ляется функцией этих параметров:

$$A = 4\pi(2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2 - J^2/M^2}). \qquad (11.1.1)$$

Это соотношение можно обратить и найти выражение для внутренней энергии черной дыры

$$M \equiv M(A, J, Q) = \left\{ \frac{\pi\,[(Q^2 + A/4\pi)^2 + 4J^2]}{A} \right\}^{1/2}. \qquad (11.1.2)$$

Для двух стационарных черных дыр со слегка отличными значениями площади δA, углового момента δJ и электрического заряда δQ внутренняя энергия отличается на величину

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\,\delta A + \Omega^{\mathrm{H}}\delta J + \Phi^{\mathrm{H}}\delta Q, \qquad (11.1.3)$$

где $\kappa = 4\pi\sqrt{M^2 - Q^2 - J^2/M^2}/A$ – поверхностная гравитация, $\Omega^{\mathrm{H}} = 4\pi J/MA$ – угловая скорость и $\Phi^{\mathrm{H}} = 4\pi Q r_+/A$ – электрический потенциал черной дыры. Второй и третий члены этой формулы описывают изменение энергии вращения и электрической энергии.

Это соотношение аналогично первому закону термодинамики; при этом в качестве аналога температуры (величины, сопряженной энтропии) выступает величина, пропорциональная поверхностной гравитации κ. Результат Хокинга о тепловом характере излучения стационарной черной дыры не только подтверждает указанную аналогию, но и позволяет найти коэффициент, связывающий температуру θ и поверхностную гравитацию κ:

$$\theta = \hbar\kappa/2\pi ck. \qquad (11.1.4)$$

При этом соотношение (11.1.3) в точности совпадает с первым законом термодинамики

$$\delta E = \theta\,\delta S^{\mathrm{H}} + \Omega^{\mathrm{H}}\,\delta J + \Phi^{\mathrm{H}}\delta Q, \qquad (11.1.5)$$

если для энтропии черной дыры принять выражение

$$S^H = A/4l_{\mathrm{Pl}}^2, \qquad l_{\mathrm{Pl}}^2 = \hbar G/c^3. \qquad (11.1.6)$$

Приведенные соображения дают все основания отнестись серьезно к упомянутой аналогии между физикой черных дыр и термодинамикой. Основные законы физики черных дыр, играющие роль, аналогичную законам термодинамики, мы рассмотрим в § 11.3 после обсуждения общих свойств поверхностной гравитации κ и вывода так называемых массовых формул, обобщающих соотношения (11.1.2) и (11.1.3) на случай произвольных стационарных черных дыр, окруженных стационарным распределением вещества и полей.

§ 11.2. Поверхностная гравитация. Массовая формула

Согласно теоремам единственности (§ § 6.3, 6.4) уединенная стационарная черная дыра в общем случае является керр-ньюменовской. Для такой черной дыры значения угловой скорости Ω^H, поверхностной гравитации κ и электрического потенциала Φ^H постоянны на горизонте событий. Свойство постоянства этих величин сохраняется и в том случае, если черная дыра окружена веществом, при условии, что геометрия пространства-времени

остается стационарной и аксиально-симметричной или статической. Поскольку это свойство существенно для развития термодинамической аналогии в физике черных дыр, остановимся на нем подробнее.

Пусть $\xi^{\mu}_{(t)}\partial_{\mu}=\partial_{t}$ и $\xi^{\mu}_{(\varphi)}\partial_{\mu}=\partial_{\varphi}$ – векторные поля Киллинга, отвечающие сдвигу по времени и вращению. Определим бивектор $\rho_{\mu\nu}$:

$$\rho_{\mu\nu}=2\xi_{(t)[\mu}\,\xi_{(\varphi)\nu]}\,. \tag{11.2.1}$$

Тогда, как показал Картер (1973а), при выполнении условия циркулярности (см. § 6.4) горизонт событий произвольной стационарной аксиально-симметричной черной дыры совпадает с множеством точек, где бивектор $\rho_{\mu\nu}$ становится светоподобным ($\rho_{\mu\nu}\rho^{\mu\nu}=0$); при этом касательные векторы l^{μ} к горизонту событий совпадают по направлению со световым вектором, лежащим в двумерной световой площадке, растягиваемой векторами $\xi_{(t)}$ и $\xi_{(\varphi)}$. Выбирая нормировку l^{μ} соответствующим образом, имеем

$$l^{\mu}=\xi^{\mu}_{(t)}+\Omega^{H}\,\xi^{\mu}_{(\varphi)}\,. \tag{11.2.2}$$

Из свойств симметрии пространства-времени следует, что угловая скорость черной дыры Ω^{H} не может зависеть ни от времени t, ни от угла φ:

$$\xi^{\mu}_{(t)}\,\Omega^{H}_{,\mu}=\xi^{\mu}_{(\varphi)}\,\Omega^{H}_{,\mu}=0. \tag{11.2.3}$$

