В настоящем Приложении собраны важнейшие формулы римановой геометрии и теории относительности, используемые в основном тексте книги. Поскольку вывод этих формул и необходимые разъяснения можно найти в существующих учебниках и монографиях [см., например, Ландау, Лифшиц (1973*), Мизнер, Торн, Уилер (1973), Хокинг, Эллис (1973), Крамер и др. (1980), Владимиров (1982*)], мы ограничиваемся здесь простым перечислением основных соотношений и краткими комментариями к ним.

Индексы: греческие α, β, ... пробегают значения 0, 1, 2, 3; латинские i, j, ... – значения 1, 2, 3.

Симметризация $A_{(\mu_1 \ldots \mu_p)}$ и *антисимметризация* $A_{[\mu_1 \ldots \mu_p]}$ тензора $A_{\mu_1 \ldots \mu_p}$:

$$A_{(\mu_1 \ldots \mu_p)} = \frac{1}{p!} \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{перестановкам}}} A_{\mu_1 \ldots \mu_p},$$

$$A_{[\mu_1 \ldots \mu_p]} = \frac{1}{p!} \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{перестановкам}}} (-1)^J A_{\mu_1 \ldots \mu_p},$$

где $J = 0$, если перестановка четная, и $J = 1$ в противном случае.

Метрика пространства-времени $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ имеет сигнатуру $- + + +$.

Гладкая кривая $x^\mu(\lambda)$ называется пространственно-, времени- или светоподобной в точке $\lambda = \lambda_0$, если касательный к ней вектор $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$ в этой точке удовлетворяет условию $u^\mu u_\mu > 0$, $u^\mu u_\mu < 0$ или $u^\mu u_\mu = 0$ соответственно. Кривая называется причинной, если в каждой ее точке $u^\mu u_\mu \leqslant 0$.

Причинное будущее $J^+(Q)$ (*прошлое* $J^-(Q)$) множества Q – это множество точек, для каждой из которых найдется проходящая через нее причинная кривая, направленная в прошлое (в будущее) и пересекающая Q.

Область Коши будущего $D^+(Q)$ (*прошлого* $D^-(Q)$) множества Q – это множество точек, для каждой из которых любая проходящая через нее причинная кривая, направленная в прошлое (в будущее), пересекает Q.

Полная поверхность Коши – это невремениподобная гиперповерхность, которую каждая причинная кривая пересекает точно один раз.

Тензор кривизны Римана:

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^{\mu}_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha}, \tag{П.1}$$

где

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu,\alpha\beta}, \quad \Gamma_{\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta} - g_{\alpha\beta,\nu} + g_{\beta\nu,\alpha}). \tag{П.2}$$

Тензор Риччи:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}. \tag{П.3}$$

Тензор Вейля:

$$C_{\mu\nu\sigma\tau} = R_{\mu\nu\sigma\tau} + g_{\nu[\sigma}S_{\tau]\mu} - g_{\mu[\sigma}S_{\tau]\nu}, \tag{П.4}$$

где $S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{6} g_{\mu\nu} R$.

Тензор Эйнштейна: $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$.

Ковариантная производная:

$$\nabla_\alpha B^{\beta_1 \cdots}{}_{\gamma_1 \ldots} =$$

$$= \partial_\alpha B^{\beta_1 \cdots}{}_{\gamma_1 \ldots} + \Gamma^{\beta_1}{}_{\alpha\mu} B^{\mu \cdots}{}_{\gamma_1 \ldots} + \ldots - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma_1} B^{\beta_1 \cdots}{}_{\mu \ldots \cdots} \tag{П.5}$$

Другое обозначение обычной четырехмерной ковариантной производной: $\nabla_\alpha(\ ) \equiv (\ )_{;\alpha}$. Ковариантные производные по отношению к трехмерной метрике обозначаются $\nabla_i(\ ) = (\ )_{:i}$. Для двумерных ковариантных производных используется обозначение $(\ )_{|A}$ $(A = 1, 2)$.

