой. Используя (9.4.16) и (9.5.4), запишем выражение для  $|R_\alpha|^2$  в следующем виде:

$$|R_\alpha|^2 = (1 - B_\alpha^\uparrow) + B_\alpha^\downarrow. \quad (9.5.6)$$

Это соотношение показывает, что величина  $|R_\alpha|^2$ , характеризующая рассеяние черной дырой частицы в моде  $\alpha$ , является суммой вероятности рассеяния  $1 - B_\alpha^\uparrow$  падающей частицы и вероятности индуцированного излучения  $B_\alpha^\downarrow$  в этой моде. Поскольку  $B_\alpha^\downarrow = B_\alpha^\uparrow \exp(-\tilde{\omega}_\alpha/\theta)$ , то для суперрадиационных мод коэффициент индуцированного излучения  $B_\alpha^\downarrow$  превосходит коэффициент поглощения  $B_\alpha^\uparrow$  и  $|R_\alpha|^2$  принимает значения, большие единицы.

Соотношения (9.5.3) – (9.5.5) показывают, что излучение черной дыры подчинено тем же законам, что и излучение нагретых тел. Имеется, однако, весьма существенное отличие. Температура черной дыры определяется теми же параметрами (массой и угловым моментом), что и ее геометрические размеры, в то время как для обычного тела температура – независимый параметр.

в) Рассеяние когерентной волны. Выше мы уже отмечали, что имеется тесная связь процессов распространения во внешнем поле классической волны и отдельных квантов. Проследим эту связь более подробно для случая рассеяния на черной дыре. Рассмотрим падающую на черную дыру классическую волну, которая с квантовой точки зрения описывается как когерентная совокупность квантов и характеризуется следующим когерентным состоянием:

$$|\gamma_\beta; \text{in}\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \bar{\gamma}_\beta \gamma_\beta\right) \exp(\gamma_\beta \hat{a}_{\text{in},\beta}^*) |0; \text{in}\rangle. \quad (9.5.7)$$

### Условие нормировки этого состояния

$$\langle \gamma_\beta; \text{in} | \gamma_\beta; \text{in} \rangle = 1 \quad (9.5.8)$$

вытекает из следующего соотношения [см., например, Клаудер, Сударшан (1968)]:

$$e^{\hat{X}} e^{\hat{Y}} = e^{\hat{X} \cdot \hat{Y}} e^{\hat{X}} e^{\hat{Y}}, \quad (9.5.9)$$

которое выполняется для произвольных операторов  $\hat{X}$  и  $\hat{Y}$  таких, что  $[\hat{X}, \hat{Y}]$  коммутирует с  $\hat{X}$  и  $\hat{Y}$ .

С помощью простой проверки легко убедиться, что

$$\hat{a}_{\text{in}, \beta} e^{\gamma_\beta \hat{a}_{\text{in}, \beta}^*} = e^{\gamma_\beta \hat{a}_{\text{in}, \beta}^*} (\hat{a}_{\text{in}, \beta} + \gamma_\beta). \quad (9.5.10)$$

Используя это соотношение, можно показать, что среднее значение образа  $\hat{\Phi}_{\text{in}}$  поля  $\hat{\phi}$  на  $\mathcal{J}^-$ :

$$\hat{\Phi}_{\text{in}} = \sum_{\alpha} (V_{\alpha} \hat{a}_{\text{in}, \alpha}^* + \bar{V}_{\alpha} \hat{a}_{\text{in}, \alpha}) \quad (9.5.11)$$

в когерентном состоянии (9.5.7) дается следующим выражением:

$$\Phi_{\gamma_\alpha}^{\text{in}} \equiv \langle \gamma_\beta; \text{in} | \hat{\Phi}_{\text{in}} | \gamma_\beta; \text{in} \rangle = \gamma_\beta \bar{V}_\beta + \bar{\gamma}_\beta V_\beta. \quad (9.5.12)$$

Для образа  $\Phi_{\text{out}}$  рассеянной волны на  $\mathcal{J}^+$  имеем

$$\Phi_{\gamma_\beta}^{\text{out}} \equiv \langle \gamma_\beta; \text{in} | \hat{\Phi}_{\text{out}} | \gamma_\beta; \text{in} \rangle. \quad (9.5.13)$$

Заметим теперь, что справедливы соотношения

$$|\gamma_\beta; \text{in} \rangle \langle \gamma_\beta; \text{in}| = e^{-\bar{\gamma}_\beta \gamma_\beta} \hat{\rho}_\gamma, \quad (9.5.14)$$

$$\Phi_{\gamma_\beta}^{\text{out}} = e^{-\bar{\gamma}_\beta \gamma_\beta} \text{Sp}(\hat{\rho}_\gamma \hat{\Phi}_{\text{out}}), \quad (9.5.15)$$

$$\hat{\Phi}_{\text{out}} \equiv \sum_{\alpha'} (U_{\alpha'} \hat{\beta}_{\alpha'}^* + \bar{U}_{\alpha'} \hat{\beta}_{\alpha'}), \quad (9.5.16)$$

$$\hat{\Phi}_{\text{out}} = \left\{ \sum_{\alpha} \left( U_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha}} + \bar{U}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_{\alpha}} \right) \hat{K}[\psi, \bar{\psi}, 0] \right\}_{\psi=\bar{\psi}=0}, \quad (9.5.17)$$