Нетривиальным моментом является то, что Ω^{H} не зависит также и от "широты" точки на поверхности черной дыры, т.е. постоянна на всей этой поверхности. Для доказательства этого свойства введем обозначения

$$X=\xi_{(\varphi)}\cdot\xi_{(\varphi)},\qquad W=\xi_{(t)}\cdot\xi_{(\varphi)},\qquad V=-\xi_{(t)}\cdot\xi_{(t)}\,. \tag{11.2.4}$$

Поскольку $\xi_{(\varphi)}$ (как и $\xi_{(t)}$) лежит в плоскости, касательной к горизонту событий, то $\xi_{(\varphi)}\,l=0$, и из (11.2.2) имеем

$$X\Omega^{H}=-W. \tag{11.2.5}$$

Если продифференцировать это соотношение по x^{α} и использовать свойство коммутативности $[\xi_{(t)},\xi_{(\varphi)}]=0$, то нетрудно получить следующее равенство:

$$X^{2}\Omega^{H}_{,\alpha}=2\,(\xi^{\beta}_{(\varphi)}\,W-\xi^{\beta}_{(t)}\,X)\xi_{(\varphi)\beta;\alpha}\,. \tag{11.2.6}$$

Умножим теперь обе части этого равенства на $\rho_{\gamma\delta}$ и проведем антисимметризацию по индексам α, γ и δ. Если учесть соотношение

$$\xi_{(\varphi)\alpha;[\beta}\,\rho_{\gamma\delta]}=\xi_{(\varphi)\alpha}\,\xi_{(\varphi)[\beta;\gamma}\,\xi_{(t)\delta]}-\xi_{(t)\alpha}\,\xi_{(\varphi)[\beta;\gamma}\,\xi_{(\varphi)\delta]}\,, \tag{11.2.7}$$

вытекающее из условия циркулярности (6.4.4), и обращение в нуль на горизонте инварианта $W^{2}+XV=-2\rho_{\alpha\beta}\rho^{\alpha\beta}$, то можно убедиться, что правая часть полученного выражения равна нулю, и мы имеем

$$X^{2}\Omega^{H}_{[,\alpha}\,\rho_{\gamma\delta]}=0. \tag{11.2.8}$$

Вне оси симметрии ($X\neq 0$) это условие означает, что $\Omega^{H}_{,\alpha}$ лежит в двумерной плоскости, растягиваемой векторами $\xi_{(t)}$ и $\xi_{(\varphi)}$, а соотношение (11.2.3) показывает, что $\Omega^{H}_{,\alpha}=0$. Тем самым доказано свойство постоянства Ω^{H} на горизонте событий. (В полюсных точках Ω^{H} определяется по непрерывности.)

Свойство постоянства угловой скорости черной дыры Ω^H можно сформулировать несколько иным способом. Введем векторное поле Киллинга η:

$$\eta^\mu = \xi^\mu_{(t)} + \Omega^H \xi^\mu_{(\varphi)} . \tag{11.2.9}$$

На горизонте событий это векторное поле касательно к образующим горизонта и $\eta \cdot \eta = 0$*). Иными словами, постоянство Ω^H означает, что горизонт событий совпадает с *горизонтом Киллинга*. Последний определяется как световая поверхность, световые касательные векторы к которой совпадают (при соответствующей нормировке) с векторами некоторого фиксированного поля Киллинга.

Перейдем теперь к доказательствву постоянства поверхностной гравитации κ. Эта величина уже встречалась нам неоднократно, в частности, при рассмотрении различных свойств керровской черной дыры. Дадим теперь общее определение этой величины, пригодное для произвольной стационарной (не обязательно уединенной) черной дыры.

Поскольку величина $\eta \cdot \eta$ (равная нулю) постоянна на поверхности горизонта событий, то вектор $(\eta \cdot \eta)_{;\nu}$ нормален к этой поверхности. В силу светового характера последней имеем

$$(\eta \cdot \eta)^{;\nu} = 2\kappa\eta^\nu , \tag{11.2.10}$$

где κ — инвариантная функция на поверхности черной дыры, называемая поверхностной гравитацией. Так как $\xi_{(t)}$ и $\xi_{(\varphi)}$ касательны к горизонту и $\mathcal{L}_{\xi_{(t)}} \eta = \mathcal{L}_{\xi_{(\varphi)}} \eta = 0$, то, применяя операторы $\mathcal{L}_{\xi_{(t)}}$ и $\mathcal{L}_{\xi_{(\varphi)}}$ к обеим частям (11.2.10), можно убедиться, что $\xi^\mu_{(t)} \kappa_{,\mu} = \xi^\mu_{(\varphi)} \kappa_{,\mu} = 0$. Это свойство — простое отражение свойств симметрии, присущей пространству-времени. Гораздо менее тривиальным является независимость κ от "широты" точки на поверхности черной дыры.

