ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА В ЧЕРНЫХ ДЫРАХ

§ 10.1. Квазиклассическое приближение. Перенормированный тензор энергии-импульса

Квантовое излучение изолированной черной дыры приводит к уменьшению ее массы, а следовательно, и площади. Чтобы объяснить это "нарушение" теоремы Хокинга, приходится сделать вывод о том, что поток частиц из черной дыры на бесконечность, уносящих положительную энергию, сопровождается потоком через горизонт событий отрицательной энергии внутрь черной дыры. В классической теории при выполнении естественных физических предположений (условий энергодоминантности) это было бы невозможно. В квантовой теории, поскольку действие внешнего поля на вакуум может приводить как к увеличению, так и к уменьшению локальной плотности энергии, возможно появление в части пространства отрицательной плотности энергии и (или) отрицательного давления. Именно это явление, связанное с поляризацией вакуума в сильном гравитационном поле, должно иметь место вблизи черной дыры.

Для описания процесса испарения черной дыры с массой, много большей планковской, можно использовать *квазиклассическое приближение.* Считая, что флуктуации гравитационного поля малы, опишем его с помощью классической метрики

$$g_{\mu\nu} = \langle g_{\mu\nu} \rangle, \tag{10.1.1}$$

удовлетворяющей модифицированным уравнениям Эйнштейна

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \langle T_{\mu\nu} \rangle, \tag{10.1.2}$$

в правой части которых стоит среднее от тензора энергии-импульса рассматриваемых квантованных полей в выбранном состоянии. В области пространства-времени, где характерный радиус кривизны L значительно превосходит планковскую длину $l_{\rm Pl} = \sqrt{\hbar G/c^3}$, при вычислении $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ можно использовать разложение по малому параметру $\epsilon = (l_{\rm Pl}/L)^2$ и ограничиться членами до первого порядка по ϵ включительно (квазиклассика). Первый член порядка ϵ^0 совпадает с выражением для тензора энергии-импульса классического поля, в то время как член порядка ϵ^1, содержащий множитель $\hbar$, дает основной (в рассматриваемом приближении $\epsilon \ll 1$) вклад квантовых эффектов. Этот вклад описывает изменение плотности энергии-импульса в результате действия гравитационного поля на состояние вакуумных виртуальных пар. Следующие по ϵ члены описывают добавки, возникающие при учете дополнительного взаимодействия частиц виртуальной пары, связанного с испусканием и последующим поглощением ими

квантов поля*). В линейном по ϵ ("однопетлевом") приближении виртуальные пары различных полей можно рассматривать как невзаимодействующие. В соответствии с этим вклады в $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ всех полей – в линейном по ϵ приближении – складываются аддитивно, и их можно изучать независимо.

Основная проблема при изучении $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ состоит в том, что эта величина расходится. Более точно, всякие расчеты, при которых возникает потребность вычислить среднее значение от величины, содержащей произведение двух и более операторов поля в совпадающих точках ($T_{\mu\nu}$ имеет как раз такой вид), приводят к появлению бесконечностей. Подобные расходимости, возникающие уже в плоском пространстве-времени, связаны с вакуумными нулевыми флуктуациями. Методы выделения конечной, имеющей физический смысл части $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, известные как процедуры перенормировки, широко обсуждались в литературе в связи с развитием общей квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени и с ее конкретными приложениями в космологии и физике черных дыр. Подробное обсуждение этих вопросов можно найти в работах Де Витта (1965, 1975), Гриба и др. (1980*), Биррела, Девиса (1982), Кристенсена (1976, 1978). Поэтому мы лишь кратко остановимся на процедуре перенормировки $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, а более подробно обсудим те особенности эффекта поляризации вакуума, которые связаны со спецификой черных дыр (в частности, вопрос о выборе вакуумного состояния), и приведем основные результаты вычислений $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\mathrm{ren}}$.