где  $\hat{\rho}_\gamma$  и  $\hat{K}$  даются соответственно выражениями (9.4.53) и (9.4.46), причем в (9.4.53) отличны от нуля только те члены с  $\gamma_\alpha$  и  $\bar{\gamma}_\alpha$ , в которых индекс  $\alpha$  совпадает с  $\beta$ . Эти соотношения позволяют установить следующую связь  $\Phi_{\gamma_\beta}^{\text{out}}$  с функционалом  $Z$ :

$$\Phi_{\gamma_\beta}^{\text{out}} = e^{-\bar{\gamma}_\beta \gamma_\beta} \left\{ \sum_{\alpha} \left( U_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha}} + \bar{U}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_{\alpha}} \right) Z[\psi, 0; \gamma] \right\}_{\psi=0}. \quad (9.5.18)$$

Используя выражения (9.4.54) – (9.4.56) для  $Z$ , окончательно получаем

$$\Phi_{\gamma_\beta}^{\text{out}} = \gamma_\beta R_\beta \bar{U}_\beta + \bar{\gamma}_\beta \bar{R}_\beta U_\beta. \quad (9.5.19)$$

Иными словами, отношение квадрата амплитуды рассеянной волны к

квадрату амплитуды падающей равно  $|R_\beta|^2$ . Эта величина больше единицы, т.е. происходит усиление тех мод, для которых выполнено условие суперрадиации  $\sigma_\alpha < 0$ .

г) Потеря энергии и углового момента черной дырой при квантовом излучении. Если  $\Phi_{\text{out}}$  – образ поля  $\varphi$  на  $\mathcal{Y}^+$ , то интенсивности потерь системой энергии  $dE/du$  и углового момента  $dJ/du$ , вызываемых излучением этого поля, даются следующими выражениями [ср. с (5.1.18)]:

$$-\frac{dE}{du} = \int d\Omega \frac{\partial}{\partial u} \Phi_{\text{out}} \frac{\partial}{\partial u} \Phi_{\text{out}}, \quad (9.5.20)$$

$$-\frac{dJ}{du} = \int d\Omega \frac{\partial}{\partial u} \Phi_{\text{out}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_{\text{out}}, \quad (9.5.21)$$

где интегрирование ведется по сфере  $S^2$ ,  $u = \text{const}$  на  $\mathcal{Y}^+$  и  $d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$  – элемент площади  $S^2$ .

В квантовом случае  $\Phi_{\text{out}}$  следует заменить оператором  $\hat{\Phi}_{\text{out}}$ , симметризовать выражение и произвести усреднение (9.5.20) и (9.5.21) по некоторому состоянию, отвечающему определенному выбору начальных условий. Поскольку в полученном выражении встречаются операторы поля в совпадающих точках, то требуется еще задать определенные правила регуляризации. В рассматриваемом случае эти правила крайне просты и сводятся к тому, что вместо рассматриваемого выражения берется его нормальная форма относительно операторов  $\hat{\beta}_\alpha^*$  и  $\hat{\beta}_\alpha$ . Причина обсуждаемой расходности состоит в наличии вакуумных нулевых колебаний, приводящих к тому, что даже в отсутствие внешнего поля имеются указанные расходности. Задача, интересующая нас, состоит в изучении влияния внешнего поля на состояние квантовой системы. Поэтому нам важны не потоки энергии и момента, связанные с флюктуациями вакуума в плоском пространстве, а лишь измеримые приборами изменения этих потоков, вызванные возникновением черной дыры, и мы должны произвести вычитание из рассматриваемых величин аналогичных средних по аут-вакуумному состоянию. Нетрудно убедиться, что эта процедура эквивалентна описанному выше переходу к нормальной форме.

Для простоты ограничимся случаем, когда до образования черной дыры система находилась в вакуумном состоянии. Пусть  $(\xi = (u, \theta, \varphi), \xi' = (u', \theta', \varphi'))$

$$G(\xi, \xi') = \langle 0; \text{in} | : \hat{\Phi}_{\text{out}}(u, \theta, \varphi) \hat{\Phi}_{\text{out}}(u', \theta', \varphi') : | 0; \text{in} \rangle; \quad (9.5.22)$$

тогда

$$-\frac{dE}{du} = \int d\Omega \left[ \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u'} G(u, \theta, \varphi; u', \theta, \varphi) \right]_{u'=u}, \quad (9.5.23)$$

$$-\frac{dJ}{du} = \int d\Omega \left[ \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial \varphi'} G(u, \theta, \varphi; u', \theta, \varphi') \right]_{\substack{u'=u \\ \varphi'=\varphi}}. \quad (9.5.24)$$

Используя для вычисления  $G(\xi, \xi')$  разложение (9.5.16) оператора  $\hat{\Phi}_{\text{out}}$

и соотношение (9.4.59), имеем

$$\begin{aligned} G(\xi, \xi') &= \left\{ \sum_{\alpha, \alpha'} \left[ U_\alpha(\xi) \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} + \bar{U}_\alpha(\xi) \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_\alpha} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ U_{\alpha'}(\xi) \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha'}} + \bar{U}_{\alpha'}(\xi) \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_{\alpha'}} \right] Z[\psi, 0; 0] \right\}_{\psi=0} = \\ &= \sum_\alpha \langle \hat{n}_\alpha \rangle_0 [\bar{U}_\alpha(\xi) U_\alpha(\xi') + \bar{U}_\alpha(\xi') U_\alpha(\xi)], \end{aligned} \quad (9.5.25)$$