Для доказательства постоянства κ на всем горизонте событий, следуя работе Бардина и др. (1973), удобно использовать тетрадный формализм. С этой целью дополним $l^\mu = \eta^\mu |_{H^+}$ до комплексной световой тетрады, выбрав комплексные световые векторы m^μ, $\overline{m}^\mu$ касательными к поверхности горизонта и нормированными соотношением $m^\mu \overline{m}_\mu = 1$ и действительный световой вектор n^μ, ортогональный m^μ и $\overline{m}^\mu$ и нормированный условием $l^\mu n_\mu = -1$. С помощью введенной комплексной световой тетрады κ можно записать в следующем виде:

$$\kappa = -l_{\nu;\mu} n^\nu l^\mu . \tag{11.2.11}$$

Действительно, если, используя $\eta_{\mu;\nu} = -\eta_{\nu;\mu}$, переписать (11.2.10) в виде

$$\eta^\mu \eta^\nu{}_{;\mu} = \kappa\eta^\nu \tag{11.2.12}$$

и воспользоваться тем, что на H $\eta^\mu = l^\mu$, то после умножения (11.2.12) на n^ν получаем (11.2.11).

---

*) Существование векторного поля Киллинга (11.2.9), обладающего этим свойством, является следствием теоремы Хокинга (§ 6.2), из которой также вытекает, что Ω^H = const.

С помощью (11.2.11) получим

$$m^\alpha \kappa_{;\alpha} = -l_{\nu;\mu\alpha} n^\nu l^\mu m^\alpha - l_{\nu;\mu} n^\nu{}_{;\alpha} l^\mu m^\alpha - l_{\nu;\mu} n^\nu l^\mu{}_{;\alpha} m^\alpha. \qquad (11.2.13)$$

Поскольку первый из членов в правой части зависит лишь от значения l^μ на H, то можно использовать совпадение на этой поверхности l^μ с векторным полем Киллинга η^μ. В частности, с помощью соотношения (П.15) для векторного поля Киллинга $\eta_{\nu;\mu\alpha} = R_{\beta\alpha\mu\nu}\eta^\beta$ приведем первый член в правой части (11.2.13) к виду $-R_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\alpha m^\beta l^\gamma n^\delta$. Используя (11.2.12) и соотношение $l_\nu n^\nu{}_{;\alpha} = -n^\nu l_{\nu;\alpha}$, второй член в правой части (11.2.13) запишем в виде $\kappa l_{\nu;\alpha} n^\nu m^\alpha$. Покажем теперь, что этот член сокращается с последним членом в правой части (11.2.13). С этой целью заметим, что условия нормировки нулевой тетрады приводят к соотношению

$$g^{\mu\beta} = -n^\beta l^\mu - l^\beta n^\mu + m^\beta \bar{m}^\mu + \bar{m}^\beta m^\mu. \qquad (11.2.14)$$

Используя это соотношение, а также условия отсутствия сдвига и расширения поверхности горизонта событий

$$\rho = -l_{\alpha;\beta} m^\alpha \bar{m}^\beta = 0, \qquad \sigma = -l_{\alpha;\beta} m^\alpha m^\beta = 0, \qquad (11.2.15)$$

перепишем последний член в правой части (11.2.13) в виде

$$-l_{\nu;\mu} n^\nu l^\mu{}_{;\alpha} m^\alpha = -l_{\nu;\mu} n^\nu g^{\mu\beta} l_{\beta;\alpha} m^\alpha =$$

$$= l_{\nu;\mu} n^\nu l^\mu n^\beta l_{\beta;\alpha} m^\alpha = -\kappa l_{\nu;\alpha} n^\nu m^\alpha. \qquad (11.2.16)$$

Это выражение лишь знаком отличается от второго члена и сокращается с ним. В итоге имеем

$$m^\alpha \kappa_{;\alpha} = -R_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\alpha m^\beta l^\gamma n^\delta. \qquad (11.2.17)$$

Заметим теперь, что на поверхности горизонта

$$l_{\alpha;\beta} m^\alpha{}_{;\gamma} \bar{m}^\beta m^\gamma = l_{\alpha;\beta} m^\alpha \bar{m}^\beta{}_{;\gamma} m^\gamma = 0. \qquad (11.2.18)$$

В этом можно убедиться с помощью (11.2.14), (11.2.15) и условий нормировки векторов тетрады. Поэтому с учетом (П. 15) и (11.2.15) имеем

$$0 = -\rho_{;\gamma} m^\gamma = (l_{\alpha;\beta} m^\alpha \bar{m}^\beta)_{;\gamma} m^\gamma = R_{\epsilon\alpha\beta\gamma} l^\epsilon m^\alpha \bar{m}^\beta m^\gamma =$$

$$= -R_{\alpha\beta} l^\alpha m^\beta + R_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\alpha m^\beta l^\gamma n^\delta. \qquad (11.2.19)$$

