

дисперсия волн от любого возмущения, возникшего в области II, не ведет, очевидно, к концентрации энергии вдоль $r_{-,1}$ и, следовательно, к неустойчивости горизонтов Коши. Бесконечная концентрация энергии вблизи $r_{-,1}$ от возмущений в области I должна влиять на метрику, перестраивая структуру пространства-времени. Поэтому вблизи $r_{-,1}$ метод малых возмущений уже неприменим. Можно только высказать догадку, что вместо горизонта Коши будет формироваться истинная сингулярность пространства-времени.

Сделаем еще одно замечание. Пусть вне черной дыры имеются источники постоянного внешнего поля — электромагнитного гравитационного или какого-либо другого. В случае заряженной черной дыры эти поля проникают через r_+ во внутреннюю область, как и в случае незаряженной шварцшильдовской черной дыры (см. § 12.1). Если при этом вне черной дыры поля слабы и не влияют на метрику, то и внутри черной дыры они остаются слабыми. В частности, они слабы на r_- и не ведут к каким-либо неустойчивостям [обоснование этого утверждения см. Гурсел и др. (1979b)].

§ 12.3. Неустойчивость горизонтов Коши

относительно квантовоэлектродинамических процессов

В предыдущем параграфе мы рассмотрели неустойчивость горизонта Коши относительно малых внешних возмущений. Однако метод малых возмущений, которым мы пользовались, не может дать ответ на вопрос о том, как перестроится метрика под влиянием нарастающих малых возмущений и возникнет ли при этом истинная сингулярность пространства-времени.

В данном параграфе мы рассмотрим квантовые электродинамические процессы, возникающие внутри заряженной невращающейся черной дыры, которых мы не касались при анализе внутренней структуры. Будет показано, что эти процессы, приводящие к рождению электрон-позитронных пар, создают неустойчивость горизонта Коши и перестраивают структуру пространства-времени. При этом удается построить самосогласованное решение, учитывающее влияние рожденных частиц на электромагнитное поле и метрику, и в рамках этого решения показать, как изменяется метрика и что вместо горизонта Коши действительно возникает истинная сингулярность пространства-времени. Данная задача решена в работе Новикова и Старобинского (1980*), который мы следуем в дальнейшем [см. также Березин (1980*)].

Рассмотрим ограничения, которые накладываются на физические условия внутри черной дыры с разными M и Q (рис. 85). Во-первых, черная дыра образуется только при $Q < \sqrt{G}M$ (или $Q/e < 5 \cdot 10^5 M(g)$, где e — заряд электрона), т.е. для параметров ниже линии 1 на рис. 85. Если заряд черной дыры достаточно велик, то вблизи нее происходит рождение электрон-позитронных пар [Марков, Фролов (1970*), Гиббонс (1975), Дамур, Руффини (1975)]. Одна частица уходит на бесконечность, вторая (противоположного по отношению к черной дыре заряда) — поглощается черной дырой, уменьшая ее заряд *), причем, как можно показать, за вре-

*.) Мы рассматриваем здесь черные дыры с $r_+ > \lambda$, где $\lambda = h/mc$ — комптоновская длина волны электрона [противоположный случай см. Пэйдж (1977)].

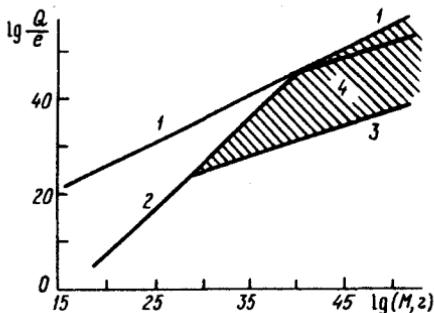


Рис. 85. Различные области значений заряда черной дыры Q и ее массы M (о границах областей см. текст)

мя r_+/c (т.е. очень быстро) он уменьшается до величины

$$Q_2 = \frac{\pi m^2 r_+^2 c^3}{e\hbar} (\ln A - \ln \ln A)^{-1}, \quad (12.3.1)$$

где $A = e^2 (2\pi\hbar c)^{-1} (r_+/\lambda)^2$, e – заряд электрона, m – его масса. В дальнейшем заряд черной дыры остается практически постоянным.