Коммутатор ковариантных производных:

$$(\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha)B_{\mu \ldots}{}^{\nu \cdots} = R_{\alpha\beta\mu}{}^{\sigma} B_{\sigma \ldots}{}^{\nu \cdots} + \ldots - R_{\alpha\beta\sigma}{}^{\nu} B_{\mu \ldots}{}^{\sigma \cdots} - \ldots \tag{П.6}$$

Производная Ли $\mathcal{L}_\xi A^{\alpha \cdots}{}_{\beta \ldots}$ тензорного поля $A^{\alpha \cdots}{}_{\beta \ldots}$ вдоль векторного поля ξ определяется соотношением

$$\mathcal{L}_\xi A^{\alpha \cdots}{}_{\beta \ldots} = \xi^\mu \partial_\mu A^{\alpha \cdots}{}_{\beta \ldots} - \partial_\mu \xi^\alpha \cdot A^{\mu \cdots}{}_{\beta \ldots} - \ldots + \partial_\beta \xi^\mu \cdot A^{\alpha \cdots}{}_{\mu \ldots} + \ldots =$$

$$= \xi^\mu \nabla_\mu A^{\alpha \cdots}{}_{\beta \ldots} - \nabla_\mu \xi^\alpha A^{\mu \cdots}{}_{\beta \ldots} - \ldots + \nabla_\beta \xi^\mu A^{\alpha \cdots}{}_{\mu \ldots} + \ldots, \tag{П.7}$$

$$\mathcal{L}_\xi \eta^\alpha \equiv [\xi, \eta]^\alpha = \xi^\mu \partial_\mu \eta^\alpha - \eta^\mu \partial_\mu \xi^\alpha, \tag{П.8}$$

$$\mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi = \mathcal{L}_{[\xi, \eta]}. \tag{П.9}$$

Производная Ферми – Уолкера $\mathcal{F}_\xi A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\ldots}$ тензорного поля $A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\ldots}$ вдоль векторного поля ξ $(\xi^\mu \xi_\mu \neq 0)$:

$$\mathcal{F}_\xi A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\ldots} = \xi^\mu \nabla_\mu A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\ldots} + \mathcal{F}^\alpha{}_\sigma A^{\sigma\cdots}{}_{\beta\ldots} + \ldots - \mathcal{F}^\sigma{}_\beta A^{\alpha\cdots}{}_{\sigma\ldots} - \ldots, \tag{П.9а}$$

где

$$\mathcal{F}^\alpha{}_\sigma = (w^\alpha \xi_\sigma - \xi^\alpha w_\sigma)\epsilon(\xi),$$

$$w^\alpha = \xi^\beta \xi^\alpha{}_{;\beta}, \quad \epsilon(\xi) = \operatorname{sign}(-\xi^\mu \xi_\mu).$$

Параллельный перенос. Тензорное поле $A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\ldots}$ параллельно переносится вдоль векторного поля ξ, если выполнено условие

$$\xi^\mu \nabla_\mu A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\ldots} = 0. \tag{П.10}$$

Говорят, что это поле параллельно переносится вдоль ξ *в смысле Ли*, если

$$\mathcal{L}_\xi A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\ldots} = 0, \tag{П.11}$$

и *в смысле Ферми – Уолкера*, если

$$\mathcal{F}_\xi A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\ldots} = 0. \tag{П.12}$$

Геодезическая $x^\alpha(\lambda)$ определяется как решение уравнения

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = f(\lambda) \frac{dx^\alpha}{d\lambda}, \tag{П.13}$$

где $f(\lambda)$ – произвольная функция. За счет изменения параметризации $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\lambda)$ эту функцию можно обратить в нуль. Соответствующий параметр называют аффинным. Аффинный параметр определен с точностью до линейного преобразования. Для времениподобных $\left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} < 0\right)$ и пространственноподобных $\left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} > 0\right)$ геодезических аффинный параметр пропорционален собственной длине $\int \sqrt{|ds^2|}$ вдоль кривой.