Используя это соотношение и уравнения Эйнштейна $R_{\alpha\beta} l^\alpha m^\beta = 8\pi T_{\alpha\beta} l^\alpha m^\beta$, перепишем (11.2.17) в виде

$$m^\alpha \kappa_{;\alpha} = -8\pi T_{\alpha\beta} l^\alpha m^\beta. \qquad (11.2.20)$$

Для завершения доказательства постоянства κ мы предположим, что тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ удовлетворяет условию энергодоминантности (см. Приложение), т.е. для светоподобного вектора l_α $T_{\alpha\beta} l^\alpha$ является непространственноподобным вектором. При выполнении этого условия вектор $T_{\alpha\beta} l^\alpha$ на горизонте событий обязан быть светоподобным [случай времениподобного вектора исключается, поскольку на горизонте $T_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta = \Phi = 0$; см. (6.2.2)]. Поэтому $T_{\alpha\beta} l^\alpha m^\beta = 0$ и соотношение (11.2.20) доказывает, что κ постоянна на горизонте.

Интегральные кривые $x^\mu = x^\mu(v)$ векторного поля η^μ $(dx^\mu/dv = \eta^\mu)$ на горизонте событий совпадают с его образующими и поэтому являются геодезическими. В этом можно также непосредственно убедиться с помощью соотношения (11.2.12). Поскольку правая часть этого уравнения не обращается в нуль, то киллинговский параметр v не совпадает с аффинным параметром λ вдоль световых геодезических, описываемых этим уравнением. Связь v и λ имеет вид $\lambda = ae^{\kappa v} + b$, где a и b – произвольные числа, отвечающие произволу в выборе афинного параметра λ.

Остановимся теперь на физической интерпретации κ. Рассмотрим стационарного наблюдателя, движущегося вблизи черной дыры, для которого мировая линия совпадает с интегральной кривой поля Киллинга η^μ. Вектор 4-скорости такого наблюдателя

$$u^\mu = \frac{\eta^\mu}{|\eta_\alpha \eta^\alpha|^{1/2}}.$$

Если η^μ описывается выражением (11.2.9), то такой наблюдатель, находясь вблизи горизонта событий, обращается с угловой скоростью, совпадающей с угловой скоростью черной дыры. Очевидно, движение подобного наблюдателя негеодезично, 4-ускорение a^μ его движения равно [ср. с (П. 16)]

$$a^\mu = -\frac{\eta^\mu{}_{;\alpha}\eta^\alpha}{\eta_\beta \eta^\beta}. \tag{11.2.21}$$

Обозначим $a = |a_\mu a^\mu|^{1/2}$ и $\eta = |\eta_\beta \eta^\beta|^{1/2}$. Тогда, сравнивая (11.2.12) и (11.2.21), получим

$$\kappa = \lim(\eta a), \tag{11.2.22}$$

где lim означает переход к пределу, при котором рассматриваемая точка, в которой вычисляется выражение ηa, стремится к горизонту событий.

Для невращающейся черной дыры η не что иное, как фактор красного смещения ($\eta = \sqrt{-g_{tt}}$). Представим себе, что тело покоится вблизи горизонта событий, удерживаемое невесомой жесткой нитью. Если масса тела m, то, чтобы оно оставалось в покое, на него со стороны нити должна действовать сила f^μ такая, что $f = |f_\mu f^\mu|^{1/2} = ma$. Можно показать, что при этом достаточно, чтобы на другой (удаленный) конец нити действовала сила $f_0 = m\eta a$ (см. § 2.2). Поэтому величину ηa можно интерпретировать как ускорение тела, покоящегося вблизи черной дыры, измеренное в системе отсчета удаленного наблюдателя. Иными словами, поверхностная гравитация κ характеризует предельную "напряженность" гравитационного поля на поверхности черной дыры с точки зрения удаленного наблюдателя. Аналогичный смысл имеет κ и для вращающейся черной дыры – с той лишь разницей, что рассматриваемое тело вращается со скоростью черный дыры.

При описании физических эффектов в поле заряженных черных дыр наряду с κ обычно входит другая инвариантная величина Φ^H – потенциал электрического поля на поверхности черной дыры. В гл. 7 отмечалось, что

эта величина постоянна на поверхности керр-ньюменовской черной дыры. Покажем, что данный результат имеет общий характер и справедлив для любой статической или аксиально-симметричной стационарной (не обязательно уединенной) черной дыры.

