где $\sigma(x, x') = \frac{1}{2} s^2(x, x')$, $s(x, x')$ — интервал геодезического расстояния между x и x', а стремление x' к x происходит вдоль пространственноподобного направления.

Таким образом, задача вычисления величин $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$ и $\langle \varphi^2 \rangle^{\text{ren}}$, несущих информацию о плотности энергии-импульса (связанной с поляризацией вакуума) и вакуумных флуктуациях, сводится к выполнению набора стандартных операций над функцией Грина (10.1.5). Тем самым решение задачи о поляризации вакуума в черных дырах сводится к получению решения уравнения (10.1.7) в заданной метрике, описывающей пространство-время черной дыры. При этом произволу в выборе состояния, по которому производится усреднение в (10.1.5), отвечает произвол в выборе граничных условий, однозначно фиксирующих ту или иную функцию Грина.

§ 10.2. Выбор состояний и граничные условия для функций Грина

Опишем теперь те состояния и отвечающие им граничные условия для функций Грина, которые наиболее часто фигурируют при рассмотрении квантовых эффектов в черных дырах*). Для простоты ограничимся рассмотрением скалярного безмассового поля.

Очевидный интерес представляет случай, когда черная дыра возникает в результате коллапса, а до ее образования квантовая система находилась в основном, вакуумном состоянии. Соответствующая функция Грина

$$G_{\text{in}}(x, x') = i \langle 0;\ \text{in} \mid T(\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')) \mid 0;\ \text{in} \rangle, \tag{10.2.1}$$

являясь, как и все остальные функции Грина (10.1.5), симметричной, однозначно определяется тем свойством, что она в отдаленном прошлом (в in-области) совпадает со свободной причинной функцией Грина в пространстве Минковского. Очевидно, что поведение G_{in} зависит, вообще говоря, от деталей коллапса, приводящего к образованию черной дыры. Это делает задачу нахождения G_{in} сложной и трудно поддающейся решению. Напомним, однако, что с течением времени черная дыра становится стационарной**). На основании тех же аргументов, которые использовались при доказательстве универсальности свойств хокинговского излучения в поздние времена, можно прийти к выводу, что G_{in} через достаточно большое время после возникновения черной дыры определяется лишь ее параметрами.

Для описания свойств этой "универсальной" функции Грина удобно использовать следующий прием. Рассмотрим пространство-время вечной черной дыры, обладающей теми же параметрами, что и возникающая стационарная черная дыра. Определим в ней функцию Грина $G_{\text{U}}(x, x')$ как реше-

---

*) Общий анализ проблемы определения вакуума в пространстве-времени при наличии горизонтов можно найти в работах Фуллинга (1977a, b), Шьяма и др. (1981).

**) Точнее, почти стационарной, поскольку в результате квантового испарения ее параметры все же меняются. Однако, как уже отмечалось, скорость этого изменения пренебрежимо мала до тех пор, пока масса черной дыры значительно превосходит планковскую.

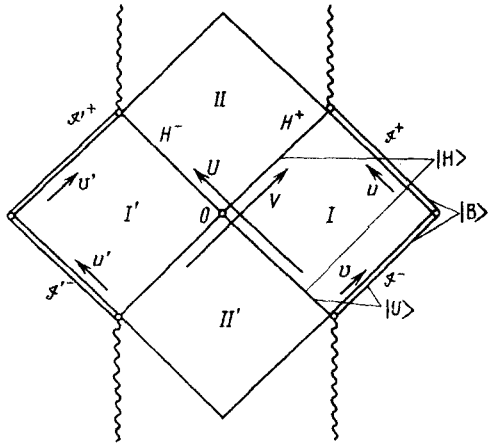

Рис. 80. Диаграмма Пенроуза для вращающейся черной дыры. Стрелками указаны поверхности, ограничивающие область I, на которых задаются граничные условия для функций Грина, отвечающих вакуумным состояниям Хартля – Хокинга (| H›), Унру (| U›) и Бульвара (| B›)

