

Обсудим кратко еще один, используемый при описании квантовых эффектов в черных дырах выбор состояния, предложенный Бульваром (1975а, б, 1976). Это состояние, обозначаемое $|B\rangle$, получило название *вакуума Бульвара*. Рассмотрим ситуацию, когда имеется невращающееся сферическое тело массы M с радиусом R_0 , слегка превышающим гравитационный радиус r_g этого тела. Поскольку в таком статическом пространстве-времени соответствующее векторное поле Киллинга $\xi^\mu_{(t)} \partial_\mu = \partial_t$ везде временноподобно, то любые частицы обладают положительной энергией и рождение частиц невозможно. Соответствующее вакуумное состояние $|B; R_0\rangle$ является устойчивым, а отвечающая ему функция Грина $G_{B; R_0}(x, x')$ удовлетворяет следующим граничным условиям: при фиксированном значении x' она является отрицательно-частотной функцией v при x на \mathcal{U}^- и положительно-частотной функцией u при x на \mathcal{U}^+ . Определим функцию Грина

$$G_B(x, x') = i \langle B | T(\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x')) | B \rangle \quad (10.2.10)$$

как решение уравнения $\square G_B(x, x') = -\delta(x, x')/\sqrt{-g}$ в пространстве-времени вечной черной дыры, удовлетворяющее приведенным выше граничным условиям.

Для невращающейся черной дыры функцию Грина G_B можно рассматривать в некотором смысле как предел $G_{B; R_0}$ при $R_0 \rightarrow r_g$. Очевидно, что физическая реализация статической системы, размер которой сколь угодно близок к гравитационному радиусу, не представляется возможной. Частицы поверхности такого тела в этом пределе должны обладать бесконечно большим ускорением и требуют для их удержания бесконечно больших сил. В соответствии с этим функция Грина G_B , имеющая простое регулярное поведение вдали от черной дыры и отвечающая отсутствию квантового излучения на \mathcal{U}^+ , имеет "плохое" аналитическое поведение вблизи горизонта событий, а отвечающие ей перенормированные значения $\langle B | T_{\mu\nu} | B \rangle$ и $\langle B | \varphi^2 | B \rangle$ расходятся на H^+ и H^- .

Хотя описанные выше состояние и функции Грина были определены лишь для скалярного безмассового поля, распространение этих определений на общий случай не представляет затруднений.

§ 10.3. $\langle T_\nu^\mu \rangle^{\text{рен}}$ и $\langle \varphi^2 \rangle^{\text{рен}}$ в пространстве-времени черной дыры

Для вычисления перенормированного значения тензора энергии – импульса требуется знание функции Грина $G(x, x')$ при значениях ее аргументов x и x' , близких друг к другу. Это, однако, еще ни в коей мере не означает, что граничные условия, налагаемые на функцию Грина вдали от интересующей нас точки, не влияют на поведение $G(x, x')$ в пределе совпадающих точек *). Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, что функция Грина определяется уравнением с точностью до решения однородного уравнения, которое однозначно фиксируется как раз граничными условиями.

*) Заметим, что в римановом пространстве для метрики с евклидовой сигнатурой функция Грина массивного поля экспоненциально быстро спадает с увеличением расстояния между точками x и x' . Если эти точки находятся далеко от границы, то влияние граничных условий для этих полей действительно пренебрежимо мало.

В теории массивного (с массой m) поля, когда характерный радиус кривизны пространства-времени L значительно превосходит комптоновскую длину $\lambda = \hbar/mc$, можно использовать разложение по малому параметру $\epsilon = (\lambda/L)^2$, чтобы получить равномерное приближение для функции Грина. В случае безмассового поля такой параметр отсутствует. Поскольку волновые уравнения для безмассовых полей в метрике Керра допускают разделение переменных, то естественный метод изучения функций Грина для таких полей состоит в представлении их в виде разложений по собственным модам [Канделас (1980), Канделас и др. (1981)].

Приведем в качестве примера представление для функций Адамара скалярного безмассового поля в метрике вращающейся черной дыры*). Удобно в качестве базисных решений уравнения $\square\varphi = 0$ в пространстве-времени вечной черной дыры выбрать систему решений $v_{\omega lm}, y_{\omega lm}$, удовлетворяющих следующим граничным условиям. Функции $v_{\omega lm}$ обращаются в нуль на H^- , а на \mathcal{Y}^- имеют образ $V_{\omega lm}$, описываемый выражением (9.4.5). Образ $y_{\omega lm}$ на \mathcal{Y}^- равен нулю, а на H^- эти функции принимают значения

$$y_{\omega lm}|_{H^-} = \frac{e^{-i\omega u}}{\sqrt{4\pi\tilde{\omega}(r_+^2 + a^2)}} Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (10.3.1)$$

В случае, если черная дыра окружена зеркальной оболочкой, уравнение которой $r = r_0$ ($\varphi|_{r_0} = 0$), в качестве соответствующих базисных функций выбирают решения $k_{\omega lm}$, которые на H^- имеют значения, совпадающие с $y_{\omega lm}|_{H^-}$ [формула (10.3.1)], а на оболочке обращаются в нуль: $k_{\omega lm}|_{r_0} = 0$. Если коллективный индекс ωlm обозначить через J и ввести обозначения

$$\begin{aligned} v_J(x, x') &= v_J(x)\bar{v}_J(x') + \bar{v}_J(x)v_J(x'), \\ y_J(x, x') &= y_J(x)\bar{y}_J(x') + \bar{y}_J(x)y_J(x'), \\ k_J(x, x') &= k_J(x)\bar{k}_J(x') + \bar{k}_J(x)k_J(x'), \end{aligned} \quad (10.3.2)$$

то функции Адамара $G^{(1)}$, отвечающие различным выборам "вакуумных" состояний, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} G_U^{(1)}(x, x') &= \sum_{l, m} \left[\int_0^\infty d\omega v_J(x, x') + \int_{\Omega m}^\infty d\omega \coth \frac{\pi\tilde{\omega}}{\kappa} y_J(x, x') \right], \\ G_H^{(1)}(x, x') &= \sum_{l, m} \left[\int_0^\infty d\omega \coth \frac{\pi\tilde{\omega}}{\kappa} v_J(x, x') + \int_{\Omega m}^\infty d\omega \coth \frac{\pi\tilde{\omega}}{\kappa} y_J(x, x') \right], \\ G_B^{(1)}(x, x') &= \sum_{l, m} \left[\int_0^\infty d\omega v_J(x, x') + \int_{\Omega m}^\infty d\omega y_J(x, x') \right], \\ G_{H; r_0}^{(1)}(x, x') &= \sum_{l, m} \int_{\Omega m}^\infty d\omega \coth \frac{\pi\tilde{\omega}}{\kappa} k_J(x, x'). \end{aligned} \quad (10.3.3)$$

Аналогичные представления для функций Грина для электромагнитного поля и гравитационных возмущений приведены в работе Канделаса и др. (1981); относительно функций Грина скалярного поля см. также Канделас (1980), Фролов (1986*).