Пусть ξ^μ – векторное поле Киллинга и $F_{\mu\nu}$ – тензор электромагнитного поля, удовлетворяющий уравнениям Максвелла

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi j^\mu, \qquad F_{[\mu\nu,\alpha]} = 0 \tag{11.2.23}$$

и подчиненный условию симметрии

$$\mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu} = 0. \tag{11.2.24}$$

Тогда нетрудно убедиться, что вектор $E_\mu = -F_{\mu\nu}\xi^\nu$ удовлетворяет условию

$$E_{[\mu;\nu]} = 0 \tag{11.2.25}$$

и, следовательно, является градиентом некоторой функции Φ:

$$E_\mu = \Phi_{,\mu}. \tag{11.2.26}$$

Покажем, что если A_μ – вектор-потенциал поля $F_{\mu\nu}$, удовлетворяющий условию симметрии

$$\mathcal{L}_\xi A^\mu \equiv \xi^\alpha A^\mu{}_{;\alpha} - A^\alpha \xi^\mu{}_{;\alpha} = 0, \tag{11.2.27}$$

то в качестве Φ можно выбрать величину

$$\Phi = -A_\alpha \xi^\alpha. \tag{11.2.28}$$

Действительно, дифференцируя (11.2.28) и используя (11.2.27), имеем

$$\Phi_{,\mu} = -A_{\alpha;\mu}\xi^\alpha - A_\alpha \xi^\alpha{}_{;\mu} = -A_{\alpha;\mu}\xi^\alpha + A_{\mu;\alpha}\xi^\alpha = E_\mu. \tag{11.2.29}$$

Для определенности будем считать, что потенциал выбран таким образом, что A_μ обращается в нуль на бесконечности. Если выбрать в качестве ξ^μ векторное поле η^μ (11.2.9), то значение Φ^H соответствующей величины Φ на горизонте событий называется *электрическим потенциалом* черной дыры. Покажем, что Φ^H постоянно на горизонте. С этой целью заметим, что условие

$$T_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = 0,$$

которое, согласно (6.2.2), выполняется на поверхности произвольной стационарной черной дыры ($l^\mu = \eta^\mu|_H$), для электромагнитного поля эквивалентно соотношению

$$\left(F_\mu{}^\alpha F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right) l^\mu l^\nu \equiv E^\alpha E_\alpha = 0,$$

т.е. на поверхности горизонта

$$\Phi_{,\mu} = E_\mu = 4\pi\sigma l_\mu,$$

где величина σ в случае керр-ньюменовской черной дыры совпадает с "по-

верхностной плотностью заряда", введенной в гл. 7 [ср. с формулой (7.3.1)]. Отсюда вытекает, что для любого вектора χ^{μ}, касательного к поверхности горизонта, имеет место равенство

$$\chi^{\mu}\Phi^{H}{}_{,\mu} = 0,$$

что означает постоянство электрического потенциала Φ^{H} на горизонте событий*).

Доказанное выше свойство постоянства величин Ω^{H}, κ и Φ^{H} на горизонте событий стационарной черной дыры оказывается существенным при выводе так называемой *массовой формулы*. Эта формула устанавливает связь наблюдаемой на бесконечности массы черной дыры с геометрическими характеристиками поверхности ее горизонта событий. А именно, Бардин и др. (1973) показали, что в стационарном аксиально-симметричном асимптотически плоском пространстве-времени наблюдаемая на бесконечности масса черной дыры M^{∞} может быть записана в следующем виде:

$$M^{\infty} = -\int_{\Sigma} (2T^{\mu}_{\nu} - T\delta^{\mu}_{\nu})\xi^{\nu}_{(t)} d\sigma_{\mu} + 2\Omega^{H} J^{H} + \frac{\kappa}{4\pi} A, \qquad (11.2.30)$$

где Ω^{H} – угловая скорость, J^{H} – угловой момент, κ – поверхностная гравитация, A – площадь поверхности черной дыры, а T^{μ}_{ν} – полный тензор энергии-импульса стационарного аксиально-симметричного распределения вещества и полей вне черной дыры. Интегрирование ведется по пространственноподобной асимптотически плоской поверхности, пересекающей горизонт событий по некоторой двумерной поверхности $\partial\mathcal{B}$. Поверхность выбрана так, что $\xi^{\mu}_{(\varphi)}$ являются касательными к этой поверхности, а на асимптотической бесконечности Σ ортогональна $\xi^{\mu}_{(t)}$.

Доказательство формулы (11.2.30) проводится следующим образом [Бардин и др. (1973)]. Для произвольного векторного поля Киллинга ξ^{μ}

$$\xi_{\mu;\nu} = \xi_{[\mu;\nu]}, \qquad (11.2.31)$$

$$\xi^{\mu;\nu}{}_{;\nu} = -R^{\mu}{}_{\nu}\xi^{\nu}. \qquad (11.2.32)$$

(Последнее из этих соотношений может быть получено сверткой (П.15) по α и β). Выбирая $\xi^{\mu}_{(t)}$ в качестве ξ^{μ}, интегрируя (11.2.32) по поверхности Σ и используя теорему Стокса [см. (П. 33)], имеем