где  $\langle \hat{n}_\alpha \rangle_0$  — среднее число частиц в моде  $\alpha$ , излучаемое черной дырой и описываемое выражением (9.5.1). Заметим, что поскольку суммирование в (9.5.25) ведется по полной системе функций, можно вместо  $U_\alpha$  использовать любую другую полную систему функций на  $\mathcal{J}^+$ . Удобно, в частности, переписать (9.5.25) в следующем виде:

$$G(\xi, \xi') = \int_0^\infty d\omega \sum_{l,m} \langle \hat{n}_{\omega lm} \rangle_0 [\bar{U}_{\omega lm}(\xi) U_{\omega lm}(\xi') + \bar{U}_{\omega lm}(\xi') U_{\omega lm}(\xi)], \quad (9.5.26)$$

где

$$U_{\omega lm}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u} Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (9.5.27)$$

Подставляя это разложение  $G$  в (9.5.23) и (9.5.24), выполняя операции дифференцирования и интегрируя по угловым переменным с использованием условий нормировки (9.4.4), окончательно получаем

$$-\frac{dE}{du} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \sum_{l,m} \frac{\sigma_{\omega lm} \omega |T_{\omega lm}|^2}{\exp(\tilde{\omega}/\theta) - 1}, \quad (9.5.28)$$

$$-\frac{dJ}{du} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \sum_{l,m} \frac{\sigma_{\omega lm} m |T_{\omega lm}|^2}{\exp(\tilde{\omega}/\theta) - 1}. \quad (9.5.29)$$

Если масса черной дыры велика, так что температура очень мала, то

$$\frac{\sigma_{\omega lm}}{\exp(\tilde{\omega}/\theta) - 1} \approx \frac{1}{2} (1 - \sigma_{\omega lm}). \quad (9.5.30)$$

В этом пределе вклад в излучение дают только моды, удовлетворяющие условию суперрадиации, и мы имеем

$$-\frac{dE}{du} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l,m} \int_0^{m\Omega^H} d\omega \omega |T_{\omega lm}|^2, \quad (9.5.31)$$

$$-\frac{dJ}{du} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l,m} \int_0^{m\Omega^H} d\omega m |T_{\omega lm}|^2. \quad (9.5.32)$$

д) Энтропия излучения черной дыры. Определим энтропию  $S$  для системы, описываемой матрицей плотности  $\hat{\rho}$ , соотношением

$$S = \text{Sp}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}). \quad (9.5.33)$$

Нетрудно убедиться, что если  $\hat{\rho}$  записывается в виде

$$\hat{\rho} = \prod_{\alpha} \hat{\rho}_{\alpha}, \quad (9.5.34)$$

где  $\hat{\rho}_{\alpha}$  — оператор, зависящий только от операторов разложения  $\hat{\beta}_{\alpha}^*$  и уничтожения  $\hat{\beta}_{\alpha}$  в моде  $\alpha$ , то  $S$  представляется в виде суммы:

$$S = \sum_{\alpha} S_{\alpha}, \quad (9.5.35)$$

где

$$S_{\alpha} = \text{Sp}_{\alpha}(\hat{\rho}_{\alpha} \ln \hat{\rho}_{\alpha}). \quad (9.5.36)$$

Здесь  $\text{Sp}_{\alpha}$  обозначает операцию взятия следа в пространстве, порождаемом действием  $\hat{\beta}_{\alpha}^*$  на вакуум.

Как уже отмечалось ранее, коэффициент отражения  $R_{jnlm}$  волнового пакета  $v_{jnlm}$  для достаточно больших значений  $n \geq N$  от  $n$  не зависит. Поэтому оператор  $\rho_{\alpha}$ , определяемый соотношением (9.4.35), также не зависит от  $n$  и, следовательно, для излучения от стационарной черной дыры выражение (9.5.35) расходится. Поэтому удобно вместо полной излученной энтропии  $S$  ввести скорость возрастания энтропии во внешнем пространстве  $dS/du$ , связанной с излучением. Для этого заметим, что волновые пакеты  $u_{jnlm}$  с фиксированным значением  $n$  выходят на  $\mathcal{I}^+$  в интервале запаздывающего времени от  $2\pi(n - 1/2)/E$  до  $2\pi(n + 1/2)/E$ . Поэтому определим ( $\alpha = jnlm$ )

$$\frac{dS}{du} = \frac{E}{2\pi} \sum_{jlm} \text{Sp}_{\alpha}(\hat{\rho}_{\alpha} \ln \hat{\rho}_{\alpha}). \quad (9.5.37)$$

Заметим теперь, что поскольку входящие в это выражение величины гладко зависят от частоты  $\omega$  и слабо изменяются при изменении ее в интервале от  $jE$  до  $(j+1)E$ , то можно заменить суммирование по  $j$  интегрированием по частоте  $\omega$ :

$$E \sum_j (\dots) = \int_0^{\infty} d\omega (\dots). \quad (9.5.38)$$

В результате, используя выражение (9.4.35) для  $\hat{\rho}_{\alpha}$ , получаем

$$\frac{dS}{du} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega \sum_{l,m} \left[ \frac{\Gamma_{\alpha}}{z_{\alpha} - \epsilon} \ln \left( \frac{z_{\alpha} - \epsilon}{\Gamma_{\alpha}} + \epsilon \right) + \epsilon \ln \left( 1 + \frac{\epsilon \Gamma_{\alpha}}{z_{\alpha} - \epsilon} \right) \right], \quad (9.5.39a)$$