Уравнение девиации геодезических. Пусть $n^\mu(\lambda)$ – вектор, соединяющий пару близких геодезических при одинаковом значении аффинных параметров λ вдоль них. Тогда имеет место уравнение

$$\frac{D^2 n^\alpha}{d\lambda^2} + R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} u^\beta n^\gamma u^\delta = 0,$$

где

$$u^\beta = \frac{dx^\beta}{d\lambda}, \qquad \frac{D}{d\lambda} = u^\mu \nabla_\mu.$$

Векторное поле Киллинга ξ^μ в пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$ определяется соотношением

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \equiv 2\xi_{(\mu;\nu)} = 0. \tag{П.14}$$

Векторное поле Киллинга ξ^μ удовлетворяет уравнению

$$\xi_{\mu;\alpha;\beta} = R_{\gamma\beta\alpha\mu}\xi^\gamma. \tag{П.15}$$

Если ξ^μ и η^μ – два векторных поля Киллинга, то $[\xi, \eta]^\mu \equiv \xi^\alpha \partial_\alpha \eta^\mu - \eta^\alpha \partial_\alpha \xi^\mu$ – также векторное поле Киллинга.

Если ξ^μ времениподобно ($\xi^\mu \xi_\mu < 0$) и $u^\mu = \xi^\mu / |\xi_\alpha \xi^\alpha|^{1/2}$ – 4-скорость движения вдоль ξ^μ, то ускорение

$$w^\mu = u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu = \frac{1}{2}\nabla^\mu \ln|\xi_\alpha \xi^\alpha|. \tag{П.16}$$

Тензорное поле Киллинга – это симметричное тензорное поле $\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = \xi_{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)}$, удовлетворяющее условию

$$\xi_{(\alpha_1 \ldots \alpha_m;\beta)} = 0. \tag{П.17}$$

Конформные преобразования определяются как преобразования метрики вида

$$g_{\alpha\beta}(x) = \Omega^2(x)\hat{g}_{\alpha\beta}(x). \tag{П.18}$$

Тензорное поле $A^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}{}_{\beta_1 \ldots \beta_m}$ является полем веса s, если при преобразовании (П.18) оно преобразуется по закону

$$A^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}{}_{\beta_1 \ldots \beta_m} = \Omega^{s-n+m}\hat{A}^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}{}_{\beta_1 \ldots \beta_m}. \tag{П.19}$$

Если $\hat{\nabla}_\gamma$ – ковариантная производная в метрике $\hat{g}_{\alpha\beta}$, то

$$\hat{\nabla}_\gamma A^{\alpha \ldots}{}_{\beta \ldots} = \nabla_\gamma A^{\alpha \ldots}{}_{\beta \ldots} + C^\alpha_{\gamma\sigma} A^{\sigma \ldots}{}_{\beta \ldots} + \ldots - C^\sigma_{\gamma\beta} A^{\alpha \ldots}{}_{\sigma \ldots} - \ldots, \tag{П.20}$$

где

$$C^\alpha_{\gamma\beta} = C^\alpha_{(\gamma\beta)} = -\Omega^{-1}[\delta^\alpha_\beta \nabla_\gamma \Omega + \delta^\alpha_\gamma \nabla_\beta \Omega - g_{\gamma\beta} g^{\alpha\sigma}\nabla_\sigma \Omega]. \tag{П.21}$$

При конформных преобразованиях тензор Вейля $C_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$ не изменяется, а кривизны $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$, $R_{\alpha\beta}$ и R преобразуются следующим образом:

$$\hat{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\sigma = R_{\alpha\beta\gamma}{}^\sigma + 2\nabla_{[\alpha} C^\sigma_{\beta|\gamma} + 2C^\lambda_{\gamma|\alpha} C^\sigma_{\beta|\lambda}, \tag{П. 22}$$

$$\hat{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + 2\Omega^{-1}\nabla_\alpha \nabla_\beta \Omega + \Omega^{-1} g_{\alpha\beta}\nabla^\sigma \nabla_\sigma \Omega -$$

$$- 3\Omega^{-2} g_{\alpha\beta} g^{\gamma\sigma}\nabla_\gamma \Omega \nabla_\sigma \Omega, \tag{П. 23}$$

$$\hat{R} = \Omega^2 R + 6\Omega g^{\gamma\sigma}\nabla_\gamma \nabla_\sigma \Omega - 12 g^{\gamma\sigma}\nabla_\gamma \Omega \nabla_\sigma \Omega. \tag{П.24}$$