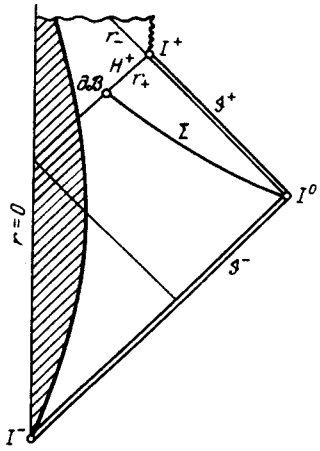
$$\int_{\partial\Sigma} \xi^{\mu;\nu}_{(t)} d\sigma_{\mu\nu} = -\int_{\Sigma} R^{\mu}{}_{\nu}\xi^{\nu}_{(t)} d\sigma_{\mu}, \qquad (11.2.33)$$

где $d\sigma_{\mu\nu}$ и $d\sigma_{\mu}$ – элементы поверхностей $\partial\Sigma$ и Σ соответственно. При описанном выше способе выбора поверхности Σ ее граница $\partial\Sigma$ состоит из

---

*) При описании заряженной вращающейся черной дыры в рамках 5-мерной теории гравитации Калуцы – Клейна величины Ω^{H} и Φ^{H} входят в выражения сходным образом и их свойства в известной мере аналогичны [Блейер и др. (1985)].

Рис. 83. Пространство-время стационарной черной дыры (иллюстрация к выводу массовой формулы)



границы черной дыры $\partial\mathcal{B}$ и двумерной поверхности $\partial\Sigma_\infty$ на пространственной бесконечности (рис. 83).

Покажем, что масса M^∞ черной дыры, измеренная удаленным наблюдателем в асимптотически плоской области по ее воздействию на пробные частицы, дается следующим выражением:

$$M^\infty = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial\Sigma_\infty} \xi^{\mu;\nu}_{(t)} d\sigma_{\mu\nu}. \qquad (11.2.34)$$

Для этого предположим, что вдали от черной дыры покоится пробное тело. Тогда 4-ускорение этого тела равно

$$a^\mu = \frac{\xi^\nu_{(t)} \xi^\mu_{(t);\nu}}{-\xi^\alpha_{(t)} \xi_{(t)\alpha}}. \qquad (11.2.35)$$

Пусть Σ – пространственноподобная поверхность, ортогональная в асимптотической области вектору $u^\mu = \xi^\mu / |\xi_\alpha \xi^\alpha|^{1/2}$ 4-скорости тела. В этой области гравитационное поле является слабым и легко устанавливается связь его инвариантных 4-мерных характеристик с ньютоновским описанием. В частности, вектор $a^\mu \approx u^\nu \xi^\mu_{(t);\nu}$, лежащий в Σ, имеет три существенные компоненты. В ньютоновской теории этот трехмерный вектор характеризует напряженность гравитационного поля и связан с потенциалом φ соотношением $a_i = \varphi_{,i}$. По теореме Гаусса, поток этого вектора через любую замкнутую двумерную поверхность $\partial\Sigma_\infty$ (лежащую в Σ), охватывающую тяготеющее тело, равен $4\pi M^\infty$, где M^∞ – масса тела. Пусть $\tilde{n}^\mu$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Sigma_\infty$, лежащий в Σ. Тогда

$$M^\infty = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial\Sigma_\infty} \xi^{\mu;\nu}_{(t)} \tilde{n}_\mu u_\nu d^2\sigma, \qquad (11.2.36)$$

где $d^2\sigma$ – элемент площади $\partial\Sigma_\infty$. Используя свойство (11.2.31), можно выражение $\tilde{n}_\mu u_\nu d^2\sigma$ заменить на $d\sigma_{\mu\nu} = \tilde{n}_{[\mu} u_{\nu]} d^2\sigma$; при этом соотношение (11.2.36) приводится к виду (11.2.34).

Аналогичным образом можно показать, что полный угловой момент J^∞ системы, измеренный удаленным наблюдателем (например, по эффекту увлечения Ленсе–Тирринга), дается следующим выражением *):

$$J^\infty = -\frac{1}{8\pi} \int\limits_{\partial\Sigma_\infty} \xi^{\mu;\nu}_{(\varphi)} d\sigma_{\mu\nu}. \qquad (11.2.37)$$

*) В справедливости формул (11.2.34) и (11.2.37) для массы M и углового момента J можно убедиться непосредственной проверкой, если учесть, что вдали от тяго-

Используя соотношение (11.2.33) и аналогичное соотношение для $\xi^{\mu}_{(\varphi)}$, можно с учетом (11.2.34) и (11.2.37) получить

$$M^{\infty} = -\int_{\Sigma} (2T^{\mu}_{\nu} - T^{\alpha}_{\alpha}\delta^{\mu}_{\nu})\xi^{\nu}_{(t)} d\sigma_{\mu} + M^{H}, \tag{11.2.38}$$

$$J^{\infty} = \int_{\Sigma} T^{\mu}_{\nu}\xi^{\mu}_{(\varphi)} d\sigma_{\mu} + J^{H}, \tag{11.2.39}$$