ние уравнения (10.1.7), совпадающее при поздних временах с асимптотикой $G_{in}(x, x')$, а в остальном пространстве-времени получаемую как ее аналитическое продолжение. Унру (1976b) показал, что в пространстве-времени вечной черной дыры для значений аргументов x, x', лежащих во внешней области или на горизонте событий, функция Грина $G_U(x, x')$ однозначно определяется следующими граничными условиями: при фиксированном значении x' в области I (рис. 80) эта функция является отрицательно-частотной по отношению к аффинному параметру U на H^- для x на H^- и отрицательно-частотной по опережающему времени υ на $\mathscr{I}^-$ для x на $\mathscr{I}^-$. Соответствующее состояние | U›, для которого

$$G_U(x, x') = i \langle U \mid T(\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')) \mid U \rangle, \tag{10.2.2}$$

получило название *вакуума Унру.*

Представляет интерес другой случай, когда черная дыра помещена в полость с чернотельным излучением и находится в равновесии с последним. Поскольку это состояние не является чистым и описывается матрицей плотности $\hat{\rho}_\theta$ (9.5.45), то для соответствующей ему функции Грина $G_H(x, x')$ имеем

$$G_H(x, x') = i \operatorname{Sp} [\hat{\rho}_\theta T(\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x'))]. \tag{10.2.3}$$

Эту функцию Грина также можно аналитическим продолжением распространить на все пространство-время вечной черной дыры. При этом, как показали Хартль и Хокинг (1976), она удовлетворяет следующим граничным условиям: при фиксированном значении x' она является отрицательно-частотной функцией по отношению к аффинному параметру U для x на H^- и положительно-частотной функцией по отношению к аффинному параметру V для x на H^+ (см. рис. 80). Хотя это состояние не является ни чистым, ни вакуумным, для его обозначения используют символ | H›, сокращенно записывая (10.2.3) в виде

$$G_H(x, x') = i \langle H \mid T(\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')) \mid H \rangle, \tag{10.2.4}$$

и называют *вакуумом Хартля – Хокинга.*

Если черная дыра вращается, то, как отмечалось в предыдущей главе, равновесная ситуация оказывается возможной только в случае, когда размер полости, внутри которой заключена черная дыра, достаточно мал. При этом, вообще говоря, оказывается важным выбор граничных условий для поля φ на поверхности полости Σ. Обычно мы будем полагать, что

$$\varphi|_{\Sigma} = 0. \tag{10.2.5}$$

Соответствующему граничному условию должна удовлетворять и функция Грина

$$G_{\mathrm{H}}(x, x')|_{x \in \Sigma} = 0. \tag{10.2.6}$$

В том случае, когда роль ограничивающей поверхности Σ важна, вместо $|\mathrm{H}\rangle$ будем использовать обозначение $|\mathrm{H}, \Sigma\rangle$, а вместо G_{H} – $G_{\mathrm{H},\Sigma}$.

Как показали Хартль и Хокинг (1976), функция Грина (так же, как и $G_{\mathrm{H},\Sigma}$) обладает особыми аналитическими свойствами. Чтобы описать эти свойства, заметим, что если в выражении для элемента длины (4.2.1) в геометрии Керра произвести замену

$$t = -i\tau, \quad a = ib, \tag{10.2.7}$$

то возникающая метрика будет иметь сигнатуру ++++. Более того, оказывается [Хартль, Хокинг (1976), Хокинг (1981)], что эта метрика является всюду регулярной (включая и поверхность $r = r_E = M + \sqrt{M^2 + b^2}$, отвечающую аналитическому продолжению поверхности горизонта событий), если только координата τ – циклическая с периодом, равным $2\pi/\kappa_{\mathrm{E}}$ ($\kappa_{\mathrm{E}} = \kappa|_{a=ib}$). Регулярное пространство, обладающее подобной метрикой, получило название *евклидовой черной дыры*. Результат, полученный Хартлем и Хокингом (1976), состоит в том, что функция Грина $G_{\mathrm{E}}(x, x')$, возникающая при аналитическом продолжении (10.2.7) функции $G_{\mathrm{H}}(x, x')$:

$$G_{\mathrm{H}}(x, x') = [iG_{\mathrm{E}}(x, x')]_{\substack{\tau = it \\ b = -ia}}, \tag{10.2.8}$$

является симметричным решением уравнения

$$\Box_{\mathrm{E}} G_{\mathrm{E}}(x, x') = -\frac{\delta(x, x')}{\sqrt{g_{\mathrm{E}}}} \tag{10.2.9}$$

в пространстве евклидовой черной дыры, убывающим на бесконечности и регулярным на поверхности евклидова горизонта. (Здесь $\Box_{\mathrm{E}} = \Box|_{\substack{t=-i\tau \\ a=ib}}$, $g_{\mathrm{E}} = g|_{\substack{t=-i\tau \\ a=ib}}$.) Этот результат позволяет использовать для построения $G_{\mathrm{H}}(x, x')$ следующий прием: сначала находят евклидову функцию Грина G_{E}, а затем с помощью аналитического продолжения (10.2.8) получают G_{H}. Этот прием, во многом аналогичный процедуре виковского поворота и перехода к евклидовой формулировке, используемой в квантовой теории поля в плоском пространстве-времени, часто позволяет существенно облегчить задачу вычисления G_{H}.