* Приводимые ниже формулы справедливы и для заряженной черной дыры.

Заметим, что поскольку расходимости, удаляемые в процессе перенормировки, имеют универсальный вид, значение разностей любой пары функций (10.3.3) в пределе совпадающих точек остается конечным. Для этих конечных разностей имеем, в частности,

$$\langle U | \varphi^2(x) | U \rangle - \langle H | \varphi^2(x) | H \rangle = -2 \sum_{l,m} \int_0^\infty \frac{d\omega |v_j(x)|^2}{e^{\tilde{\omega}/\theta} - 1}, \quad (10.3.4)$$

$$\begin{aligned} \langle B | \varphi^2(x) | B \rangle - \langle H | \varphi^2(x) | H \rangle &= \\ &= -2 \sum_{l,m} \left[\int_0^\infty \frac{d\omega |v_j(x)|^2}{e^{\tilde{\omega}/\theta} - 1} + \int_{\Omega m}^\infty \frac{d\omega |y_j(x)|^2}{e^{\tilde{\omega}/\theta} - 1} \right], \end{aligned} \quad (10.3.5)$$

где $\theta = \kappa/2\pi$ — температура черной дыры.

Представления вида (10.3.3) для функций Грина позволяют проанализировать поведение $\langle \varphi^2 \rangle^{\text{ren}}$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle^{\text{ren}}$ вблизи H^\pm и \mathcal{Y}^\pm . В частности, можно показать, что значения этих величин вблизи H^\pm при усреднении по вакууму Бульвара расходятся. Их асимптотики вблизи шварцшильдовской черной дыры в координатах t, r, θ, φ имеют вид [Канделас (1980), Канделас и др. (1981), Шьяма и др. (1981)] *)

$$\langle \varphi^2(r) \rangle_B \sim (r - r_g)^{-1}, \quad (10.3.6)$$

$$\begin{aligned} \langle T_\nu^\mu(r) \rangle_B &\sim - \frac{h_s}{2\pi^2(1 - r_g/r)^2} \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{d\omega (\omega^2 + s^2 \kappa^2)}{e^{\omega/\theta} - (-1)^{2s}} \text{diag} \left(-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right). \end{aligned} \quad (10.3.7)$$

Здесь и далее $\text{diag}(a, b, c, d)$ обозначает диагональную матрицу с элементами, равными a, b, c и d на диагонали, а h_s — число поляризаций поля спина s .

Причина подобного сингулярного поведения величин, характеризующих поляризацию вакуума в этом состоянии, состоит в том, что само состояние отвечает, как это отмечалось выше, физически нереализуемой ситуации.

К сожалению, просуммировать ряды, отвечающие $\langle \varphi^2 \rangle^{\text{ren}}$ и $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$ и получаемые после перенормировки из соответствующих рядов вида (10.3.3) для функций Грина, и найти явные конечные выражения для этих величин в общем случае не удается **). Поэтому для получения результатов либо используют машинные методы, либо развивают методы приближенного суммирования рядов. В выполненных к настоящему времени работах ограничивались рассмотрением случая, когда черная дыра не вращается.

Прежде чем перейти к изложению результатов этих работ, отметим, что свойства симметрии $\langle T_\nu^\mu \rangle$, связанные с симметриями фонового шварцшиль-

*) В этих формулах (и далее) мы опускаем индекс "ren" у величин $\langle \varphi^2 \rangle^{\text{ren}}$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle^{\text{ren}}$, поскольку будем иметь дело лишь с перенормированными значениями этих величин. Нижний символ, стоящий у скобок, указывает на то вакуумное состояние, по которому производится усреднение. Так, $\langle \varphi^2 \rangle_B$ обозначает $\langle B | \varphi^2 | B \rangle^{\text{ren}}$.

**) К числу важных исключений, для которых возможно получение точных значений $\langle \varphi^2 \rangle^{\text{ren}}$ и $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$, относятся случаи, когда рассматриваемая точка лежит на горизонте событий. На этих случаях мы остановимся ниже.

довского гравитационного поля, и закон сохранения $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{;\mu}$, которому эта величина удовлетворяет, резко ограничивают число ее независимых компонент. А именно, как показали Кристенсен и Фуллинг (1977), всякий сохраняющийся $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$ в пространстве-времени невращающейся черной дыры допускает следующее представление:

$$\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle = \sum_{i=1}^4 t_i^{\mu}{}_{\nu}, \quad (10.3.8)$$

где $t_i^{\mu}{}_{\nu}$ в координатах t, r^*, θ, φ имеют вид

$$t_1^{\mu}{}_{\nu} = \text{diag} \left(-\frac{FH}{r^2} + \frac{1}{2} T, \frac{FH}{r^2}, \frac{1}{4} T, \frac{1}{4} T \right),$$

$$t_2^{\mu}{}_{\nu} = \text{diag} \left(-\frac{FG}{r^2} - 2\Theta, \frac{FG}{r^2}, \Theta, \Theta \right), \quad (10.3.9)$$

$$t_3^{\mu}{}_{\nu} = \frac{W}{4\pi r^2} F \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_4^{\mu}{}_{\nu} = \text{diag} \left(\frac{-N}{r^2} F, \frac{N}{r^2} F, 0, 0 \right),$$

a

$$F = (1 - 2M/r)^{-1},$$

$$T(r) = \langle T_{\mu}^{\mu}(r) \rangle, \quad \Theta(r) = \langle T_{\theta}^{\theta}(r) \rangle - \frac{1}{4} T(r), \quad (10.3.10)$$

$$H(r) = \frac{1}{2} \int_{2M}^r (r' - M) T(r') dr', \quad G(r) = 2 \int_{2M}^r (r' - 3M) \Theta(r') dr'.$$

Каждый из тензоров $t_i^{\mu}{}_{\nu}$ удовлетворяет закону сохранения $\langle t_i^{\mu}{}_{\nu} ; \mu \rangle = 0$.