где  $\Gamma_{\alpha} = \sigma_{\alpha} |T_{\alpha}|^2$ ,  $z_{\alpha} = \exp(\tilde{\omega}_{\alpha}/\theta)$ ,  $\epsilon = 1$ . Это же выражение оказывается справедливым и для ферми-полей, если в нем положить  $\epsilon = -1$ . Аналогичное выражение имеет место для полей различных спинов и для массивных полей. При этом суммирование распространяется на все квантовые числа, нумерующие состояния, а интегрирование при наличии у поля массы  $\mu$  ведется, начиная с  $\mu$ . Вклады нейтриноного ( $s = 1/2$ ), фотонного ( $s = 1$ ) и гравитационного ( $s = 2$ ) полей в энтропию излучения невращающейся черной дыры можно записать следующим образом [Пэйдж (1983)]:

$$\frac{dS}{du} = 10^{-3} M^{-1} (1,685 h\left(\frac{1}{2}\right) + 0,634 h(1) + 0,065 h(2)), \quad (9.5.39b)$$

где  $h(s)$  — число поляризаций поля спина  $s$ .

е) Распределение вероятностей. Вероятность  $P(k_\alpha | l_\alpha)$  обнаружить в излучении черной дыры  $k_\alpha$  частиц в состоянии  $u_\alpha$  при условии, что в падающем на черную дыру потоке имеется  $l_\alpha$  частиц в состоянии  $v_\alpha$ , дается общим выражением (9.4.60). Можно показать, что это выражение может быть преобразовано к следующему виду [Бекенштейн, Майзельс (1977), Папангаден, Уолд (1977)]:

$$P(k_\alpha | l_\alpha) = (l_\alpha)! (k_\alpha)! \frac{w_\alpha^{2k_\alpha} (1 - w_\alpha^2) (1 - |R_\alpha|^2)^{k_\alpha + l_\alpha}}{(1 - w_\alpha^2 |R_\alpha|^2)^{k_\alpha + l_\alpha + 1}} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\min(k_\alpha, l_\alpha)} \left\{ \frac{1}{(l_\alpha - n)! (k_\alpha - n)! (n!)^2} \left[ \frac{(1 - w_\alpha^2)^2 |R_\alpha|^2}{(1 - |R_\alpha|^2)^2 w_\alpha^2} \right]^n \right\}. \quad (9.5.40)$$

Нетрудно убедиться, что

$$e^{-(\tilde{\omega}_\alpha/\theta) l_\alpha} P(k_\alpha | l_\alpha) = e^{-(\tilde{\omega}_\alpha/\theta) k_\alpha} P(l_\alpha | k_\alpha). \quad (9.5.41)$$

Ниже мы покажем, что это условие обеспечивает детальное равновесие между черной дырой и полостью, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega^H$  и заполненной чернотельным излучением с температурой  $\theta$ .

ж) Черная дыра в "тепловой бане". Если вне черной дыры отсутствует вещество, то описанное выше хокинговское излучение является единственным процессом, изменяющим состояние стационарной черной дыры. При наличии вне ее вещества или излучения одновременно с хокинговским излучением идет процесс аккреции этого вещества и излучения на черную дыру. Оказывается, что при выполнении определенного согласования параметров окружающего черную дыру распределения вещества с параметрами черной дыры возможна равновесная ситуация, при которой потеря частиц в каждой моде в результате аккреции компенсируется излучением черной дыры в этой моде. В простейшем случае, когда можно пренебречь взаимодействием различных сортов частиц, эти условия равновесия, очевидно, должны выполняться для каждого из сортов частиц по отдельности. Ниже мы обсудим условие равновесия черной дыры с газом безмассовых скалярных частиц.

Предположим, что матрица плотности  $\hat{\rho}_{in}$ , описывающая состояние таких частиц вне стационарной черной дыры (на  $\mathcal{U}^-$ ), имеет вид

$$\hat{\rho}_{in} = \prod_{\substack{\alpha \\ n \geq N}} \hat{\rho}_{in,\alpha},$$

$$\hat{\rho}_{in,\alpha} = \rho_{0,\alpha} : \exp [-(1 + \mu_\alpha) \hat{a}_{in,\alpha}^* \hat{a}_{in,\alpha}]. \quad (9.5.42)$$

Можно убедиться [Фролов, 1986\*], что матрица плотности  $\hat{\rho}_{out}$ , описывающая излучение черной дыры на  $\mathcal{U}^+$ , при указанном выборе начального условия (9.5.42) дается следующим выражением:

$$\hat{\rho}_{out} = \prod_{\substack{\alpha \\ n \geq N}} \hat{\rho}_{out,\alpha},$$

$$\hat{\rho}_{out,\alpha} = \rho_{0,\alpha} D_\alpha : \exp [-(1 + \mu_\alpha) D_\alpha \hat{\beta}_\alpha^* \hat{\beta}_\alpha], \quad (9.5.43)$$

где

$$D_\alpha = \frac{1 - w_\alpha^2}{1 + \mu_\alpha - (\mu_\alpha + w_\alpha^2) |R_\alpha|}.$$

Условие равновесия, означающее, что распределение для выходящих частиц совпадает с распределением падающих, эквивалентно условию  $D_\alpha = 1$ , которое выполняется тогда и только тогда, когда

$$\mu_\alpha = -w_\alpha^2 = -\exp(-\tilde{\omega}_\alpha/\theta). \quad (9.5.44)$$