На рис. 85 цифрой 2 обозначена линия, соответствующая уравнению (12.3.1). Область возможных значений параметров черной дыры лежит вправо и ниже линий 1 и 2.

Заметим, что при достаточно малом заряде черной дыры горизонт Коши лежит настолько близко к истинной сингулярности, что кривизна пространства-времени здесь больше критического значения, при котором существенны квантовогравитационные эффекты. Всю эту область с физической точки зрения следует считать сингулярной. Несингулярный горизонт Коши существует только в том случае, если он лежит вне этой области. Инвариант кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет размерность (длина)⁻⁴. Граница сингулярной области определяется условием $R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{l_{Pl}^4}$. Для метрики Рейсснера – Нордстрема условие принадлежности r_- границе сингулярной области определяется выражением (для $r_- \ll r_+$)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} \Big|_{r=r_-} \approx \frac{12r_+^2}{r_-^6} = \frac{1}{l_{Pl}^4} \quad (12.3.2)$$

или

$$\frac{Q_3}{e} \approx G^{1/3} (\hbar c)^{1/6} \frac{M^{2/3}}{e} \approx 3 \cdot 10^4 M^{2/3} (\text{г}) \quad (12.3.3)$$

(линия 3 на рис. 85). На этой границе $r_- \gg l_{Pl}$. Если параметры черной дыры лежат правее и ниже линии 3, то несингулярного горизонта Коши не существует. (В естественных астрофизических условиях, когда выполняются соотношения, приведенные в начале § 4.8, для черных дыр с массой $M < 10^{60}$ г заведомо $Q < Q_3$ и в них не может быть несингулярного горизонта Коши.)

Нам остается рассмотреть область, заштрихованную на рис. 85. Для значений параметров, попавших в эту область, оказываются существенными квантовоэлектродинамические процессы внутри заряженной черной дыры.

Введем в области II метрики Рейсснера – Нордстрема следующую систему отсчета, аналогичную (2.4.9):

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(r(\tau))dx^2 + r^2(\tau)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (12.3.4)$$

где

$$\tau = - \int_{r_-}^r dr \frac{r}{[(r_+ - r)(r - r_-)]^{1/2}}, \quad (12.3.5)$$

$$a(r) = \frac{[(r_+ - r)(r - r_-)]^{1/2}}{r}. \quad (12.3.6)$$

Бывшая (при $r > r_+$) координата t теперь пространственноподобна. Обозначим ее через x ($x \equiv t$). Зависимость $a = a(\tau)$ и $r = r(\tau)$ определяется соотношениями (12.3.5) и (12.3.6). Система отсчета с метрикой (12.3.4) обладает однородным (но анизотропным!) трехмерным пространством и поэтому особенно удобна для расчетов. По координате x трехмерное пространство бесконечно ($-\infty < x < +\infty$). Такая система отсчета существует конечное собственное время. Ее эволюция начинается с момента, соответствующего значению $r = r_+$, когда начинается расширение в направлении x , описываемое $a(\tau)$. В начале расширения $a = 0$. Здесь (на $r = r_+$) имеется фиктивная (координатная) сингулярность. В трансверсальных направлениях поперечные сечения нашей системы отсчета представляют собой сферы радиуса $r(\tau)$. С течением τ происходит монотонное сжатие сфер от начального значения $r = r_+$. Расширение по x -координате с течением τ сменяется сжатием, и при $r = r_-$ величина a снова обращается в нуль, т.е. мы снова встречаемся с координатной сингулярностью. Радиус сфер в этот момент есть $r = r_-$.

В рассматриваемой системе отсчета электромагнитное поле является чисто электрическим (отлична от нуля компонента $F_{\tau x}$ электромагнитного тензора), оно направлено вдоль x и не зависит от x . С ростом τ напряженность этого поля увеличивается обратно пропорционально r^2 . Если это поле достаточно сильно, то в нем происходит рождение электрон-позитронных пар. Частицы, родившиеся в области II, не могут уйти из черной дыры, так как ее граница r_+ лежит в абсолютном прошлом. Поэтому они никак не влияют на свойства внешнего пространства I, но могут существенно менять ситуацию внутри черной дыры. Мы покажем, что рождающиеся частицы своим тяготением изменяют метрику в области II, что ведет к возникновению истинной сингулярности вместо горизонтов Коши.