Только $t_1^{\mu}{}_{\nu}$ имеет ненулевой след, только $t_2^{\mu}{}_{\nu}$ имеет бесследовую часть

$t_1^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{4} T \delta^{\mu}_{\nu}$, у которой $\theta\theta$ -компоненты отлична от нуля, только $t_3^{\mu}{}_{\nu}$ имеет недиагональные компоненты, описывающие потоки, и только $t_4^{\mu}{}_{\nu}$ не регулярен на H^+ .

Иными словами, произвольный тензор энергии-импульса, удовлетворяющий закону сохранения и условиям симметрии, присущим метрике Шварца-

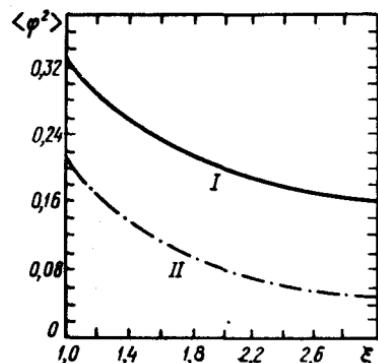


Рис. 81. Значения $(8\pi M)^2 \langle \varphi^2 \rangle$ в зависимости от $\xi = r/M - 1$: кривая I — $\langle \varphi^2 \rangle_H$, кривая II — $\langle \varphi^2 \rangle_U$

шильда, однозначно характеризуется заданием двух функций T и Θ от r (одна из которых (T) совпадает с его следом) и двух констант W и N , значение одной из которых (W) совпадает с интенсивностью излучения черной дыры на бесконечности ($W = -dM/dt$), а значение второй равно нулю ($N = 0$), если тензор энергии-импульса регулярен на H^+ .

Интенсивность излучения W отлична от нуля лишь для вакуума Унру; при этом для безмассового скалярного ($s = 0$), двухкомпонентного нейтринного ($s = 1/2$), электромагнитного ($s = 1$) и гравитационного ($s = 2$) полей коэффициенты W соответственно равны [Пэйдж (1982), Эльстер (1983b)]

$$W_0 = 7,4 \cdot 10^{-5} M^{-2}, \quad W_{1/2} = 8,2 \cdot 10^{-5} M^{-2}, \quad (10.3.11)$$

$$W_1 = 3,3 \cdot 10^{-5} M^{-2}, \quad W_2 = 0,4 \cdot 10^{-5} M^{-2}.$$

Коэффициент N обращается в нуль для вакуума Унру и для вакуума Хартля–Хокинга.

Выполненные к настоящему времени численные расчеты относятся к случаю скалярного безмассового поля в пространстве-времени шварцшильдовской черной дыры. Результаты вычислений $\langle\varphi^2\rangle_H$ и $\langle\varphi^2\rangle_U$, выполненных Фосеттом и Уайтингом (1982), приведены на рис. 81. Значения компонент $\langle T_\nu^\mu \rangle_H$ были вычислены Ховардом, Канделасом (1984) и Ховардом (1984), которые обнаружили и исправили ошибку в предыдущих вычислениях Фосетта (1983). Значения отличных от нуля компонент $\langle T_\nu^\mu \rangle_H$ и вычисленные Эльстером (1983b) значения $\langle T_\nu^\mu \rangle_U$ приведены на рис. 82.

Основная особенность тензора $\langle T_\nu^\mu \rangle_H$ – конечность его компонент на горизонте событий. В частности, наблюдатель, покоящийся в точке r вблизи горизонта событий, зарегистрирует плотность энергии $-\langle T_t^t \rangle_H$, и это значение остается конечным при $r \rightarrow r_g$. С другой стороны, измеренная им тем-

пература окажется равной $T_{loc} = \frac{\kappa}{2\pi} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2}$. Подобное измерение

температуры можно, например, "осуществить", взяв в качестве термометра двухуровневую систему, переходы между уровнями в которой связаны с поглощением и испусканием квантов рассматриваемого поля (фотонов). По прошествии достаточно длительного времени вероятность нахождения системы на верхнем уровне будет в $\exp(\Delta E/T_{loc})$ раз меньше, чем на нижнем (ΔE – разница энергий между уровнями). Аналогичным образом ведут себя другие детекторы малых размеров [Унру (1976b)]. Нетрудно убедиться, что вблизи r_g $T_{loc} \approx T_a = a/2\pi$, где a – ускорение наблюдателя, и при $r \rightarrow r_g$ $T_{loc} \rightarrow \infty^*$).

*) Аналогичным образом ускоренный (с ускорением a) наблюдатель в плоском пространстве-времени также зарегистрирует с помощью описанных "термометров" температуру $T_a = a/2\pi$. Поэтому с точки зрения такого наблюдателя обычный вакуум Минковского в известной мере ведет себя так же, как тепловое излучение с температурой T_a . Следует отметить, что, регистрируя энергию этих тепловых "частиц", он не может с достаточной степенью точности измерить их импульс, поскольку характерная длина волны этого "излучения" порядка расстояния до горизонта. Это же замечание справедливо и для "частиц" теплового излучения, регистрируемых наблюдателем вблизи черной дыры. Подробно об этом см. Унру (1976b), Унру, Уолд (1984).