Предположим, что рассматриваемая черная дыра окружена стационарной аксиально-симметричной зеркальной отражающей поверхностью. При отражении от такой поверхности частицы сохраняют свой угловой момент и энергию, и действие этой поверхности на волновые пакеты состоит в превращении моды  $v_\alpha$  в моду  $-u_\alpha$ . Если выполнено условие (9.5.44), то излучение в полости будет находиться в состоянии равновесия с черной дырой, а соответствующая этому равновесному состоянию матрица плотности имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_\theta &= \prod_\alpha \hat{\rho}_\alpha, \\ \hat{\rho}_\alpha &= \rho_\alpha^0 \exp\left(-\frac{\tilde{\omega}_\alpha}{\theta} \hat{\beta}_\alpha^* \hat{\beta}_\alpha\right), \end{aligned} \quad (9.5.45)$$

где  $\rho_\alpha^0$  – нормировочная константа, а  $\hat{\beta}_\alpha^*$  и  $\hat{\beta}_\alpha$  – операторы рождения и уничтожения в моде  $\alpha$ .

Этот же результат можно описать несколько иначе. Если  $\text{Sp } \hat{\rho}_\alpha = 1$ , то вероятность обнаружить в моде  $\alpha$   $k_\alpha$  квантов для распределения (9.5.45) равна

$$P(k_\alpha) = \frac{e^{-(\tilde{\omega}_\alpha/\theta)k_\alpha}}{1 - e^{-\tilde{\omega}_\alpha/\theta}}. \quad (9.5.46)$$

С учетом равенства (9.5.41) для условной вероятности  $P(l_\alpha | k_\alpha)$  это соотношение позволяет заключить, что вероятность  $P(l_\alpha | k_\alpha)P(k_\alpha)$  встретить в заданном распределении в моде  $\alpha$   $l_\alpha$  выходящих квантов и  $k_\alpha$  входящих равна вероятности  $P(k_\alpha | l_\alpha)P(l_\alpha)$  встретить  $k_\alpha$  выходящих и  $l_\alpha$  входящих квантов, т.е. выполнен детальный баланс, обеспечивающий термодинамическое равновесие между полостью и черной дырой в данной моде.

Отметим особо, что матрица плотности (9.5.43) нормируется и действительно описывает реальное физическое состояние только в том случае, когда  $\mu_\alpha > -1$ . Для суперрадиационных мод  $\tilde{\omega}_\alpha \leq 0$  условие равновесия (9.5.44) противоречит условию нормируемости матрицы плотности  $\hat{\rho}_{in}$ . Этот результат допускает следующую интерпретацию. Рассмотрим врачающуюся черную дыру, окруженную зеркальной полостью. Пусть в некоторый момент времени имеется произвольное (нормируемое) распределение частиц в выбранной суперрадиационной моде  $\alpha$ . Тогда в результате рассеяния этой моды черной дырой число квантов в ней увеличится. После отражения оболочкой эти кванты вновь рассеиваются черной дырой, и их число вновь возрастает. Иными словами, система, состоящая из черной дыры и окружающей ее оболочки, для суперрадиационных мод выполняет роль

генератора, и равновесное стационарное распределение для подобных мод оказывается невозможным.

Полученный вывод не означает, вообще говоря, что вращающаяся черная дыра не может находиться в равновесии с газом излучения внутри полости. Требуется лишь, чтобы размеры этой полости были не слишком велики ( $r \leq (\Omega^H)^{-1}$ ), т.е. чтобы в системе отсутствовали суперрадиационные моды.

Этот вывод подтверждается также следующим рассуждением. Заметим, что волновые моды  $\varphi_{\omega lm} = \exp(-i\omega t + im\varphi) f_{\omega lm}(r, \theta)$  являются собственными для оператора  $\eta^\mu \partial_\mu$ , где

$$\eta = \xi_t + \Omega^H \xi_\varphi, \quad (9.5.47)$$

а именно

$$\eta^\mu \partial_\mu \varphi_{\omega lm} = -i\tilde{\omega} \varphi_{\omega lm}. \quad (9.5.48)$$

Предположим, что окружающая черную дыру зеркальная оболочка совпадает с поверхностью, на которой  $\eta \cdot \eta = \text{const}$ , и угловая скорость вращения оболочки равна  $\Omega^H$ . Наблюдатель, покоящийся на этой поверхности, обладает скоростью

$$u^\mu = \eta^\mu / U, \quad U^2 \equiv -\eta \cdot \eta, \quad (9.5.49)$$

и в его системе отсчета мода  $\varphi_{\omega lm}$  обладает частотой  $\omega' = \tilde{\omega}/U$ . Заметим теперь, что равновесную матрицу плотности (9.5.45) можно записать в виде

$$\hat{\rho}_\alpha = \rho_{0,\alpha} \exp\left(-\frac{\omega'_\alpha}{T} \hat{\beta}_\alpha^* \hat{\beta}_\alpha\right), \quad (9.5.50)$$