Рассмотрим этот процесс подробнее. Выделим на рис. 85 значения параметров, где в области II ($r_- < r < r_+$) электрическое поле достигает значений $E_{cr} = \pi m^2 c^3 / e \hbar$, при которых происходит быстрое рождение электрон-позитронных пар. Напишем условие того, что электрическое поле $E = Q/r^2$ принимает критическое значение на горизонте r_- : $Q/r_-^2 = E_{cr}$. Это соотношение можно переписать в виде (считаем $Q < \sqrt{GM}$, $c = 1$)

$$\frac{Q}{e} = \left(\frac{4}{\pi} \frac{\hbar M^2}{m^2 e^2} \right)^{1/3} \approx 6 \cdot 10^{18} M^{2/3} (\text{г}) \quad (12.3.7)$$

(линия 4 на рис. 85). Условие $E > E_{\text{cr}}$ для области II выполняется при значении параметров между линиями 2, 3, 4. В рассматриваемой области $Q \ll \sqrt{G}M$, т.е. $r_- \ll r_+$. В этом случае ($r_- \ll r \ll r_+$) эволюция системы (12.3.4) происходит по закону

$$r(\tau) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} r_+^{1/3} |\tau|^{2/3}, \quad a(\tau) = \left(\frac{r_+}{r}\right)^{1/2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \left|\frac{r_+}{\tau}\right|^{1/3}. \quad (12.3.8)$$

Электрическое поле на этой стадии еще не влияет на эволюцию метрики (она такая же, как при $Q = 0$, $r_- = 0$). Если бы решение (12.3.8) продолжалось до $\tau = 0$ (как это имеет место при $Q \equiv 0, E \equiv 0$), то оно приводило бы к истинной сингулярности $\tau = 0$. Электрическое поле меняется как $E = Q/r^2$ в ходе сжатия системы и в нашем случае достигает значения E_{cr} на стадии (12.3.8), после чего начинается быстрое рождение пар e^\pm , которые разгоняются электрическим полем и создают ток. Этот ток существенным образом начинает обратно влиять на электрическое поле. Без такого влияния оно стало бы больше E_{cr} и в конце концов изменило бы вид (12.3.8) при r , сравнимом с r_- , приводя к фиктивной сингулярности на горизонте Коши.

В работе Новикова и Старобинского (1980*) показано, что поле E в области II не может быть заметно больше E_{cr} . В противном случае возникающий, вследствие рождения пар, ток за короткое время $\tau_0 \approx 10^{-18} - 10^{-20}$ с снизил бы поле E до значения E_{cr} . Интересно отметить, что уменьшение величины поля происходит не монотонно, а путем колебаний с изменением знака поля и направления тока. Механизмом релаксации колебаний являются радиационные потери частиц и плазменные неустойчивости.

Итак, пока характерное время увеличения поля при сжатии системы (без эффекта рождающихся частиц) больше времени релаксации ($|\tau| > \tau_0$), электрическое поле не может сильно превышать E_{cr} . Вследствие этого электрическое поле не влияет на метрику. Не влияет на нее и тяготение родившихся частиц. Действительно, плотность энергии рожденных частиц, когда они движутся под действием поля вдоль оси x , растет пропорционально $a^{-2} r^{-2} \sim |\tau|^{-2/3}$, а после релаксации – пропорционально $(ar^2)^{-4/3} \sim |\tau|^{-4/3}$. В то же время кривизна пространства-времени растет быстрее ($\sim 1/|\tau|^2$).