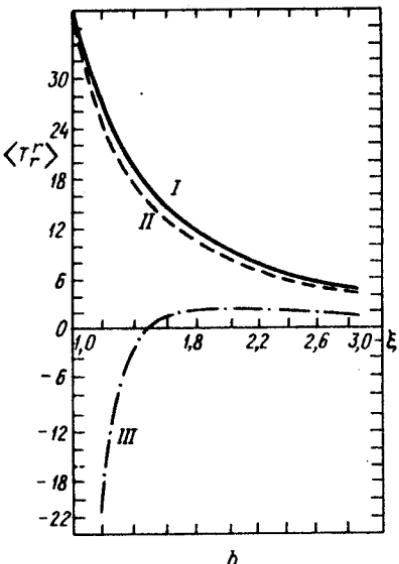
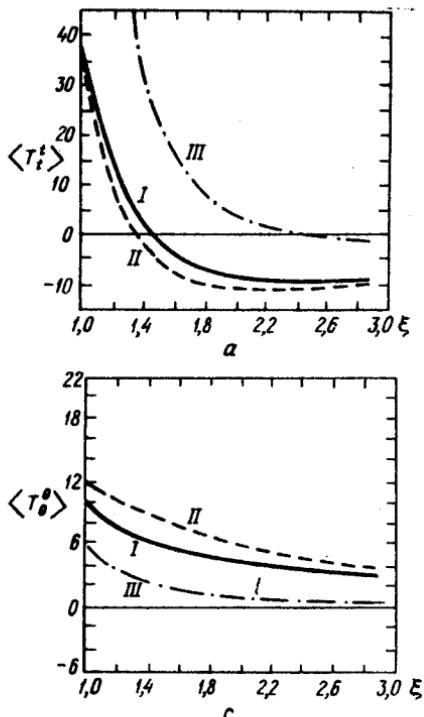


Рис. 82. Значения компонент $[90(8\pi M)^{-1}/\pi^2] \langle T_\nu^\mu \rangle$ в зависимости от ξ . На рисунках представлено поведение $\langle T_t^t \rangle$ (а), $\langle T_r^r \rangle$ (б) и $\langle T_\theta^\theta \rangle = \langle T_\varphi^\varphi \rangle$ (с) компонент тензора энергии-импульса. Компоненты $\langle T_\nu^\mu \rangle_H$ – кривые I, $\langle T_\nu^\mu \rangle_H^P$ – кривые II, а $\langle T_\nu^\mu \rangle_U$ – кривые III

Отметим, однако, что, как следует из приведенных на рис. 82 результатов, плотность энергии излучения в окрестности такой точки $\sim \sigma(k/2\pi)^4 \ll \sigma T_a^4$. Причина "нарушения" закона σT^4 состоит в том, что он не справедлив вблизи границ, где параметры системы сильно изменяются на расстоянии порядка характерной длины волны излучения. В случае черной дыры именно такая ситуация имеет место вблизи ее поверхности (на расстоянии $r - r_g \sim r_g$). Тот факт, что величина $-\langle T_t^t \rangle_H$ (в отличие от σT_a^4) конечна на горизонте, можно интерпретировать следующим образом: вклад поляризации вакуума, связанный с неоднородностью пространства-времени вблизи горизонта, в точности компенсирует ту расходимость, которая имела бы место для плотности энергии излучения, если выполнялся бы закон σT_a^4 .

Фосетт и Уайтинг (1982), анализируя результаты вычислений, обратили внимание на то, что значения величины $\langle \varphi^2 \rangle_H$ на всем интервале от r_g до ∞ хорошо аппроксимируются простым выражением

$$\langle \varphi^2 \rangle_H = \frac{1}{768\pi^2 M^2} \frac{1-z^4}{1-z}, \quad (10.3.12)$$

где $z = 2M/r$. Исходя из этого, Пэйдж (1982) предложил метод приближенного вычисления $\langle \varphi^2 \rangle_H$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle_H$. Для $\langle \varphi^2 \rangle_H$ получаемое в приближении Пэйджа значение $\langle \varphi^2 \rangle_H^P$ совпадает с (10.3.12). Канделас, Ховард (1984), Ховард, Канделас (1984), Ховард (1984) показали, что вычисляемые в рамках приближения Пэйджа величины $\langle \varphi^2 \rangle_H^P$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle_H^P$ весьма точно воспроизводят истинное поведение $\langle \varphi^2 \rangle_H$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle_H$ (для $\langle \varphi^2 \rangle_H^P$ отличие от истинного значения $\langle \varphi^2 \rangle_H$ не превышает 1%, для компонент $\langle T_\nu^\mu \rangle_H^P$ это отклонение не превосходит 20%).

Исходными для построения приближения Пэйджа являются два положения:

1) Пусть имеются два конформных пространства и пусть в каждом из них производится вычисление перенормированных средних $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$ для состояний, получаемых друг из друга с помощью того же конформного преобразования. Тогда следующие комбинации, содержащие $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$, являются инвариантными (т.е. не зависят от того, в каком из конформных пространств они вычислены):

$$Z = g^{1/4} \left[\langle \varphi^2 \rangle + \frac{1}{288\pi^2} R \right], \quad (10.3.13)$$

$$J_\nu^\mu = g^{1/2} \left\{ \langle T_\nu^\mu \rangle + \alpha_s \left[(C^{\alpha\mu}_{\beta\nu} \ln g)_{;\alpha}{}^{;\beta} + \frac{1}{2} R_\alpha^\beta C^{\alpha\mu}_{\beta\nu} \ln g \right] + \beta_s [2H_\nu^\mu - 4R_\alpha^\beta C^{\alpha\mu}_{\beta\nu}] + \frac{1}{6} \gamma_s I_\nu^\mu \right\}, \quad (10.3.14)$$

где

$$H_{\mu\nu} = -R_\mu^\alpha R_{\alpha\nu} + \frac{2}{3} RR_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{2} R_\beta^\alpha R_\alpha^\beta - \frac{1}{4} R^2 \right) g_{\mu\nu}, \quad (10.3.15)$$

$$I_{\mu\nu} = 2R_{;\mu\nu} - 2RR_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{2} R^2 - 2R_{;\alpha}{}^{;\alpha} \right) g_{\mu\nu},$$

$C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор Вейля (П.4), $R_{\alpha\beta}$ — тензор Риччи (П.3), R — скалярная кривизна, а коэффициенты α_s , β_s и γ_s связаны с коэффициентами a_s и b_s , входящими в выражение для конформных аномалий (10.1.3), соотношениями

$$\alpha_s = a_s, \quad \beta_s = b_s, \quad \gamma_s = \frac{2}{3} a_s. \quad (10.3.16)$$

2) Пусть метрика

$$ds^2 = -V^2 dt^2 + h_{ij} dx^i dx^j \quad (10.3.17)$$

является статическим решением вакуумных уравнений Эйнштейна ($V^2 = -\xi_{(t)} \mu \xi_{(t)}^\mu$, $\xi_{(t)}^\mu$ — векторное поле Киллинга). Тогда в пространстве с метрикой $d\tilde{s}^2 = V^{-2} ds^2$ отсутствуют конформные аномалии (т.е. выражения в скобках в правой части (10.1.3), вычисленные в этом пространстве, тождественно обращаются в нуль).