К настоящему времени предложен целый ряд методов перенормировки (размерная регуляризация, метод ζ-функции, регуляризация Паули – Вилларса, n-волновая регуляризация, адиабатическая регуляризация, метод раздвижения точек). Важно, однако, что окончательные результаты по существу не зависят от конкретного метода перенормировки. Дело в том, что, как показал Уолд (1977, 1978a, b), всякие методы перенормировки $\langle T_{\mu\nu} \rangle$: 1) сохраняющие общую ковариантность ($\nabla_\mu \langle T^{\mu\nu} \rangle^{\mathrm{ren}} = 0$), 2) удовлетворяющие естественным требованиям причинности, 3) не изменяющие значения $\langle \Psi | T_{\mu\nu} | \Phi \rangle$ для тех состояний $|\Psi\rangle$ и $|\Phi\rangle$ ($\langle \Psi | \Phi \rangle = 0$), для которых это значение конечно, и 4) согласующиеся с обычной процедурой нормального упорядочения в плоском пространстве-времени, приводят к выражениям для $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\mathrm{ren}}$, которые могут отличаться друг от друга лишь на локальный сохраняющийся тензор, построенный из тензора кривизны в рассматриваемой точке и его ковариантных производных.

Поскольку для безмассовых полей отсутствует связанный с полем параметр размерности длины, то в однопетлевом приближении возможный произвол в $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\mathrm{ren}}$ должен описываться выражением, являющимся суммой членов, квадратичных по кривизне, и членов, линейных по ее вторым производным. Поскольку сконструировать подобный симметричный сохра-

*) При использовании диаграммной техники в квантовой теории для вычисления рассматриваемых средних описанное разложение по $\hbar$ совпадает с разложением по числу замкнутых петель, которые встречаются в соответствующих диаграммах. Члены порядка $\hbar^0$ описываются диаграммами, не содержащими петель ("древесное" приближение), а $\hbar^1$ – диаграммами, содержащими одну петлю ("однопетлевое" приближение).

няющийся тензор второго ранга только из тензора Вейля невозможно, то для безмассовых полей на фоне метрики, удовлетворяющей вакуумным уравнениям Эйнштейна ($R_{\mu\nu} = 0$), указанный выше произвол в определении $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$ в однопетлевом приближении отсутствует.

Для классического конформно-инвариантного поля $T^{\mu}_{\mu} = 0$. Важным отличительным свойством $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$ является то, что след этой величины для конформно-инвариантного поля уже не обращается в нуль (это явление известно как *конформная аномалия*). Величина $\langle T^{\mu}_{\mu} \rangle^{\text{ren}}$ не зависит от выбора состояния, по которому производится усреднение $T_{\mu\nu}$. Для скалярного конформно-инвариантного ($s = 0$), спинорного двухкомпонентного ($s = 1/2$) безмассовых полей и для электромагнитного поля ($s = 1$) величина $\langle T^{\mu}_{\mu} \rangle^{\text{ren}}$ записывается в виде*)

$$\langle T^{\mu}_{\mu} \rangle^{\text{ren}} = a_s \left(C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{2}{3} \Box R \right) + b_s (R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} - 4 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + R^2), \tag{10.1.3}$$

где

$$a_s = \frac{\tilde{a}_s}{5760\pi^2}, \quad b_s = \frac{\tilde{b}_s}{5760\pi^2},$$

$$\tilde{a}_0 = 3, \quad \tilde{a}_{1/2} = 9, \quad \tilde{a}_1 = 36. \tag{10.1.4}$$

$$\tilde{b}_0 = -1, \quad \tilde{b}_{1/2} = -\frac{11}{2}, \quad \tilde{b}_1 = -62.$$

Для практических вычислений $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$ в гравитационном поле черных дыр наиболее часто используют метод раздвижения точек. Он состоит в следующем. Поскольку $T_{\mu\nu}$ билинейно зависит от поля, можно формально ввести обобщение величины $T_{\mu\nu}$ на случай, когда аргументы у каждого из полей отличны друг от друга ("раздвинуть точки"). В классической теории $T_{\mu\nu}(x)$ возникает как предел соответствующего выражения $T_{\mu\nu'}(x, x')$ при $x' = x$. В квантовой теории при вычислении среднего значения оператора $\hat{T}_{\mu\nu'}(x, x')$ в рассматриваемом состоянии $T_{\mu\nu'}(x, x') = \langle \hat{T}_{\mu\nu'}(x, x') \rangle$ простой переход к пределу $x' \to x$ невозможен из-за возникновения расходимости. Поэтому до перехода к пределу "подправляют" (перенормируют) величину $T_{\mu\nu'}(x, x')$, вычитая из нее некоторое стандартное выражение $T^{\text{div}}_{\mu\nu'}(x, x')$. Для каждого из полей вычисление $T^{\text{div}}_{\mu\nu'}$ достаточно провести