Элемент объема:

$$d^4 v = \sqrt{-g}\, d^4 x. \tag{П.25}$$

Элемент $d\sigma_\alpha$ *гиперповерхности* Σ, определяемой уравнениями $x^\mu = x^\mu(y^i)$, есть

$$d\sigma_\alpha = \frac{1}{3!}\, e_{\alpha\beta_1\beta_2\beta_3} \det\left(\frac{\partial x^{\beta_i}}{\partial y^j}\right) dy^1\, dy^2\, dy^3, \tag{П.26}$$

где $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – антисимметричный тензор:

$$e_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-g}\, \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{П.27}$$

($\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – полностью антисимметричный символ ($\epsilon_{0123} = 1$)).

Элемент $d\sigma_{\alpha\beta}$ *двумерной поверхности* S, определяемой уравнениями $x^\mu = x^\mu(z^a)$ $(a = 1, 2)$, есть

$$d\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\, e_{\alpha\beta\gamma_1\gamma_2} \det\left(\frac{\partial x^{\gamma_a}}{\partial z^b}\right) dz^1\, dz^2. \tag{П.28}$$

Интегрирование в римановом пространстве. Пусть φ – скалярное, φ^α – векторное и $\varphi^{\alpha\beta}$ – антисимметричное тензорное поля. Тогда определены интегралы

$$T_V[\varphi] = \int_V \varphi\, d^4 v, \tag{П.29}$$

$$T_\Sigma[\varphi^\alpha] = \int_\Sigma \varphi^\alpha\, d\sigma_\alpha, \tag{П.30}$$

$$T_S[\varphi^{\alpha\beta}] = \int_S \varphi^{\alpha\beta} d\sigma_{\alpha\beta}. \tag{П.31}$$

Теорема Стокса:

$$\int_V \varphi^\alpha{}_{;\alpha}\, d^4 v = \int_{\partial V} \varphi^\alpha d\sigma_\alpha, \tag{П.32}$$

$$\int_\Sigma \varphi^{\alpha\beta}{}_{;\beta}\, d\sigma_\alpha = \int_{\partial\Sigma} \varphi^{\alpha\beta} d\sigma_{\alpha\beta}, \tag{П.33}$$

где ∂V и $\partial\Sigma$ – границы 4-объема V и гиперповерхности Σ.

Индуцированная метрика h_{ij} *и внешняя кривизна* K_{ij} гиперповерхности. Пусть $x^\mu = x^\mu(y^i)$ – уравнение гиперповерхности Σ, n^μ – единичная нормаль к ней и $e^\mu_{(i)} = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial y^j} e^j_{(i)}$ – тройка взаимно ортогональных единичных векторов, касательных к Σ. Тогда

$$h_{ij} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}\, \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}\, g_{\mu\nu}, \tag{П.34}$$

$$K_{(i)(j)} = n_\mu\, e^\nu_{(i)}\, \nabla_\nu\, e^\mu_{(j)}, \tag{П.35}$$

где $K_{(i)(j)}$ – компоненты K_{ij} в базисе $e_{(i)}$.

Уравнения Гаусса – Кодацци:

$$R^m{}_{ijk} = {}^{(3)}R^m{}_{ijk} + \epsilon(n)\,(K_{ij}K^m{}_k - K_{ik}K_j{}^m), \tag{П.36}$$

$$n_\mu R^\mu{}_{ijk} = -\epsilon(n)\,(K_{ij:k} - K_{ik:j}), \tag{П.37}$$

где $\epsilon(n) = n_\mu n^\mu = \pm 1$, $(\ )_{:i}$ – ковариантная производная в метрике h_{ij}; ${}^{(3)}R^m{}_{ijk}$ – тензор кривизны трехмерного пространства с этой метрикой.

"3 + 1"-*разбиение тензора Эйнштейна*:

$$n^\alpha n^\beta G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\,{}^{(3)}R + \frac{1}{2}\,\epsilon(n)\,[K^2 - K_{ij}K^{ij}], \tag{П.38}$$

$$n^\alpha G_{\alpha i} = -\epsilon(n)\,[K_i{}^m{}_{:m} - K_{:i}], \tag{П.39}$$

где ${}^{(3)}R = h^{ik}\,{}^{(3)}R^m{}_{imk}$, $K = h^{ij}K_{ij}$.