Пэйдж предложил проводить вычисления $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$ сначала в пространстве $d\tilde{s}^2$, используя для функции Грина в нем решение, полученное с помощью ВКБ-приближения, а затем, принимая во внимание инвариантность величин (10.3.13) и (10.3.14), вернуться в исходное физическое

пространство. При этом для скалярного безмассового поля в метрике Шварцшильда для величины $\langle \varphi^2 \rangle_H$ получается выражение (10.3.12), а для $\langle T_\nu^\mu \rangle_H$ – следующее приближенное выражение:

$$\langle T_\nu^\mu \rangle_H^P = \frac{\pi^2}{90} \theta^4 \left[\frac{1 - (4 - 3z)^2 z^6}{(1 - z)^2} (\delta_\nu^\mu - 4\delta_0^\mu \delta_\nu^0) + 24z^6 (3\delta_0^\mu \delta_\nu^0 + \delta_1^\mu \delta_\nu^1) \right], \quad (10.3.18)$$

где $\theta = (8\pi M)^{-1}$ – температура черной дыры. Поведение отличных от нуля компонент $\langle T_\nu^\mu \rangle_H^P$ изображено на рис. 82 (штрих-пунктирная линия). Это приближенное выражение было использовано в работе Йорка (1985) для исследования обратного влияния поляризации вакуума на гравитационное поле черной дыры.

Метод Пэйджа можно использовать также для нахождения приближенных значений $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$ в вакууме Бульвара. Вычисления дают [Фролов, Зельников (1985а)]

$$\langle \varphi^2 \rangle_B^P = - \frac{M^2}{48\pi^2 r^4 (1 - z)}, \quad (10.3.19)$$

$$\begin{aligned} \langle T_\nu^\mu \rangle_B^P = & \frac{M^2}{1440\pi^2 r^6} \left[\left(\frac{4 - 3z}{2(1 - z)} \right)^2 (-\delta_\nu^\mu + 4\delta_0^\mu \delta_\nu^0) + \right. \\ & \left. + 6(3\delta_0^\mu \delta_\nu^0 + \delta_1^\mu \delta_\nu^1) \right]. \end{aligned} \quad (10.3.20)$$

Выражения (10.3.19)–(10.3.20) согласуются с асимптотиками (10.3.6)–(10.3.7) вблизи горизонта событий и имеют правильную асимптотику на бесконечности. По-видимому, точность, с которой (10.3.19) и (10.3.20) воспроизводят точные значения $\langle \varphi^2 \rangle_B$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle_B$, того же порядка, что и в случае хартль-хокинговского вакуума.

В работе Брауна и Оттевилла (1985) предложен несколько иной метод вычисления $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$ для конформно-инвариантных полей, который в случае скалярного поля приводит к тем же выражениям (10.3.12), (10.3.18)–(10.3.20), что и приближении Пэйджа. Браун и Оттевилл обратили внимание на то, что конформные аномалии исчезают не только в пространствах с метрикой $d\tilde{s}^2 = V^{-2} ds^2$, но и в более широком классе пространств, для которых метрики имеют вид $d\tilde{s}^2 = \exp(at) V^{-2} ds^2$. Если потребовать, чтобы в пространстве $d\tilde{s}^2$ состояние было выбрано так, что исчезают не только след ($\langle T_\mu^\mu \rangle = 0$), но и остальные компоненты $\langle \bar{T}_\nu^\mu \rangle$, то после возвращения в исходное физическое пространство получается вполне определенное значение $\langle T_\nu^\mu \rangle$. Браун и Оттевилл показали, что при $a = 0$ полученное таким образом выражение совпадает с $\langle T_\nu^\mu \rangle_B^P$, а при $a = -2k = -(2M)^{-1}$ – правильно воспроизводит $\langle T_\nu^\mu \rangle_H^P$. В рамках этого подхода можно получить также аналогичные приближенные выражения для вкладов нейтринного и электромагнитного полей в $\langle T_\nu^\mu \rangle$.

Результаты Пэйджа и Брауна, Оттевилла, по-видимому, указывают на то, что основной вклад в вакуумный тензор энергии-импульса для конформно-инвариантных полей в поле черной дыры дают конформные ано-

малии, и если учесть их, то возникающий тензор энергии-импульса достаточно хорошо воспроизводит точное значение $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle^*$.

Как уже упоминалось выше, в ряде случаев, когда рассматриваемая точка лежит на горизонте событий, удается точно вычислить значения $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$. Этот замечательный факт связан с особыми геометрическими свойствами пространства-времени вблизи горизонта событий. Остановимся более подробно на этих свойствах.

Метрика Керра обладает симметриями относительно сдвигов по времени t и вращений по φ . Пусть $\xi_{(t)}$ и $\xi_{(\varphi)}$ — соответствующие векторные поля Киллинга, а $\eta = \xi_{(t)} + \Omega^H \xi_{(\varphi)}$ — их линейная комбинация, которая на горизонте является касательной к генераторам горизонта. Нетрудно убедиться, что $\xi_{(\varphi)}$ обращается в нуль на оси симметрии ($\theta = 0, \theta = \pi$), а η — на двумерной поверхности S пересечения горизонтов H^- и H^+ (поверхности бифуркации горизонтов). Антисимметричные тензоры $\xi_{(\varphi)}{}_{\mu; \nu} |_{\xi_{(\varphi)} = 0}$ и $\eta_{\mu; \nu} |_{\eta = 0}$ — невырожденные **). Очевидно, что полюсные ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$) точки x_0 поверхности S остаются неподвижными при сдвигах как по t , так и по φ .