где

$$T = \kappa / 2\pi U. \quad (9.5.51)$$

Это означает, что вращающаяся поглощающая оболочка, внутри которой заключена черная дыра, не нарушает равновесия, если температура ее поверхности равна  $T$ . Если поверхность оболочки не совпадает с поверхностью, на которой  $\eta \cdot \eta = \text{const}$ , то в условии равновесия температура этой оболочки обязана равняться (9.5.51), где

$$U^2 = -\eta \cdot \eta = \Sigma^{-1} \{ \Delta(1 - a\Omega^H \sin^2 \theta)^2 - \sin^2 \theta [a - \Omega^H(r^2 + a^2)]^2 \}. \quad (9.5.52)$$

Назовем "световым цилиндром" поверхность вне черной дыры, на которой выполнено условие

$$\eta \cdot \eta = 0. \quad (9.5.53)$$

Решение уравнения (9.5.53) для метрики Керра в координатах Бойера – Линдквиста имеет вид

$$|\sin \theta| = \frac{\sqrt{X^2 + 4a\Omega^H} - X}{2a\Omega^H}, \quad X^2 = \frac{[\Omega^H(r^2 + a^2) - a]^2}{\Delta}, \quad r > r_+. \quad (9.5.54)$$

Действительная функция  $T$ , заданная соотношениями (9.5.51) – (9.5.52), определена и ограничена в области, лежащей между горизонтом событий и поверхностью "светового цилиндра". В соответствии с этим равновесное

состояние, описываемое матрицей плотности (9.5.45), возможно только, если оболочка, окружающая черную дыру, также расположена в этой области (при этом  $r_0 \lesssim (\Omega^H)^{-1}$ ).

Для невращающейся черной дыры равновесие с газом излучения возможно при любом размере полости \*); при этом для равновесия необходимо, чтобы температура излучения вдали от черной дыры совпадала с ее хокинговской температурой.

Вывод о возможности теплового равновесия черной дыры с газом излучения при условии совпадения их температур и угловых скоростей \*\*) имеет общий характер. Как показали Гиббонс, Перри (1978), он может быть распространен и на случай взаимодействующих частиц.

3) Излучение заряженной вращающейся черной дыры. Зависимость излучения от массы, заряда и спина частиц. В общем случае, когда черная дыра наряду с массой  $M$  и угловым моментом  $J$  обладает также электрическим зарядом  $Q$ , выражение для среднего числа частиц с массой  $\mu$ , электрическим зарядом  $q | e |$  ( $q = \pm 1$ ) и спином  $s$ , рожденных черной дырой, может быть записано в следующем виде [Хокинг (1975)]:

$$\langle n_J \rangle = \frac{\Gamma_J}{\exp[(2\pi\tilde{\omega}_J)/k] - (-1)^{2s}}. \quad (9.5.55)$$

Здесь коллективный индекс  $J$  обозначает полный набор квантовых чисел, задание которого необходимо для описания рассматриваемой моды. Этот набор включает индекс  $j$ , нумерующий сорт частиц и содержащий, в частности, информацию о спине частицы  $s$ , частоту или энергию  $\omega$ , сфероидальное квантовое число  $l$ , азимутальное квантовое число  $m$ , поляризацию или спиральность  $p$  и знак заряда частиц  $q$ . Величина  $\tilde{\omega}_J$  в этом выражении равна

$$\tilde{\omega}_J = \omega_J - m_J \Omega^H - q_J |e| \Phi^H, \quad (9.5.56)$$

где  $\Omega^H$  и  $\Phi^H$  – угловая скорость вращения и электрический потенциал черной дыры, а коэффициент  $\Gamma_J = 1 - |R_J|^2$ , где  $R_J$  – коэффициент отражения падающей волны  $J$ . Для бозонных полей для суперрадиационных мод коэффициент  $\Gamma_J$  становится отрицательным. Для фермионных полей принцип Паули приводит к тому, что среднее число рассеянных в данной моде частиц не может превосходить единицы, и поэтому всегда  $|R_J|^2 \leq 1$ . Коэффициент  $\Gamma_J$  положителен, и, следовательно, выражение в правой части (9.5.55) всегда положительно. Явление суперрадиации для ферми-частиц отсутствует [Мартеллини, Тревес (1977), Айер, Кумар (1979), Чандрасекар (1979а, б)].

Обозначим  $\sum_J$  суммирование по всем дискретным и интегрирование по непрерывным квантовым числам, входящим в  $J$ :

$$\Sigma = \sum_{j, l, m, p, q} \frac{1}{2\pi\mu} \int d\omega; \quad (9.5.57)$$

\*) Отметим, что если размеры полости с излучением достаточно велики, то это равновесие; вообще говоря, неустойчивое (подробнее об этом см. § 11.4).

\*\*) Если выполнены условия, гарантирующие отсутствие суперрадиационных мод.

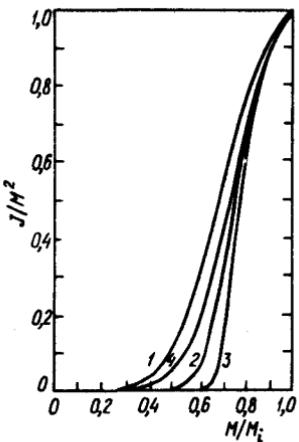
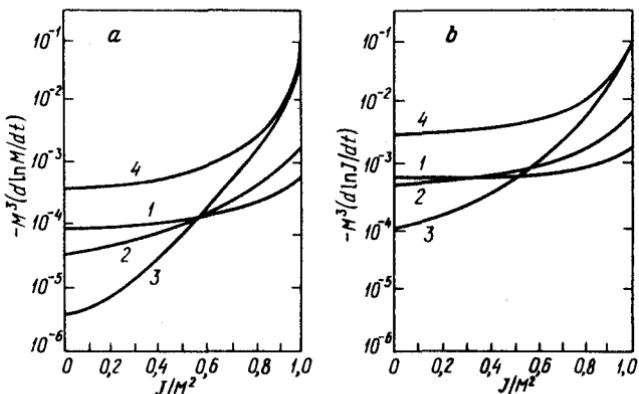


