

существенно влияют на метрику. Они будут рассмотрены в следующих параграфах.

Наконец, в очень больших временных масштабах на метрику влияет процесс хокинговского испарения черных дыр.

### § 12.2. Неустойчивость горизонтов Коши внутри заряженной сферической черной дыры

Рассмотрим поведение малых возмущений гравитационного и электромагнитного полей внутри заряженной сферически-симметричной черной дыры.

Качественно новым обстоятельством по сравнению с черной дырой Шварцшильда является здесь наличие горизонтов Коши (см. § 6.5). На рис. 84 изображен фрагмент диаграммы Пенроуза с внутренней частью (область II) заряженной черной дыры и внешним пространством I. Если заряженная черная дыра образуется в результате коллапса заряженного тела из пространства I, то другое внешнее пространство (I' на рис. 67) отсутствует, как и в случае коллапса незаряженного сферического тела, превращающегося в черную дыру Шварцшильда (см. § 2.7). Поэтому область I' на рис. 84 не показана. Есть веские основания считать (см. § 6.5), что малые возмущения могут неограниченно нарастать в окрестности  $r_{-1}$  [Пенроуз (1968)].

Действительно, рассмотрим малое возмущение гравитационного и (или) электромагнитного поля вне черной дыры в области I. Как мы уже показали в §§ 3.4 и 4.7, "хвосты" излучения от него будут затухать во времени по степенному закону при  $r = \text{const}$  из-за рассеяния на кривизне пространства-времени. Такой затухающий поток излучения будет пересекать горизонт событий  $r_+$  и концентрироваться вдоль горизонта  $r_{-1}$  (см. рис. 84). Наблюдатель, движущийся по времениподобной мировой линии и пересекающий горизонт  $r_{-1}$ , за конечное собственное время увидит это излучения вблизи  $r_{-1}$  (оно попадает в черную дыру за бесконечное время внешнего наблюдателя). При этом, когда наблюдатель приближается к  $r_{-1}$ , воспринимаемое им излучение имеет бесконечное голубое смещение. Естественно ожидать, что такая концентрация энергии приведет к перестройке пространства-времени и к возникновению вместо  $r_{-1}$  истинной сингулярности пространства-времени. В то же время вдоль горизонта  $r_{-2}$  (за исключением точки D) никакой концентрации энергии не возникает, и поэтому не следует ожидать "рождения" сингулярности у  $r_{-2}$  от возмущений, возникающих в области I.

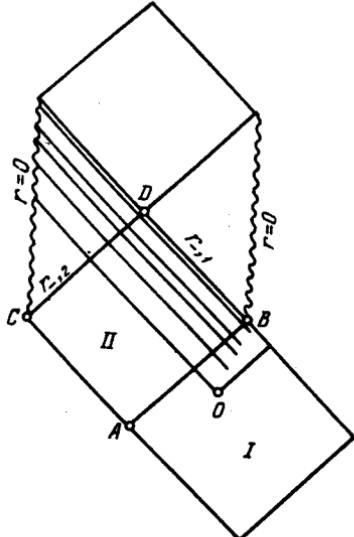


Рис. 84. Часть диаграммы Пенроуза для заряженной черной дыры с изображением распространения радиальных лучей непосредственно от вспышки ( $O$ ) и после рассеяния на кривизне пространства-времени

Мы увидим, что математический анализ эволюции малых возмущений подтверждает эти интуитивные соображения.

Данная задача была проанализирована Макнамарой (1978 а, б), Гурселом и др. (1979 а, б), Метцнером и др. (1979), Чандрасекаром и Хартлем (1982). Мы будем следовать последней работе.

Метрика заряженной черной дыры имеет вид

$$ds^2 = \frac{-(r - r_+)(r - r_-)}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{(r - r_+)(r - r_-)} dr^2 + \\ + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (12.2.1)$$

Нас интересует область пространства-времени  $r_- < r < r_+$ . В работах Чандрасекара (1979б, 1983) и Чандрасекара и Ксантопулоса (1979) было показано, что возмущения гравитационного и электромагнитного полей заряженной черной дыры Рейсснера – Нордстрема могут быть проанализированы в терминах нормальных мод с зависимостью от времени в виде  $e^{i\omega t}$  и угловой зависимостью, описываемой соответствующими функциями Лежандра с фиксированными  $l$  и  $m$ . Возмущения разделяются на два класса: аксиальные (индекс (+) вверху) и полярные (индекс (-) вверху). Возмущение каждого класса может быть выражено через пару калибровочно инвариантных (в том смысле, как это описано в § 3.1) скалярных функций  $Z_i^{(\pm)}(r)$  ( $i = 1, 2$ ), удовлетворяющих уравнению

$$\frac{d^2 Z_i^{(\pm)}}{dr_*^2} + \sigma^2 Z_i^{(\pm)} = V_i^{(\pm)} Z_i^{(\pm)}, \quad (12.2.2)$$