Если потребовать, чтобы в выбранном состоянии $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$ обладало теми же свойствами симметрии, что и фоновое физическое пространство-время, то эта величина должна удовлетворять уравнению

$$\mathcal{L}_{\xi} \langle T_{\mu \nu} \rangle \equiv \xi^{\alpha} \langle T_{\mu \nu} \rangle_{;\alpha} + \xi^{\alpha} {}_{;\mu} \langle T_{\alpha \nu} \rangle + \xi^{\alpha} {}_{;\nu} \langle T_{\mu \alpha} \rangle = 0, \quad (10.3.21)$$

где ξ — векторное поле Киллинга, а \mathcal{L}_{ξ} — производная Ли вдоль него. В точках, где $\xi^{\alpha} = 0$, эти уравнения принимают вид ограничений на алгебраическую структуру $\langle T_{\mu \nu} \rangle$. Решая эти уравнения, можно показать [Фролов, Зельников (1985b)], что подобный регулярный вакуумный тензор энергии-импульса в точке полюса x_0 поверхности S имеет следующий вид:

$$\langle T_{\mu \nu} \rangle = A(k_{\mu} l_{\nu} + l_{\mu} k_{\nu}) + B(m_{\mu} \bar{m}_{\mu} + \bar{m}_{\mu} m_{\nu}). \quad (10.3.22)$$

Здесь $z_a = (k, l, m, \bar{m})$ — векторы комплексной световой тетрады:

$$k_{\alpha} dx^{\alpha} = -dt + \frac{\rho^2}{\Delta} dr + a \sin^2 \theta d\varphi,$$

*) Отметим в этой связи, что в двумерном пространстве-времени конформная аномалия имеет вид

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle = \frac{C_s}{24\pi} R,$$

где R — скалярная кривизна, а C_s — коэффициент, зависящий от спина s поля ($C_0 = 1$). Полный тензор энергии-импульса $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$ определяется своим следом с точностью до двух функций от одной переменной, отвечающих произволу в выборе граничных условий [Кристенсен, Фуллинг (1977)]. Это обстоятельство позволяет точно вычислять $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$ в различных двумерных моделях, имитирующих черную дыру [по этому поводу см. Девис (1976), Девис и др. (1976), Унру (1977), Фуллинг (1977b), Хискок (1977), Фролов, Вилковыский (1983), Бальбинот, Браун (1984), Бальбинот (1984a), Курода (1984a), Биррел, Девис (1982)].

**) Обсуждение общих свойств поверхностей, образованных точками, неподвижными под действием группы симметрий, можно найти в работе Бойера (1969); см. также Миллер (1979).

$$l_\alpha dx^\alpha = \frac{\Delta}{2\rho^2} \left(-dt - \frac{\rho^2}{\Delta} dr + a \sin^2 \theta d\varphi \right),$$

$$m_\alpha dx^\alpha \equiv (\bar{m}_\alpha dx^\alpha) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(r + ia \cos \theta)}} [-ia \sin \theta dt + \rho^2 d\theta + i(r^2 + a^2) \sin \theta d\varphi].$$
(10.3.23)

Иными словами, этот тензор определяется двумя константами A и B , причем их разность фиксируется величиной конформных аномалий:

$$2(B - A) = \langle T_\mu^\mu \rangle = (a_s + b_s) C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (10.3.24)$$

В случае сферически-симметричной черной дыры в качестве x_0 может быть выбрана любая точка поверхности S . При этом отличные от нуля компоненты тензора энергии-импульса имеют вид

$$T_t^t = T_r^r = -A, \quad T_\theta^\theta = T_\varphi^\varphi = B. \quad (10.3.25)$$

Из непрерывности $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ и свойства инвариантности (10.3.21) следует, что $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ имеет вид, аналогичный (10.3.22) на полюсе горизонта событий и вне поверхности S .

Другим обстоятельством, которое также приводит к существенному упрощению задачи вычисления $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$ на горизонте событий, является следующее. Пусть $\Pi(x, x')$ – любой бискаляр (например, функция Грина $G_H(x, x')$ скалярного поля), обладающий теми же свойствами симметрии, что и фоновое пространство-время. Тогда

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_\xi \Pi(x, x') + \mathcal{L}_{\xi'} \Pi(x, x') = \\ & = \left(\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \xi^{\alpha'} \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha'}} \right) \Pi(x, x') = 0. \end{aligned} \quad (10.3.26)$$

Здесь \mathcal{L}_ξ ($\mathcal{L}_{\xi'}$) – производная Ли вдоль векторного поля Киллинга ξ по первому (второму) аргументу. Если точки x и x' не совпадают с осью вращения и не лежат на поверхности S , то уравнение (10.3.26) показывает, что бискаляр $\Pi(x, x')$ зависит от разностей $t - t'$ и $\varphi - \varphi'$. Если же точка x' лежит на полюсе поверхности S , то функция $\Pi(x, x_0)$ вообще не зависит ни от t , ни от φ .

Это, в частности, приводит к тому, что волновое уравнение, которому подчиняется функция $-iG_H(x, x_0)$, существенно упрощается и допускает точное решение. В координатах $R = \Delta^{1/2} \sin \theta$, $z = (r - M) \cos \theta$ это уравнение принимает вид

$$\left[\frac{1}{R} \partial_R (R \partial_R) + \partial_z^2 \right] (-iG_H(R, z; x_0)) = -\frac{\kappa}{4\pi^2 R} \delta(R) \delta(z - z_0),$$
(10.3.27)

где $z_0 = \sqrt{M^2 - a^2}$. Заметим, что решение этого уравнения совпадает с потенциалом поля точечного заряда $e = \kappa / 8\pi^2$, помещенного в точке $z = z_0$ на оси $x = y = 0$ ($R^2 = x^2 + y^2$) в плоском пространстве. Используя это решение, находим

$$G_H(x, x_0) = \frac{i\kappa}{8\pi^2 (r - M - \sqrt{M^2 - a^2} \cos \theta)}. \quad (10.3.28)$$

Вычитая из этого выражения расходящуюся часть [см. (10.1.10)] и устремляя x к x_0 , получаем для величины $\langle \varphi^2(x_0) \rangle_H$ на полюсе горизонта событий следующее значение [Фролов (1982, 1983)] *):

$$\langle \varphi^2(x_0) \rangle_H = \frac{1}{48\pi^2} \cdot \frac{r_+^2 - 3a^2}{(r_+^2 + a^2)^2}. \quad (10.3.29)$$

(при $a=0$ это выражение было получено Канделасом (1980) путем суммирования ряда для представления функции Грина.)