Рис. 76. Изменение параметра вращения  $J/M^2$  черной дыры в процессе ее испарения ( $M_i$  – начальная,  $M$  – текущая масса черной дыры). На рисунке изображено поведение  $J/M^2$  в зависимости от  $M/M_i$  для случаев, когда имеется только одно нейтринное (1), только фотонное (2) или только гравитонное (3) излучение, и для реальной ситуации (4) (четыре сорта нейтрино, один – фотонов и один – гравитонов)

Рис. 77. Мощность излучения энергии (а) и углового момента (б) черной дырой в зависимости от параметра вращения  $J/M^2$ . Отдельно изображены вклады одного сорта нейтрино (1), фотонов (2) и гравитонов (3), а также полная мощность излучения безмассовых частиц в реальной ситуации (4) (четыре сорта нейтрино, один – фотонов и один – гравитонов)



тогда для скорости изменения массы, углового момента и заряда черной дыры в результате ее квантового излучения имеем

$$\begin{aligned} -\frac{dM}{dt} &= \sum_J \omega_J \langle n_J \rangle, \\ -\frac{dJ}{dt} &= \sum_J m_J \langle n_J \rangle, \\ -\frac{dQ}{dt} &= e \sum_J \text{sign } q_J \langle n_J \rangle. \end{aligned} \quad (9.5.58)$$

Задача вычисления вкладов отдельных сортов частиц в квантовое излучение черной дыры сводится к определению соответствующих коэффициентов отражения для волновых функций, описывающих эти частицы. Имеется значительное число работ, посвященных анализу коэффициентов отражения для различных полей в метрике Керра – Ньютона или ее частных случаях и развитию методов их приближенного описания. Полное изложение относящихся к этой проблеме математических вопросов и обзор полученных

результатов можно найти в книге Чандрасекара (1983), к которой мы и отсылаем читателя. В этом параграфе мы остановимся лишь на некоторых из результатов этого анализа, представляющих особый физический интерес.

1) Потеря заряженной черной дырой электрического заряда анализировалась в работах Маркова, Фролова (1970\*), Заумена (1974), Картера (1974), Гиббонса (1975), Накамуры, Сато (1976), Дамура, Руффини (1975), Пэйджа (1977), Руффини (1979), Новикова, Старобинского (1980\*). Основной результат этого анализа состоит в следующем. Черные дыры с массой  $M < Ge^2/m \approx 10^{15}$  г ( $m$  – масса электрона) почти полностью сбрасывают свой электрический заряд практически мгновенно. Для черных дыр с массой  $M < \sqrt{G} em_p^2/m^2 \approx 10^5 M_\odot$  время сбрасывания электрического заряда значительно меньше характерного времени испарения черной дыры (см. далее § 12.3 и рис. 85). Таким образом, при анализе процесса испарения черной дыры практически на всем этапе этого испарения можно считать, что черная дыра является нейтральной.

2) Потеря вращающейся черной дырой углового момента, как это вытекает из размерных соображений, вообще говоря, могла бы происходить за времена, сравнимые со временем испарения черной дыры. Картер (1974) высказал предположение, что в процессе испарения отношение углового момента черной дыры к квадрату ее массы стремится к определенному ненулевому значению. Численный счет, выполненный Пэйджем (1976b), показал, что это не так. Если учесть вклад реально существующих безмассовых частиц (нейтрино, фотонов и гравитонов), то угловой момент сбрасывается в несколько раз быстрее, чем масса черной дыры (рис. 76). При этом оказывается, что для медленно вращающихся черных дыр ( $J/M^2 \lesssim 0,6$ ) чем меньше спин безмассовых частиц, тем больший вклад в излучение массы и углового момента они дают (при одинаковом числе состояний поляризации, равном 2). Для быстро вращающихся черных дыр ( $J/M^2 \gtrsim 0,6$ ) ситуация противоположная, и вклад тем больше, чем выше спин частиц (рис. 77). Этот результат находится в соответствии с результатом Старобинского, Чурилова (1973\*) относительно зависимости суперрадиации от спина.

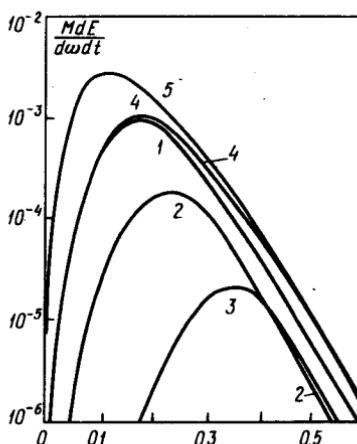


Рис. 78. Спектр мощности излучения черной дыры. Изображены вклады четырех сортов нейтрино (кривая 1), фотонов (2) и гравитонов (3), а также суммарный спектр (кривая 4). Для сравнения приведен спектр излучения этих частиц черным телом с сечением  $27\pi M^2$  (кривая 5)