где

$$r_* = r + \frac{1}{2K_+} \ln |r_+ - r| - \frac{1}{2K_-} \ln |r_- - r|, \quad (12.2.3)$$

$$K_+ = \frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}, \quad K_- = \frac{r_+ - r_-}{2r_-^2}, \quad (12.2.4)$$

$$V_i^{(-)} = \frac{\Delta}{r^5} \left[ (\mu^2 + 2)r - q_j + \frac{4Q^2}{r} \right], \quad (12.2.5)$$

$$V_i^{(+)} = V_i^{(-)} + 2q_j \frac{d}{dr_*} \frac{\Delta}{r^2(\mu^2 r + q_j)}, \quad (12.2.6)$$

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-) = r^2 - 2Mr + Q^2, \quad \mu^2 = (l - 1)(l + 2), \quad (12.2.7)$$

$$q_1 = 3M + \sqrt{(9M^2 + 4Q^2)\mu^2}, \quad q_2 = 3M - \sqrt{(9M^2 + 4Q^2)\mu^2} \quad (12.2.8)$$

(в формулах (12.2.5), (12.2.6)  $i, j = 1, 2; i \neq j$ ). Оказывается, что  $Z_i^{(+)}$  связано с  $Z_i^{(-)}$  простым алгебраическим соотношением.

Уравнения типа (12.2.2) уже встречались нам в задаче о поведении физических полей вне черной дыры (см. гл. 3). Нас интересует решение этих уравнений, описывающее прохождение и отражение падающей на  $V_i^{(\pm)}$  волны. (В данном случае  $V_i^{(\pm)}$  является потенциальной ямой, а не барьером, как это было для внешнего пространства черной дыры, но качествен-

но это не меняет дела.) Оказывается, что коэффициенты отражения и прохождения для  $Z_i^{(+)}$  просто выражаются через соответствующие коэффициенты для  $Z_i^{(-)}$ .

Исследуем поведение волновых возмущений, входящих в область II через горизонт  $r_+$  из области I (см. рис. 84). Для этой цели рассмотрим дисперсию волны, имеющей единичную амплитуду на  $r = r_+$  ( $r_* \rightarrow -\infty$ ). Решение уравнений (12.2.2) должно удовлетворять следующим граничным условиям (мы опускаем верхние и нижние индексы, так как анализ спрведлив для всех их значений):

$$Z(r_*, \sigma) \rightarrow A(\sigma) e^{-i\sigma r_*} + B(\sigma) e^{+i\sigma r_*} \quad (r_* \rightarrow +\infty, \quad r \rightarrow r_-), \quad (12.2.10a)$$

$$Z(r_*, \sigma) \rightarrow e^{-i\sigma r_*} \quad (r_* \rightarrow -\infty, \quad r \rightarrow r_+). \quad (12.2.10b)$$

Коэффициенты  $A(\sigma)$  и  $B(\sigma)$ , описывающие прохождение и отражение волны через  $V(r_*)$ , могут быть в принципе найдены стандартными методами, если известен вид  $V(r_*)$  [см. (12.2.5), (12.2.6)]. Удобно ввести для анализа нулевые (световые) координаты:

$$\tilde{u} = r_* + t, \quad \tilde{v} = r_* - t. \quad (12.2.11)$$

Если нанести на рис. 84 линии постоянного  $\tilde{u}$  (мы не делали этого, чтобы не загромождать чертеж), то они изобразятся отрезками прямых, параллельными  $r_+$ . Линии постоянного  $\tilde{v}$  (также не показанные на рисунке) являются отрезками прямых, параллельными  $r_{-,1}$ . Горизонту  $r_+$  соответствует  $\tilde{u} = -\infty$ , горизонту  $r_{-,1} - \tilde{v} = \infty$ , а  $r_{-,2} - \tilde{u} = +\infty$ . Граничные условия (12.2.10) переписываются в виде

$$Z(r_*, t) \rightarrow e^{-i\sigma \tilde{v}} + [A(\sigma) - 1] e^{-i\sigma \tilde{v}} + B(\sigma) e^{+i\sigma \tilde{u}} \quad (r_* \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow r_-), \quad (12.2.12)$$

$$Z(r_*, t) \rightarrow e^{-i\sigma \tilde{v}} \quad (r_* \rightarrow -\infty, \quad r \rightarrow r_+). \quad (12.2.13)$$