Фролов и Зельников (1985б) аналогичным методом вычислили величину $\langle T_\nu^\mu(x_0) \rangle_H$ для электромагнитного поля. Коэффициенты A и B в выражении (10.3.22) получили следующие значения:

$$A = \frac{1}{1920\pi^2 M^4 r_+^3} [-15M^3 - 195M^2(M^2 - a^2)^{1/2} + 292(M^2 - a^2)^{3/2}], \quad (10.3.30)$$

$$B = \frac{1}{1920\pi^2 M^4 r_+^3} [-15M^3 - 117M^2(M^2 - a^2)^{1/2} + 188(M^2 - a^2)^{3/2}].$$

При $a=0$ эти выражения воспроизводят результат, полученный Эльстером (1984) путем суммирования рядов.

Отметим одно любопытное свойство выражения (10.3.29). Нетрудно убедиться, что его можно переписать в виде

$$\langle \varphi^2(x_0) \rangle_H = \frac{1}{48\pi^2} K, \quad (10.3.31)$$

где K – гауссова кривизна двумерной поверхности черной дыры в точке ее полюса x_0 . [Вычисление K на поверхности керровской черной дыры см. Смэрр (1973б).] Выражение (10.3.31) справедливо и в случае, когда черная дыра помещена во внешнее статическое аксиально-симметричное гравитационное поле.

*) Этот же прием можно использовать для вычисления $\langle \varphi^2 \rangle_{H; r_0}$ в случае, когда черная дыра помещена во внешнее аксиально-симметричное статическое гравитационное поле [Фролов, Гарсия (1983)] или окружена зеркальной оболочкой, описываемой уравнением $r = r_0 (\varphi|_{r_0} = 0)$. В последнем случае задача сводится к нахождению поля внутри проводящего заземленного эллипсоида вращения, описываемого уравнением

$$\frac{R^2}{\Delta(r_0)} + \frac{z^2}{(r_0 - M)^2} = 1,$$

от точечного заряда, помещенного в его фокус. Соответствующее значение $\langle \varphi^2 \rangle_{H; r_0}$ равно

$$\langle \varphi^2 \rangle_{H; r_0} = \langle \varphi^2 \rangle_H - \delta_{r_0} \langle \varphi^2 \rangle,$$

где

$$\delta_{r_0} \langle \varphi^2 \rangle = \frac{1}{8\pi^2 (r_+^2 + a^2)} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{Q_l(b)}{P_l(b)}.$$

Здесь $b = (r_0 - M) / (M^2 - a^2)^{1/2}$, а P_l и Q_l – функции Лежандра.

Нетрудно показать, что в приближении Пэйджа величина $\langle \varphi^2 \rangle_H^P$ на горизонте событий любой статической (в том числе и деформированной внешним полем) черной дыры может быть записана в виде (10.3.31). В этом же приближении величина $\epsilon = -\langle T_t^t \rangle_H^P$, характеризующая плотность энергии на поверхности черной дыры, описывается выражением [Фролов, Санчес (1985)]

$$\epsilon = -(7a_s + 12b_s)K^2 + a_s^{(2)}\Delta K, \quad (10.3.32)$$

где $^{(2)}\Delta$ – двумерный лапласиан на поверхности черной дыры, а a_s и b_s – коэффициенты, входящие в выражение для конформных аномалий (10.1.3).

Для черных дыр с массой больше планковской вклад массивных полей в поляризацию вакуума значительно (на фактор $\epsilon = (\lambda/L)^2$, $\lambda = \hbar/mc$, L – характерный радиус кривизны) меньше вклада безмассовых полей. Имеется, однако, ряд причин, по которым изучение вклада массивных полей может представлять интерес. Прежде всего отметим, что при $\epsilon \ll 1$ удается разделить вклады реальных и виртуальных частиц в $\langle T_\nu^\mu \rangle$. Так, в состоянии харль-хокинговского вакуума вклад реальных частиц тепловой бани в $\langle T_\nu^\mu \rangle_H$ содержит экспоненциально малый фактор $\exp(-\beta GMm/\hbar c)$, в то время как вклад виртуальных частиц зависит от M степенным образом*). Эффект поляризации вакуума массивных полей допускает значительно более детальное изучение, поскольку имеется возможность использовать разложение по малому безразмерному параметру ϵ . В том случае, когда фоновое гравитационное поле удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна, величина $\langle T_\nu^\mu \rangle_H$ для массивных скалярного, спинорного и векторного полей в первом неисчезающем порядке по ϵ может быть получена вариацией следующего эффективного действия [Фролов, Зельников (1984)]:

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_H^{(s)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W^{(s)}}{\delta g^{\mu\nu}(x)}, \quad (10.3.33)$$

где

$$W^{(s)} = (96 \cdot 7! \pi^2 m^2)^{-1} \int d^4x \sqrt{-g} (A_s R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta}^{\epsilon\xi} R_{\epsilon\xi}^{\alpha\beta} + B_s R R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}). \quad (10.3.34)$$

Здесь m – масса поля, а коэффициенты A_s и B_s для поля спина s равны соответственно

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, & A_{1/2} &= -4, & A_1 &= 3, \\ B_0 &= 18 - 84\xi, & B_{1/2} &= 12, & B_1 &= -30 \end{aligned} \quad (10.3.35)$$

(ξ – коэффициент при члене $R\varphi^2$ в действии для скалярного поля; при $\xi = 1/6$ и $m = 0$ поле конформно-инвариантно). Для шварцшильдовской

*) Поскольку значения $\langle T_\nu^\mu \rangle$ в различных "вакуумах" отличаются друг от друга вкладом реальных частиц теплового излучения, то $\langle T_\nu^\mu \rangle_B$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle_U$ вблизи черной дыры практически совпадают с $\langle T_\nu^\mu \rangle_H$ везде, за исключением экспоненциально узкой ($\sim r_g \exp(-\beta GMm/\hbar c)$) полоски вблизи горизонта событий. Внутри полоски поведение этих величин различно: $\langle T_\nu^\mu \rangle_B$ расходится на H^- и H^+ , а $\langle T_\nu^\mu \rangle_U$ – на H^- , оставаясь конечным на H^+ .