Действие Эйнштейна:

$$W[g] = \frac{c^3}{16\pi G}\left(\int_V R\sqrt{-g}\,d^4x - 2\int_{\partial V} K\sqrt{h}\,d^3y\right). \tag{П.40}$$

Уравнения Эйнштейна:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}\,T_{\alpha\beta}, \tag{П.41}$$

где $T_{\alpha\beta}$ – тензор энергии-импульса:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{-2c\,\delta W_m}{\sqrt{-g}\;\;\delta g^{\alpha\beta}}, \tag{П.42}$$

W_m – действие материи. Для ковариантного действия W_m $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$.

Энергетические условия. Пусть ξ^μ – произвольное времениподобное векторное поле.

Слабое энергетическое условие означает выполнение следующих неравенств для заданного $T_{\alpha\beta}$:

$$T_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta \geqslant 0. \tag{П.43}$$

Условие энергодоминантности: $T_{\alpha\beta}\xi^\beta$ – непространственноподобный вектор.

Сильное энергетическое условие – выполнение неравенств

$$T_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta \geqslant \frac{1}{2}\,T^\mu_\mu\,\xi^\alpha\xi_\alpha. \tag{П.44}$$

Электромагнитное поле A_μ.

Действие:

$$W[A] = -\frac{1}{16\pi}\int_V F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x + \int A_\mu j^\mu\sqrt{-g}\,d^4x, \tag{П.45}$$

$$F_{\mu\nu} = 2A_{[\nu,\mu]}. \tag{П.46}$$

Уравнения Максвелла:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi j^{\mu}. \qquad (\text{П}.47)$$

Тензор энергии-импульса:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{\mu\alpha}F_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right). \qquad (\text{П}.48)$$

Скалярное поле φ.

Действие:

$$W_{\xi}[\varphi] = -\frac{1}{8\pi}\int_V (g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} + m^2\varphi^2 + \xi R\varphi^2)\sqrt{-g}\, d^4x +$$

$$+\int_V J\varphi\sqrt{-g}\, d^4x + \frac{1}{4\pi}\,\xi \int_{\partial V} K\varphi^2\sqrt{h}\, d^3y, \qquad (\text{П}.49)$$

где m – масса поля, ξ – свободный параметр. При $m = 0$, $\xi = 1/6$ теория конформно-инвариантна.

Уравнения поля:

$$\Box\varphi - (m^2 + \xi R)\varphi = -4\pi J. \qquad (\text{П}.50)$$

Тензор энергии-импульса:

$$T^{(\xi)}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left\{ \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha} + m^2\varphi^2) + \right.$$

$$\left. + \xi\left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R\right)\varphi^2 + g_{\mu\nu}(\varphi^2)^{;\alpha}{}_{;\alpha} - (\varphi^2)_{;\mu\nu}\right]\right\} + J\varphi g_{\mu\nu}. \qquad (\text{П}.51)$$

Законы сохранения. Пусть ξ^{μ} – векторное и $\xi^{\mu\nu}$ – тензорное поля Киллинга. Если $T^{\mu\nu}$ – симметричный тензор, удовлетворяющий условию $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ (тензор энергии-импульса), то величина

$$P_{\xi} = \int_{\Sigma} T^{\mu\nu}\xi_{\mu}\, d\sigma_{\nu} \qquad (\text{П}.52)$$

не зависит от выбора полной поверхности Коши Σ.

Если p^{μ} – импульс частицы ($p^{\nu}p^{\mu}{}_{;\nu} = 0$), то величины

$$P_{\xi} = \xi^{\mu}p_{\mu}, \quad Q_{\xi} = \xi^{\mu\nu}p_{\mu}p_{\nu} \qquad (\text{П}.53)$$

постоянны вдоль траектории частицы.

Конгруэнция кривых – трехпараметрическое семейство кривых $x^{\mu}(\lambda; y^i)$ (λ – параметр вдоль кривой, y^i – параметр, "нумерующий" кривую), обладающее тем свойством, что через каждую точку проходит одна и только одна кривая семейства.