где интегралы в правых частях описывают вклад вещества и полей вне черной дыры в полные массу M^{∞} и угловой момент J^{∞} системы, а

$$M^{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{B}} \xi^{\mu;\nu}_{(t)} d\sigma_{\mu\nu} \tag{11.2.40}$$

и

$$J^{H} = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{B}} \xi^{\mu;\nu}_{(\varphi)} d\sigma_{\mu\nu} \tag{11.2.41}$$

– вклады в M^{∞} и J^{∞} массы и углового момента самой черной дыры *).

Выражение для M^{H} можно преобразовать следующим образом. Выразим $\xi^{\mu}_{(t)}$ с помощью (11.2.9) через η^{μ} и $\xi^{\mu}_{(\varphi)}$. Тогда имеем

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \xi^{\mu;\nu}_{(t)} d\sigma_{\mu\nu} = 8\pi J^{H}\Omega^{H} + \int_{\partial\mathcal{B}} l^{\mu;\nu} d\sigma_{\mu\nu}, \tag{11.2.42}$$

где $l^{\mu} = \eta^{\mu}|_{H}$. Если векторы m^{μ} и $\bar{m}^{\mu}$ введенной выше комплексной световой тетрады лежат в плоскости, касательной к $\partial\mathcal{B}$, то $d\sigma_{\mu\nu} = l_{[\mu} n_{\nu]} dA$, где dA – элемент площади двумерной поверхности $\partial\mathcal{B}$. Используя определение (11.2.11) поверхностной гравитации κ и ее постоянство, интеграл в правой части (11.2.42) можно записать в виде $\int_{\partial\mathcal{B}} l^{\mu;\nu} d\sigma_{\mu\nu} = \kappa A$, где $A = \int_{\partial\mathcal{B}} dA$ – полная площадь поверхности черной дыры. Используя это равенство и подставляя (11.2.42) в (11.2.38), получаем массовую формулу (11.2.30).

теющего вращающегося тела метрика может быть записана в следующем виде:

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r} + O(r^{-2})\right]dt^2 - \left[\frac{4J}{r}\sin^2\theta + O(r^{-2})\right]dt\,d\varphi +$$
$$+ (1 + O(r^{-1}))[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)].$$

*) Подчеркнем, что используемое нами значение (П.28) для элемента поверхности $d\sigma_{\mu\nu}$ согласуется с принятым в работах Бардина, Картера, Хокинга (1973) и Картера (1973а) и вдвое меньше принятого в работах Картера (1979) и Дамура (1982). Отметим также, что ориентация $d\sigma_{\mu\nu}$ на поверхностях $\partial\Sigma_{\infty}$ и $\partial\mathcal{B}$ выбрана таким образом, что

$$\int_{\partial\Sigma} \varphi^{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu} = \int_{\partial\Sigma_{\infty}} \varphi^{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu} - \int_{\partial\mathcal{B}} \varphi^{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu}.$$

Напомним, что в этой формуле T_ν^μ – полный тензор энергии-импульса вещества и полей вне черной дыры. При наличии электромагнитного поля он складывается из двух частей: $T_\nu^{(m)\mu}$ – тензора энергии-импульса вещества и $T_\nu^{(em)\mu}$ – тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Используя выражение (П.48) для $T_\nu^{(em)\mu}$, формулу (11.2.30) можно преобразовать к следующему виду [Картер (1973а, 1979)]:

$$M^\infty = -\int_\Sigma (2T_\nu^{(m)\mu} - T_\alpha^{(m)\alpha}\delta_\nu^\mu)\xi_{(t)}^\nu d\sigma_\mu + \widetilde{M}^H + M_{\text{ext}}^{(em)}, \tag{11.2.43}$$

где $M_{\text{ext}}^{(em)}$ – вклад в полную массу, связанный с наличием вне черной дыры тока j^μ:

$$M_{\text{ext}}^{(em)} = \int_\Sigma [-2\xi_{(t)}^\nu A_\nu j^\mu + j^\nu A_\nu \xi_{(t)}^\mu] d\sigma_\mu, \tag{11.2.44}$$

$\widetilde{M}^H$ – масса черной дыры с учетом энергии ее электромагнитного поля:

$$\widetilde{M}^H = 2\Omega^H \widetilde{J}^H + \Phi^H Q + \frac{\kappa}{8\pi}A. \tag{11.2.45}$$

Здесь

$$\widetilde{J}^H = J^H + J^{(em)H}, \tag{11.2.46}$$

$$J^{(em)H} = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\mathcal{B}} \xi_{(\varphi)}^\alpha A_\alpha F^{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu}, \tag{11.2.47}$$

а $Q = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\mathcal{B}} F^{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu}$ – электрический заряд черной дыры.