Рассмотрим возмущение  $Z_{\text{возм}}(\tilde{v})$ , пересекающее горизонт  $r_+$ , т.е. заданное при  $u \rightarrow -\infty$ . Его фурье-образ есть

$$\tilde{Z}(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_{\text{возм}}(\tilde{v}) e^{i\sigma \tilde{v}} d\tilde{v}. \quad (12.2.14)$$

После дисперсии в области II возмущение достигнет горизонта  $r_-$ . Там его амплитуда может быть записана в виде [см. (12.2.12)]

$$Z_{\text{пacc}}(r_*, t) \rightarrow X(\tilde{v}) + Y(\tilde{u}) \quad (r_* \rightarrow \infty), \quad (12.2.15)$$

где

$$X(\tilde{v}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Z}(\sigma) [A(\sigma) - 1] e^{-i\sigma \tilde{v}} d\sigma, \quad (12.2.16)$$

$$Y(\tilde{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Z}(\sigma) B(\sigma) e^{+i\sigma \tilde{u}} d\sigma. \quad (12.2.17)$$

Нас интересует поток излучения, воспринимаемый наблюдателем, пересекающим горизонт  $r_-$ . Этот поток пропорционален квадрату амплитуды

$$F = u^\alpha Z_{,\alpha} \Big|_{r \rightarrow r_-}, \quad (12.2.18)$$

где  $u^\alpha$  — четырехмерная скорость наблюдателя. В зависимости от того, будет ли поток конечным или бесконечным, горизонт  $r_-$  будет устойчив или неустойчив (в линейном приближении) относительно малых возмущений.

Метцнер и др. (1979) и Чандрасекар (1983) показали, что на горизонте Коши величина  $F$  записывается в виде:

на  $r_{-,1}$

$$F_{r_{-,1}} = \frac{2r_-^2}{r_+ - r_-} |E| \lim_{\tilde{v} \rightarrow \infty} e^{K - \tilde{v}} X_{,-\tilde{v}}; \quad (12.2.19)$$

на  $r_{-,2}$

$$F_{r_{-,2}} = -\frac{2r_-^2}{r_+ - r_-} E \lim_{\tilde{u} \rightarrow \infty} e^{K - \tilde{u}} Y_{,\tilde{u}}, \quad (12.2.20)$$

где  $E$  — постоянная временная компонента ковариантной 4-скорости  $u_\alpha$  наблюдателя. Расходимость (или конечность) выражений (12.2.19) и (12.2.20) зависит соответственно от поведения

$$e^{K - \tilde{v}} X_{,-\tilde{v}} \Big|_{\tilde{v} \rightarrow \infty} \quad \text{и} \quad e^{K - \tilde{u}} Y_{,\tilde{u}} \Big|_{\tilde{u} \rightarrow \infty}.$$

Будем предполагать, что форма возмущающего излучения  $Z_{\text{возм}}(\tilde{v})$ , пересекающего горизонт  $r_+$ , удовлетворяет следующим условиям:  $Z_{\text{возм}}(\tilde{v}) = 0$  при  $\tilde{v} < \tilde{v}_0$  и  $Z_{\text{возм}}(\tilde{v})$  при  $\tilde{v} \rightarrow \infty$  стремится к нулю по крайней мере как  $\tilde{v}^{-1}$ . Именно этим условиям и должно удовлетворять любое реальное излучение от, например, падающего в дыру объекта или какого-либо элементарного возмущения, произошедшего в области I. Действительно, вто-ре условие должно выполняться согласно исследованной нами в предыду-щем параграфе асимптотики возмущающего излучения при  $\tilde{v} \rightarrow \infty$  на гори-зонте незаряженной черной дыры. Наличие заряда  $Q < M$  ничего не меняет в этом отношении [см., например, Бичак (1972)]. Степенное затухание "хвостов" излучения от возмущений типично практически для любого возмущения.