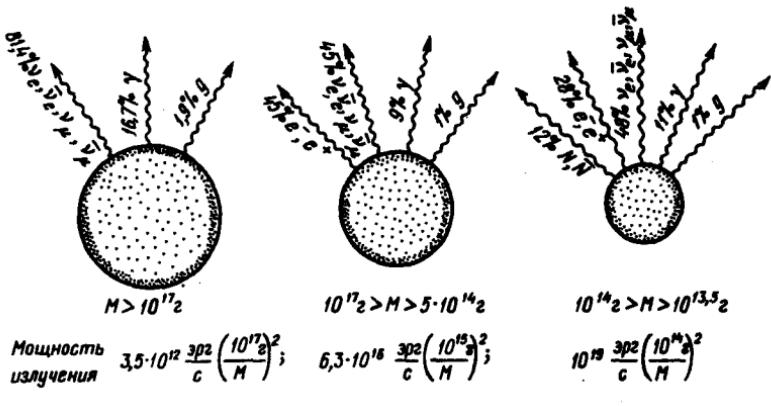


Рис. 79. Квантовый распад невращающейся черной дыры. В процентах указана доля гравитонов ( $g$ ), фотонов ( $\gamma$ ), нейтрино ( $\nu$ ) и других элементарных частиц в общем числе частиц, излучаемых черными дырами различной массы

Отметим также, что при излучении нейтрино вращающейся черной дырой имеет место асимметрия, проявляющаяся в том, что по направлению вращения излучается больше нейтрино, а против — больше антинейтрино [Унру (1973), Виленкин (1979b), Лихи, Унру (1979)].

3) Излучение невращающейся черной дыры происходит приблизительно так же, как излучение тела с температурой

$$\theta = \frac{\hbar k}{2\pi c} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k M} \approx 10^{26} \text{ K} (M/1 \text{ г})^{-1}.$$

Отличие от теплового излучения связано с тем, что коэффициент  $\Gamma_J$  зависит от частоты. При высоких частотах для всех частиц эффективное сечение черной дыры составляет величину  $27\pi G^2 M^2/c^4$ . Для низких частот сечение уменьшается, причем оно оказывается существенно зависящим от спина:

$$\Gamma_J \sim \omega^{2s+1}, \quad (9.5.59)$$

где  $s > 0$  — спин поля. Вклад частиц в общее излучение невращающейся черной дыры падает с возрастанием спина [Пэйдж (1976а)] (рис. 78). Черные дыры с массой  $M > 10^{17} \text{ г}$  могут излучать только безмассовые частицы: нейтрино ( $\nu$ ), фотоны ( $\gamma$ ) и гравитоны ( $g$ ). Черные дыры с массой  $5 \cdot 10^{14} \text{ г} \leq M \leq 10^{17} \text{ г}$  могут дополнительно излучать электроны и позитроны. Черные дыры с меньшей массой могут излучать более тяжелые элементарные частицы. Распределение продуктов распада черных дыр в разных диапазонах масс представлено на рис. 79.

Скорость потери массы черной дырой в процессе ее испарения описывается следующей формулой:

$$-\frac{dM}{dt} \approx 4 \cdot 10^{-5} \left( \frac{m_{\text{Pl}}}{M} \right)^2 \frac{m_{\text{Pl}}}{t_{\text{Pl}}} f = 7.7 \cdot 10^{24} \left( \frac{M}{1 \text{ г}} \right)^{-2} f \frac{\text{г}}{\text{с}}. \quad (9.5.60)$$

Функция  $f = f(M)$  учитывает зависимость  $dM/dt$  от числа возможных состояний и сортов частиц, которые дают вклад в излучение черной дыры

с массой  $M$ . Вклады безмассовых частиц — нейтрино ( $s = 1/2$ ), фотонов ( $s = 1$ ) и гравитонов ( $s = 2$ ) — в  $f$  имеют вид [Пэйдж (1976а, б)]

$$f = 1,023h\left(\frac{1}{2}\right) + 0,420h(1) + 0,048h(2), \quad (9.5.61)$$

где  $h(s)$  — число различных поляризаций частиц спина  $s$ .

Время жизни черной дыры относительно процесса ее квантового испарения равно

$$t \approx 2,7 \cdot 10^{-26} c \int_0^M \frac{M^2 dM}{f(M)} \lesssim 9 \cdot 10^{-27} c (M/1 \text{ г})^3. \quad (9.5.62)$$

Это время не превосходит времени жизни Вселенной для черных дыр с массой  $M < 5 \cdot 10^{14}$  г. Такие черные дыры могли возникать как первичные на ранних этапах эволюции Вселенной (см. § 13.1). Относительно возможности наблюдения квантовых взрывов таких малых черных дыр и продуктов их распадов см. обзор Карра (1983) и приведенные в нем ссылки.

4) С помощью внешних воздействий можно влиять на излучение черной дыры и в определенной мере управлять им. Так, при включении внешнего поля мощность и другие характеристики излучения черной дыры изменяются. В частности, при "внесении" черной дыры во внешний гравитационный потенциал интенсивность ее излучения на бесконечности уменьшается в полном соответствии с тем, что уменьшается ее температура, измеренная удаленным наблюдателем [Героч, Хартль (1982), Жук, Фролов (1981\*)]. О влиянии магнитного поля на рождение частиц в черных дырах см. Гиббонс (1976), Гальцов (1980\*), Соколов и др. (1984\*). Интересный пример внешнего воздействия на мощность излучения черной дыры рассмотрен в работе Унру, Уолда (1982) (см. также § 11.3).