В приведенных формулах A_μ – вектор-потенциал электромагнитного поля, убывающий на бесконечности и удовлетворяющий соотношениям $\mathcal{L}_{\xi_{(t)}} A_\mu = \mathcal{L}_{\xi_{(\varphi)}} A_\mu = 0$ *). В отсутствие вещества и токов вне черной дыры ее масса M^∞ совпадает с $\widetilde{M}^H$. Соотношение (11.2.45) для изолированной черной дыры было получено Смарром (1973а).

Интегральная массовая формула (11.2.30) позволяет найти разность масс δM^∞ для двух слегка отличных друг от друга статических или стационарных аксиально-симметричных конфигураций, содержащих черную дыру. Обозначим соответствующую вариацию метрики δg_μ и фиксируем калибровочный произвол $\delta g_{\mu\nu} \to \delta g_{\mu\nu} + \delta x_{\mu;\nu}$ (имеющийся в выборе этой величины) так, что $\delta\xi_{(t)}^\mu = \delta\xi_{(\varphi)}^\mu = 0$, а положение горизонта событий остается неизменным. Тогда общее выражение для вариации массы

*) В существовании калибровки, в которой выполняются эти соотношения, можно убедиться, если использовать условия $\mathcal{L}_{\xi_{(t)}} F_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\xi_{(\varphi)}} F_{\mu\nu} = 0$ стационарности и аксиальной симметрии поля $F_{\mu\nu}$.

записывается следующим образом:

$$\delta M^{\infty} = \Omega^H \delta J^H + \frac{\kappa}{8\pi}\delta A - \delta \int_{\Sigma} T^{\mu}_{\nu} \xi^{\nu}_{(t)} d\sigma_{\mu} - \frac{1}{2}\int_{\Sigma} T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\xi^{\alpha}_{(t)} d\sigma_{\alpha}. \tag{11.2.48}$$

Если вне черной дыры нет вещества и полей, то последние два члена в этой формуле отсутствуют и она совпадает с соотношением (11.1.3) для керровской ($Q = 0$) черной дыры.

Приведем явное выражение для изменения δM^{∞} полной массы системы в случае, когда вне черной дыры вращается с локальной угловой скоростью Ω идеальная жидкость, описываемая тензором энергии-импульса $T^{(m)\mu}_{\nu}$, а система как до, так и после изменения ее параметров стационарна и аксиально-симметрична [Картер (1973а), Дамур (1982)]:

$$\delta M^{\infty} = \Omega^H \delta \tilde{J}^H + \Phi^H \delta Q + \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \delta q, \tag{11.2.49}$$

где

$$\delta q = \int \Omega \delta(d^3 J^{(m)} + \xi^{\alpha}_{(\varphi)} A_{\alpha} d^3 Q) - \int (\xi^{\alpha}_{(t)} + \Omega \xi^{\alpha}_{(\varphi)}) A_{\alpha} \delta(d^3 Q) +$$

$$+ \int \bar{T} \delta(d^3 S^{(m)}) + \int \bar{\mu} \delta(d^3 N). \tag{11.2.50}$$

Здесь $d^3 J^{(m)} = T^{(m)\mu}_{\nu} \xi^{\nu}_{(\varphi)} d\sigma_{\mu}$ – элемент локального углового момента вещества, $d^3 Q = j^{\mu} d\sigma_{\mu}$ – локальное распределение заряда, j^{μ} – электрический ток, $\bar{T} = [-(\xi_{(t)} + \Omega \xi_{(\varphi)})^2]^{1/2} T$, T – локальная температура, $d^3 S^{(m)}$ – локальное распределение энтропии вещества, $\bar{\mu} = \mu \bar{T}/T$, μ – локальный химический потенциал и $d^3 N$ – локальное распределение числа частиц.

Приведенные в этом параграфе интегральное и дифференциальное выражения для массовой формулы оказываются удобными при изучении многочисленных вопросов, связанных с процессами, приводящими к изменению параметров черной дыры. Они также относятся к числу основных соотношений, используемых при описании аналогов начал термодинамики в физике черных дыр. К рассмотрению этого вопроса мы теперь переходим.

§ 11.3. Четыре закона физики черных дыр

Согласно термодинамической аналогии в физике черных дыр следующие величины:

$$\theta = \frac{\hbar\kappa}{2\pi k c}, \quad S^H = \frac{A}{4 l_{\mathrm{Pl}}^2}, \quad E = Mc^2 \tag{11.3.1}$$

(κ – поверхностная гравитация, A – площадь и $M \equiv M^{\infty}$ – масса черной дыры) выполняют роль соответственно температуры, энтропии и внутренней энергии черной дыры. В термодинамике равновесие невозможно, если температура разных частей системы различна. Наличие состояния термо-