Когда в ходе эволюции системы станет $|\tau| < \tau_0$, рождение частиц и их движение уже не успевают существенно влиять на электрическое поле. Поэтому при $|\tau| < \tau_0$ электрическое поле растет пропорционально r^{-2} :

$$E \approx E_{\text{cr}} (\tau_0 / |\tau|)^{4/3}. \quad (12.3.9)$$

Поле начнет влиять на метрику, когда величина $8\pi G T_0^0$ (T_0^0 – компонента тензора энергии-импульса электрического поля) станет по порядку величины равной старшим членам в уравнении Эйнштейна, описывающим кривизну пространства-времени. Эти члены порядка $1/\tau^2$. Приравнивая $8\pi G T_0^0 = GE^2 = GE_{\text{cr}}^2 (\tau_0 / |\tau|)^{8/3}$ величине $1/\tau^2$, находим

$$|\tau| = G^{3/2} E_{\text{cr}}^3 \tau_0^4. \quad (12.3.10)$$

Подставляя численные значения E_{cr} и $\tau_0 \approx 10^{-18} - 10^{-20}$ с, находим $|\tau| \approx 10^{-46} - 10^{-54}$ с $\ll \tau_{\text{Pl}}$. Но мы уже говорили, что истинная физическая сингулярность лежит при $|\tau| \approx \tau_{\text{Pl}}$. Значит, квантовые эффекты, влияя на электрическое поле и через него на метрику, приводят к такой перестройке метрики, что она теперь описывается выражениями (12.3.4) и (12.3.8) вплоть до $|\tau| \approx \tau_{\text{Pl}}$ и вместо горизонта Коши возникает истинная сингулярность.

Подчеркнем, что мы построили самосогласованное решение, причем не методом малых возмущений, как в § 12.1, 12.2. Полученное решение точно описывает (разумеется, в рамках применимости теории), как возникает истинная сингулярность. Нам остается рассмотреть область параметров на рис. 85, лежащую между линиями 4 и 1.

Здесь электрическое поле везде в области II меньше E_{cr} , поэтому рождение пар не влияет заметно на него. Однако все же пары рождаются, и наличие даже небольшого их количества ведет к образованию истинной сингулярности.

Нетрудно понять качественно, как это происходит. Рожденные частицы разгоняются электрическим полем (причем e^+ и e^- – в противоположных направлениях), создавая электрический ток. Суммарный трехмерный импульс пучков равен нулю. Макроскопически можно считать, что плазма в целом покоятся в системе отсчета (12.3.4), хотя и обладает (если не произошла релаксация потоков) резко анизотропным давлением. Мировые линии элементарных объемов плазмы совпадают с мировыми линиями системы отсчета (12.3.4); до тех пор пока мы не учитываем обратного влияния рожденных частиц на метрику. Мы видим, что в данном случае мировые линии концентрируются вдоль горизонтов Коши, подобно тому, как на рис. 84 концентрировалось излучение от возмущений в области I. Эта концентрация и приводит к возникновению истинной сингулярности.

В цитированной работе Новикова и Старобинского (1980*) построено самосогласованное решение, описывающее данную ситуацию. Тяготение родившейся плазмы начинает влиять на решение, когда r приближается к r_- . Решение (12.3.8) уже не справедливо при $r \approx r_-$. Перестроенное решение имеет вид

$$a \sim |\tau|, \quad r \sim \sqrt{\ln |\tau|}, \quad \epsilon_e \sim \frac{1}{r^2 \ln |\tau|} \gg \epsilon_{(em)}, \quad (12.3.11)$$

где ϵ_e – плотность энергии рожденных пар, $\epsilon_{(em)}$ – плотность энергии электрического поля. Решение (12.3.11) продолжается до возникновения истинной сингулярности. Таким образом, и в этом случае горизонт Коши не возникает, а образуется истинная сингулярность, причем самосогласованное решение, описывающее ее возникновение, не есть результат метода малых возмущений.

В заключение сравним неустойчивости горизонтов Коши от квантовых эффектов с классическими неустойчивостями от внешних возмущений, рассмотренных в предыдущем параграфе. Какие неустойчивости сильнее? Очевидно, что когда пары рождаются интенсивно (при $E \approx E_{\text{cr}}$) уже вдали от r_- , квантовая неустойчивость сильнее, так как перестраивает решение также вдали от r_- . Если же $E \ll E_{\text{cr}}$, то обе неустойчивости проявляются лишь в области, близкой к r_- , и классическая неустойчивость может быть сильнее.