Таблица

Литература	Параметры поля		Параметры черной дыры	
	масса m	спин s	угловой момент J	заряд Q
Кристенсен, Фуллинг (1977)			0	0
Канделас (1980)	0	0	0	0
Канделас и др. (1981)	0	1; 2	$\neq 0$	0
Фоссегт, Уайтинг (1982)	0	0	0	0
Пэйдж (1982)	0	0	0	0
Нугаев (1982)	0	0; 1	0	0
Фролов (1982)	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$

Вычисления проводились		$\langle \varphi^2 \rangle$	$\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$	Вакуумные состояния	Примечания
на	вне				
горизонте (а) событий					
+	+	+	+	H, B, U	Общий анализ
+	+	+	+	H, B, U	Представления для G , $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$ в виде рядов. Вычисление $\langle \varphi^2 \rangle_H$ и $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_H$ на горизонте
+			+	B	Суммирование рядов. Анализ расходимости на горизонте
+	+	+		H, B, U	Численные расчеты
+	+	+	+	H	Приближенный метод
+			+	B	Приближенный метод
+		+		H	Явное аналитическое выражение

Таблица (продолжение)

Литература	Параметры поля		Параметры черной дыры		Вычисления проводились		$\langle \varphi^2 \rangle$	$\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$	Вакуумные состояния	Примечания
	масса m	спин s	угловой момент J	заряд Q	на	вне				
					горизонте (а) событий					
Эльстер (1982a)	0	0	0	0	+	+		+	(H; r_0)	Анализ влияния границы
Эльстер (1982b)	0	0	0	0	+		+		(H; r_0)	Явное выражение
Фролов, Зельников (1982)	$\neq 0$	0	0	0	+	+		+	H	Разложение по параметру $\epsilon = (m_{Pl}^2/Mm)^2$
Фосетт (1983)	0	0	0	0	+	+		+	H	Численные расчеты
Эльстер (1983a)	0	0	0	0	+			+	(H; r_0)	Численные расчеты
Эльстер (1983b)	0	0	0	0	+	+		+	U	Численные расчеты
Болашенко, Фролов (1983)	0	0	0	0	+	+	+	+	H	Приближенный метод
Фролов, Зельников (1983)	$\neq 0$	0; 1/2; 1	$\neq 0$	0	+	+		+	H	Разложение по параметру ϵ

Таблица (окончание)

Литература	Параметры поля		Параметры черной дыры		Вычисления проводились		$\langle \varphi^2 \rangle$	$\langle T^\mu_\nu \rangle$	Вакуумные состояния	Примечания				
	на	вие	горизонте (а) со- бытий											
	масса m	спин s	угловой момент J	заряд Q	+	+								
Фролов, Гарсия (1983)	0	0	0	0	+	+	+	+	H	Возмущенная черная дыра. Явное аналитическое выражение				
Фролов, Зельников (1984)	$\neq 0$	0; 1/2; 1	$\neq 0$	0	+	+	+	+	H	Разложение по параметру ϵ				
Канделас, Ховард (1984)	0	0	0	0	+	+	+	+	H	Численные расчеты				
Ховард, Канделас (1984)	0	0	0	0	+	+	+	+	H	Обоснование и оценка точности				
Ховард (1984)	0	0	0	0	+	+	+	+	H	Приближения Пэйджа				
Заниас (1984)	0	0	0	$\neq 0$	+	+	+	+	H	Приближенный метод				
Эльстер (1984)	0	1	0	0	+		+	+	H	Явное аналитическое выражение				
Фролов, Санчес (1985)	0	0; 1/2; 1	0	0	+		+	+	H, B	Возмущенная черная дыра. Приближенный метод				
Браун, Оттевилл (1985)	0	0; 1/2; 1	0	0	+	+	+	+	H, B	Приближенный метод				
Фролов, Зельников (1985b)	0	1	$\neq 0$	0	+		+	+	H	Явное аналитическое выражение				

черной дыры в этом приближении $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_H^{(s)}$ имеет вид [Фролов, Зельников (1982)]

$$\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_H^{(s)} = \frac{M^2}{10080\pi^2 m^2 r^8} [A_s p_{\nu}^{\mu} + 3(2B_s + A_s)q_{\nu}^{\mu}], \quad (10.3.36)$$

где отличные от нуля компоненты p_{ν}^{μ} и q_{ν}^{μ} суть ($z = 2M/r$)

$$\begin{aligned} p_t^t &= -15 + 16z, & p_r^r &= -3 + 4z, & p_{\theta}^{\theta} &= p_{\varphi}^{\varphi} = 9 - 11z, \\ q_t^t &= -10 + 11z, & q_r^r &= 4 - 3z, & q_{\theta}^{\theta} &= q_{\varphi}^{\varphi} = -12 + 14z. \end{aligned} \quad (10.3.37)$$

Обращает на себя внимание качественное сходство поведения $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_H$ для безмассовых и массивных полей. Для скалярного массивного ($\xi = 1/6$) поля плотность энергии $\epsilon = -\langle T_t^t \rangle_H$ положительна вдали от черной дыры, а вблизи нее меняет знак и становится отрицательной на горизонте, аналогично тому, как это происходит для конформного скалярного безмассового поля. Для векторного массивного поля, так же как и для электромагнитного, плотность энергии е положительна на горизонте событий.

Вращение черной дыры приводит к появлению в окружающем пространстве циркулярного потока плотности энергии, связанного с поляризацией вакуума и описываемого компонентой $\langle T_{\varphi}^t \rangle \neq 0$. Выражение $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle^{(s)}$ для массивных полей в метрике Керра было получено и исследовано в работах Фролова и Зельникова (1983, 1984).

Завершая изложение основных результатов вычислений $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$, приведем для удобства ссылок следующую таблицу, в которой содержится перечень основных работ, посвященных изучению поляризации вакуума в черных дырях, и краткая характеристика полученных результатов. В графах этой таблицы дана информация о массе m и спине s поля, для которого проводились вычисления; указано, является ли рассматриваемая черная дыра вращающейся ($J \neq 0$) или заряженной ($Q \neq 0$); значения каких величин ($\langle \varphi^2 \rangle$ или $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$), для какого состояния ($|H\rangle$, $|H, r_0\rangle$, $|U\rangle$ или $|B\rangle$) и где (на горизонте или вне его) вычислялись, а также дается краткая информация о методе, с помощью которого проводились расчеты.

В заключение главы отметим, что в настоящее время имеется не только качественное понимание особенностей эффектов поляризации вакуума в черных дырах, но и хорошее количественное описание их.