---

*) Приведенные значения коэффициентов a_s и b_s получены Даффом (1977) методом размерной регуляризации. При использовании других методов в случае электромагнитного поля возможно появление дополнительных членов вида $\Box R$. Заметим, что в метриках, удовлетворяющих вакуумным уравнениям Эйнштейна ($R_{\mu\nu} = 0$), эта неоднозначность отсутствует, и мы имеем

$$\langle T^{\mu}_{\mu} \rangle^{\text{ren}} = (a_s + b_s) C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Значения коэффициентов a_s и b_s для четырехкомпонентного безмассового фермионного поля вдвое больше приведенных в (10.1.4).

один раз. Соответствующие выражения для $T^{\mathrm{div}}_{\mu\nu'}$ в случае скалярного, спинорного безмассовых полей и электромагнитного поля получены Кристенсеном (1978).

При вычислении матричных элементов $\langle \Psi | T_{\mu\nu}(x) | \Phi \rangle^{\mathrm{ren}}$ тензора энергии-импульса поля φ_A для выбранных состояний $|\Phi\rangle$ и $|\Psi\rangle$ удобно использовать функцию Грина

$$G_{AB'}(x, x') = i \frac{\langle \Psi | T(\hat{\varphi}_A(x)\hat{\varphi}_{B'}(x')) | \Phi \rangle}{\langle \Psi | \Phi \rangle}. \tag{10.1.5}$$

Здесь символ T обозначает операцию T-произведения

$$T(\hat{\varphi}_A(x)\hat{\varphi}_{B'}(x')) = \theta(x, x')\hat{\varphi}_A(x)\hat{\varphi}_{B'}(x') + \theta(x', x)\hat{\varphi}_{B'}(x')\hat{\varphi}_A(x), \tag{10.1.6}$$

где $\theta(x, x')$ – ступенчатая функция, равная 1, если x лежит в будущем по отношению к x', и равная 0 в противном случае. Нетрудно убедиться, используя коммутационные соотношения (9.2.5), что функция Грина (10.1.5) для поля φ_A, описываемого уравнением (9.2.2), удовлетворяет следующему уравнению:

$$D^{AC} G_{CB'}(x, x') = -\delta^A_{B'} \delta^4(x - x'), \tag{10.1.7}$$

где $\int \delta^4(x - x') d^4x = 1$. С этой функцией Грина связана так называемая *функция Адамара* *)

$$G^{(1)}_{AB'}(x, x') = \frac{\langle \Phi | \hat{\varphi}_A(x)\hat{\varphi}_{B'}(x') + \hat{\varphi}_{B'}(x')\varphi_A(x) | \Psi \rangle}{\langle \Phi | \Psi \rangle}. \tag{10.1.8}$$

Значение тензора энергии-импульса в раздвинутых точках записывается в виде

$$T_{\mu\nu'}(x, x') = \frac{1}{2} T^{AB'}_{\mu\nu'}(x, x') G^{(1)}_{AB'}(x, x'), \tag{10.1.9}$$

где $T^{AB'}_{\mu\nu'}(x, x')$ – дифференциальный оператор по переменным x и x' такой, что для классического поля $\varphi_A(x)$ величина $T^{AB'}_{\mu\nu'}(x, x)\varphi_A(x)\varphi_{B'}(x)$ совпадает с $T_{\mu\nu'}(x)$. Явный вид операторов $T^{AB'}_{\mu\nu'}$ для полей различных спинов приведен в работе Кристенсена (1978).