Обсудим кратко еще один, используемый при описании квантовых эффектов в черных дырах выбор состояния, предложенный Бульваром (1975a, b, 1976). Это состояние, обозначаемое $|\mathrm{B}\rangle$, получило название *вакуума Бульвара*. Рассмотрим ситуацию, когда имеется невращающееся сферическое тело массы M с радиусом R_0, слегка превышающим гравитационный радиус r_g этого тела. Поскольку в таком статическом пространстве-времени соответствующее векторное поле Киллинга $\xi^{\mu}_{(t)}\,\partial_\mu = \partial_t$ везде времениподобно, то любые частицы обладают положительной энергией и рождение частиц невозможно. Соответствующее вакуумное состояние $|\mathrm{B};\,R_0\rangle$ является устойчивым, а отвечающая ему функция Грина $G_{\mathrm{B};\,R_0}(x, x')$ удовлетворяет следующим граничным условиям: при фиксированном значении x' она является отрицательно-частотной функцией v при x на $\mathscr{I}^-$ и положительно-частотной функцией u при x на $\mathscr{I}^+$. Определим функцию Грина

$$G_{\mathrm{B}}(x,x') = i\langle \mathrm{B}\,|\,T(\hat{\varphi}(x)\,\hat{\varphi}(x'))\,|\,\mathrm{B}\rangle \tag{10.2.10}$$

как решение уравнения $\Box G_{\mathrm{B}}(x, x') = -\delta(x, x')/\sqrt{-g}$ в пространстве-времени вечной черной дыры, удовлетворяющее приведенным выше граничным условиям.

Для невращающейся черной дыры функцию Грина G_{B} можно рассматривать в некотором смысле как предел $G_{\mathrm{B};\,R_0}$ при $R_0 \to r_g$. Очевидно, что физическая реализация статической системы, размер которой сколь угодно близок к гравитационному радиусу, не представляется возможной. Частицы поверхности такого тела в этом пределе должны обладать бесконечно большим ускорением и требуют для их удержания бесконечно больших сил. В соответствии с этим функция Грина G_{B}, имеющая простое регулярное поведение вдали от черной дыры и отвечающая отсутствию квантового излучения на $\mathscr{I}^+$, имеет "плохое" аналитическое поведение вблизи горизонта событий, а отвечающие ей перенормированные значения $\langle \mathrm{B}\,|\,T_{\mu\nu}\,|\,\mathrm{B}\rangle$ и $\langle \mathrm{B}\,|\,\varphi^2\,|\,\mathrm{B}\rangle$ расходятся на H^+ и H^-.

Хотя описанные выше состояние и функции Грина были определены лишь для скалярного безмассового поля, распространение этих определений на общий случай не представляет затруднений.

§ 10.3. $\langle T^{\mu}_{\nu}\rangle^{\mathrm{ren}}$ и $\langle \varphi^2\rangle^{\mathrm{ren}}$ в пространстве-времени черной дыры

Для вычисления перенормированного значения тензора энергии – импульса требуется знание функции Грина $G(x, x')$ при значениях ее аргументов x и x', близких друг к другу. Это, однако, еще ни в коей мере не означает, что граничные условия, налагаемые на функцию Грина вдали от интересующей нас точки, не влияют на поведение $G(x, x')$ в пределе совпадающих точек *). Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, что функция Грина определяется уравнением с точностью до решения однородного уравнения, которое однозначно фиксируется как раз граничными условиями.

---

*) Заметим, что в римановом пространстве для метрики с евклидовой сигнатурой функция Грина массивного поля экспоненциально быстро спадает с увеличением расстояния между точками x и x'. Если эти точки находятся далеко от границы, то влияние граничных условий для этих полей действительно пренебрежимо мало.