Первое условие заведомо выполняется, если под  $\tilde{v}_0$  понимать значение аффинного параметра, соответствующего моменту, когда горизонт пересекает первый, дошедший до него луч от возмущения\*).

В работе Чандрасекара и Хартля (1982) показано, что для решений урав-нения (12.2.2) с любыми индексами ( $\pm$ ) величина  $F_{r_{-,2}}$  (12.2.20) остает-ся конечной, т.е. горизонт  $r_{-,2}$  устойчив относительно малых возмущений в области I. Напротив, величина  $F_{r_{-,1}}$  расходится при  $\tilde{v} \rightarrow \infty$  по крайней мере как  $e^{(K_- - K_+) \tilde{v}}$  или еще быстрее (скорость расходимости зависит от характера возмущения). Это означает, что с приближением к  $r_{-,1}$  наблюдатель видит бесконечную плотность потока излучения.

Изложенный математический анализ полностью подтвердил интуитив-ные соображения Пенроуза, приведенные в начале параграфа. Заметим, что

\*). При рассмотрении не "вечной" черной дыры, т.е. дыры, возникающей в резуль-тате коллапса, достаточно малые  $\tilde{v}$  нас вообще не интересуют.

дисперсия волн от любого возмущения, возникшего в области II, не ведет, очевидно, к концентрации энергии вдоль  $r_{-,1}$  и, следовательно, к неустойчивости горизонтов Коши. Бесконечная концентрация энергии вблизи  $r_{-,1}$  от возмущений в области I должна влиять на метрику, перестраивая структуру пространства-времени. Поэтому вблизи  $r_{-,1}$  метод малых возмущений уже неприменим. Можно только высказать догадку, что вместо горизонта Коши будет формироваться истинная сингулярность пространства-времени.

Сделаем еще одно замечание. Пусть вне черной дыры имеются источники постоянного внешнего поля — электромагнитного гравитационного или какого-либо другого. В случае заряженной черной дыры эти поля проникают через  $r_+$  во внутреннюю область, как и в случае незаряженной шварцшильдовской черной дыры (см. § 12.1). Если при этом вне черной дыры поля слабы и не влияют на метрику, то и внутри черной дыры они остаются слабыми. В частности, они слабы на  $r_-$  и не ведут к каким-либо неустойчивостям [обоснование этого утверждения см. Гурсел и др. (1979b)].

### § 12.3. Неустойчивость горизонтов Коши

#### относительно квантовоэлектродинамических процессов

В предыдущем параграфе мы рассмотрели неустойчивость горизонта Коши относительно малых внешних возмущений. Однако метод малых возмущений, которым мы пользовались, не может дать ответ на вопрос о том, как перестроится метрика под влиянием нарастающих малых возмущений и возникнет ли при этом истинная сингулярность пространства-времени.

В данном параграфе мы рассмотрим квантовые электродинамические процессы, возникающие внутри заряженной невращающейся черной дыры, которых мы не касались при анализе внутренней структуры. Будет показано, что эти процессы, приводящие к рождению электрон-позитронных пар, создают неустойчивость горизонта Коши и перестраивают структуру пространства-времени. При этом удается построить самосогласованное решение, учитывающее влияние рожденных частиц на электромагнитное поле и метрику, и в рамках этого решения показать, как изменяется метрика и что вместо горизонта Коши действительно возникает истинная сингулярность пространства-времени. Данная задача решена в работе Новикова и Старобинского (1980\*), который мы следуем в дальнейшем [см. также Березин (1980\*)].

Рассмотрим ограничения, которые накладываются на физические условия внутри черной дыры с разными  $M$  и  $Q$  (рис. 85). Во-первых, черная дыра образуется только при  $Q < \sqrt{G}M$  (или  $Q/e < 5 \cdot 10^5 M(g)$ , где  $e$  — заряд электрона), т.е. для параметров ниже линии 1 на рис. 85. Если заряд черной дыры достаточно велик, то вблизи нее происходит рождение электрон-позитронных пар [Марков, Фролов (1970\*), Гиббонс (1975), Дамур, Руффини (1975)]. Одна частица уходит на бесконечность, вторая (противоположного по отношению к черной дыре заряда) — поглощается черной дырой, уменьшая ее заряд \*), причем, как можно показать, за вре-

\*.) Мы рассматриваем здесь черные дыры с  $r_+ > \lambda$ , где  $\lambda = h/mc$  — комптоновская длина волны электрона [противоположный случай см. Пэйдж (1977)].