Часто наряду с $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\mathrm{ren}}$ рассматривают величины вида $\langle \varphi^2_A \rangle^{\mathrm{ren}}$, описывающие флуктуации поля φ_A. В случае скалярного поля φ величина $\langle \varphi^2 \rangle^{\mathrm{ren}}$ в поле черных дыр исследовалась в связи с вопросом о возможности фазовых переходов вблизи них. Эти переходы состоят в появлении $\langle \varphi(x) \rangle \neq 0$ [Хокинг (1981), Фосетт, Уайтинг (1982), Мосс (1984)]. В гравитационном поле, описываемом вакуумными уравнениями Эйнштейна, для перенормированного значения $\langle \varphi^2 \rangle^{\mathrm{ren}}$ имеет место следующее простое выражение:

$$\langle \varphi^2(x) \rangle^{\mathrm{ren}} = \lim_{x' \to x} \left[-iG(x, x') - \frac{1}{8\pi^2 \sigma(x, x')} \right], \tag{10.1.10}$$

---

*) Если точки x и x' разделены пространственноподобным расстоянием, то $\hat{\varphi}_A(x)$ и $\hat{\varphi}_{B'}(x')$ коммутируют и $G^{(1)}_{AB'}(x, x') = -2iG_{AB'}(x, x')$.

где $\sigma(x, x') = \frac{1}{2} s^2(x, x')$, $s(x, x')$ — интервал геодезического расстояния между x и x', а стремление x' к x происходит вдоль пространственноподобного направления.

Таким образом, задача вычисления величин $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$ и $\langle \varphi^2 \rangle^{\text{ren}}$, несущих информацию о плотности энергии-импульса (связанной с поляризацией вакуума) и вакуумных флуктуациях, сводится к выполнению набора стандартных операций над функцией Грина (10.1.5). Тем самым решение задачи о поляризации вакуума в черных дырах сводится к получению решения уравнения (10.1.7) в заданной метрике, описывающей пространство-время черной дыры. При этом произволу в выборе состояния, по которому производится усреднение в (10.1.5), отвечает произвол в выборе граничных условий, однозначно фиксирующих ту или иную функцию Грина.

§ 10.2. Выбор состояний и граничные условия для функций Грина

Опишем теперь те состояния и отвечающие им граничные условия для функций Грина, которые наиболее часто фигурируют при рассмотрении квантовых эффектов в черных дырах*). Для простоты ограничимся рассмотрением скалярного безмассового поля.

Очевидный интерес представляет случай, когда черная дыра возникает в результате коллапса, а до ее образования квантовая система находилась в основном, вакуумном состоянии. Соответствующая функция Грина

$$G_{\text{in}}(x, x') = i \langle 0;\ \text{in} \mid T(\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')) \mid 0;\ \text{in} \rangle, \tag{10.2.1}$$

являясь, как и все остальные функции Грина (10.1.5), симметричной, однозначно определяется тем свойством, что она в отдаленном прошлом (в in-области) совпадает со свободной причинной функцией Грина в пространстве Минковского. Очевидно, что поведение G_{in} зависит, вообще говоря, от деталей коллапса, приводящего к образованию черной дыры. Это делает задачу нахождения G_{in} сложной и трудно поддающейся решению. Напомним, однако, что с течением времени черная дыра становится стационарной**). На основании тех же аргументов, которые использовались при доказательстве универсальности свойств хокинговского излучения в поздние времена, можно прийти к выводу, что G_{in} через достаточно большое время после возникновения черной дыры определяется лишь ее параметрами.

Для описания свойств этой "универсальной" функции Грина удобно использовать следующий прием. Рассмотрим пространство-время вечной черной дыры, обладающей теми же параметрами, что и возникающая стационарная черная дыра. Определим в ней функцию Грина $G_{\text{U}}(x, x')$ как реше-

---

*) Общий анализ проблемы определения вакуума в пространстве-времени при наличии горизонтов можно найти в работах Фуллинга (1977a, b), Шьяма и др. (1981).

**) Точнее, почти стационарной, поскольку в результате квантового испарения ее параметры все же меняются. Однако, как уже отмечалось, скорость этого изменения пренебрежимо мала до тех пор, пока масса черной дыры значительно превосходит планковскую.