Если выбраны конкретные λ и y^i на конгруэнции, то мы получаем систему координат. Конгруэнция времениподобных кривых называется системой отсчета.

Дифференциальные инварианты конгруэнции времениподобных кривых. Пусть λ – аффинный параметр и $u^{\mu} = dx^{\mu}/d\lambda$ – векторное поле ($u^{\mu}u_{\mu} = -1$),

связанное с конгруэнцией $x^{\mu}(\lambda;\ y^{i})$. Тогда $u_{\alpha;\beta}$ допускает однозначное представление вида

$$u_{\alpha;\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta p_{\alpha\beta} - w_{\alpha}u_{\beta}, \tag{П.54}$$

где $p_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_{\alpha}u_{\beta}$ – проекционный тензор, проектирующий векторы на 3-пространство, ортогональное u^{μ}, $w_{\alpha} = u^{\beta}u_{\alpha;\beta}$ – ускорение, $\theta = u^{\alpha}{}_{;\alpha}$ – "расхождение" мировых линий конгруэнции, $\omega_{\alpha\beta}$ – тензор вращения и $\sigma_{\alpha\beta}$ – тензор сдвига:

$$\omega_{\alpha\beta} = \omega_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}\left(u_{\alpha;\mu}p^{\mu}{}_{\beta} - u_{\beta;\mu}p^{\mu}{}_{\alpha}\right), \tag{П.55}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}\left(u_{\alpha;\mu}p^{\mu}{}_{\beta} + u_{\beta;\mu}p^{\mu}{}_{\alpha}\right) - \frac{1}{3}\theta p_{\alpha\beta}. \tag{П.56}$$

Уравнение Райчаудхури:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = w^{\alpha}{}_{;\alpha} + 2(\omega^{2} - \sigma^{2}) - \frac{1}{3}\theta^{2} - R_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}, \tag{П.57}$$

где $\omega^{2} = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}$, $\sigma^{2} = \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}$.

Выберем в качестве параметра λ собственное время s вдоль каждой кривой системы отсчета. Тогда u^{μ} является 4-скоростью. В этом случае (П.54) обычно записывают в виде [см. Владимиров (1982*)]

$$u_{\mu;\nu} = A_{\mu\nu} + D_{\mu\nu} + F_{\mu}u_{\nu}. \tag{П.58}$$

Непосредственный физический смысл имеют значения $A_{\mu\nu}$, $D_{\mu\nu}$ и F_{μ} с пространственными индексами:

A_{ik} – тензор угловой скорости вращения системы отсчета

$$A^{ik} = \frac{c}{\sqrt{-g_{00}}}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^{0}} + g^{i\alpha}\Gamma^{k}_{\alpha 0}\right); \tag{П.59}$$

D_{ik} – тензор скорости деформации системы отсчета

$$D_{ik} = \frac{1}{2}\frac{c}{\sqrt{-g_{00}}}\frac{\partial h^{*}_{ik}}{\partial x^{0}}, \tag{П.60}$$

где $h^{*}_{ik} = g_{ik} - \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}}$, $h^{*}_{ik}h^{*il} = \delta^{l}_{k}$;

F_{i} – вектор поля гравитационно-инерциальных сил, действующих в системе отсчета (т.е. вектор ускорения свободного падения пробной покоящейся частицы)

$$F^{i} = c^{2}\frac{\Gamma^{i}_{00}}{g_{00}}. \tag{П.61}$$

С помощью A_{ik} вычисляется вектор угловой скорости вращения системы Ω_i:

$$\Omega_i = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ikl}A^{kl}, \tag{П.62}$$

где ϵ_{ijk} – абсолютно антисимметричный объект, $\epsilon_{123} = \left(\frac{g}{g_{00}}\right)^{1/2}$.

Скаляр $\Omega = \sqrt{\Omega_i \Omega_k h^{*ik}}$ есть угловая скорость поворота за единицу собственного времени $d\tau = \sqrt{-g_{00}}\,dt$.

Скаляр

$$F = \sqrt{F^i F^k h^*_{ik}}. \tag{П.63}$$

есть абсолютная величина ускорения свободного падения покоящегося тела в выбранной системе отсчета.