ЧАСТЬ I

ФИЗИКА ЗВЕЗДНОЙ МАТЕРИИ

ГЛАВА 1

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

§ 1. Идеальный газ с излучением

Вещество большинства звезд имеет высокую температуру и сравнительно умеренную плотность. В этих условиях кинетическая энергия частиц много больше энергии взаимодействия между ними и модель нерелятивистского, невырожденного идеального газа оказывается хорошим приближением к реальности. Термодинамические свойства вещества планет, например, Земли, изучены гораздо хуже. Температура их при той же плотности значительно ниже и вещество находится в жидкой и твердой фазах, исследование которых сопряжено с существенными трудностями.

В недрах звезд вещество и излучение находятся в термодинамическом равновесии, которое устанавливается быстрыми процессами столкновений частиц, поглощением и испусканием фотонов. Излучение, наряду с газом, создает давление, противодействующее силе тяжести.

Вещество звезд состоит из различных химических элементов, основными из которых являются водород и гелий. На Солнце, например, они составляют в сумме более 98,5% плотности вещества. Остальная часть массы Солнца состоит из смеси практически всех стабильных изотопов таблицы Менделеева. В табл. 1 указано содержание наиболее обильных элементов, наблюдаемых на Солнце [5]. При изменении от центра до поверхности звезды температуры на три-четыре порядка и плотности на ~ 10 порядков изменяется состояние ионизации вещества.

В центральных областях звезд с $M \geqslant M_\odot$ все атомы практически полностью ионизованы.

Пусть i — номер химического элемента, который может находиться в различных состояниях ионизации от нейтрального ($j = 0$) до полностью ионизованного ($j = i$). Обозначим через ϵ_{ij} энергию связи j-кратно ионизованного иона элемента i, определяемую так, что для полностью ионизованного иона $\epsilon_{ii} = 0$. Удельная энергия E (эрг · г$^{-1}$), давление P (дин · см$^{-2}$) и удельная энтропия S (эрг · г$^{-1}$ · К$^{-1}$) данной смеси атомов, ионов и электронов с излучением имеют вид [145]

$$E = \frac{3}{2}\,\frac{kT}{\mu m_\mathrm{u}} + \frac{aT^4}{\rho} - \sum_i \sum_{j=0}^{i} \frac{x_i}{m_i}\, y_{ij}\,\epsilon_{ij}, \tag{1.1}$$

$$P = \frac{\rho kT}{\mu m_\mathrm{u}} + \frac{1}{3}\,aT^4, \tag{1.2}$$

$$S = \frac{k}{\rho} \sum_i \sum_{j=0}^{i} n_{ij} \left\{ \frac{5}{2} + \ln\left[\left(\frac{m_i kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{g_{ij}}{n_{ij}} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{k}{\rho} n_e \left\{ \frac{5}{2} + \ln\left[\left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{n_e} \right] \right\} + \frac{4}{3} \frac{aT^3}{\rho}. \qquad (1.3)$$

Здесь использованы обозначения:

ρ — плотность,

T — температура,

$k = 1{,}38067 \cdot 10^{-16}$ эрг $\cdot$ К$^{-1}$ — постоянная Больцмана,

$\hbar = 1{,}0546 \cdot 10^{-27}$ эрг $\cdot$ с — постоянная Планка,

$a = \pi^2 k^4 / 15\hbar^3 c^3 = 7{,}565 \cdot 10^{-15}$ эрг $\cdot$ см$^{-3}$ $\cdot$ К$^{-4}$ — постоянная плотности излучения,

$c = 2{,}9979 \cdot 10^{10}$ см $\cdot$ с$^{-1}$ — скорость света в вакууме,

x_i — массовая доля элемента с атомным номером i,

Таблица 1

Распространенность наиболее обильных химических элементов (Солнце, [5])

Элемент	Символ	Атомный номер	Атомная масса	Десятичный логарифм распространенности	
				по числу атомов	по массе
Водород	H	1	1,0080	12,00	12,00
Гелий	He	2	4,0026	10,93	11,53
Углерод	C	6	12,0111	8,52	9,60
Азот	N	7	14,0067	7,96	9,11
Кислород	O	8	15,9994	8,82	10,02
Неон	Ne	10	20,179	7,92	9,22
Натрий	Na	11	22,9898	6,25	7,61
Магний	Mg	12	24,305	7,42	8,81
Алюминий	Al	13	26,9815	6,39	7,78
Кремний	Si	14	28,086	7,52	8,97
Фосфор	P	15	30,9738	5,52	7,01
Сера	S	16	32,06	7,20	8,71
Хлор	Cl	17	35,453	5,6	7,2
Аргон	Ar	18	39,948	6,8	8,4
Кальций	Ca	20	40,08	6,30	7,90
Хром	Cr	24	51,996	5,85	7,57
Марганец	Mn	25	54,9380	5,40	7,14
Железо	Fe	26	55,847	7,60	9,35
Никель	Ni	28	58,71	6,30	8,07

Относительное содержание по массе:
Водород $X_H = 0{,}73$
Гелий $X_{He} = 0{,}25$
Прочие элементы $\Sigma x_i = 0{,}017$

Число нуклонов на ядро,
$\mu_n = 1{,}26$
Средняя атомная масса при полной ионизации
$\mu = 0{,}60$

y_{ij} – степень j-кратной ионизации i-го элемента, так что $\sum_{j=0}^{i} y_{ij} = 1$,

$m_i \approx A_i m_u$ – масса ядра атома с номером i и атомной массой $A_i \geqslant 4$,

$m_u = 1{,}66057 \cdot 10^{-24}$ г – атомная единица массы, равная 1/12 массы изотопа ^{12}C,

$m_e = 9{,}10953 \cdot 10^{-28}$ г – масса электрона*),

$n_{ij} = x_i \rho y_{ij}/m_i$ см$^{-3}$ – концентрация ионов элемента i в j-м состоянии ионизации, (1.4)

g_{ij} – статистический вес иона i-го элемента в j-м состоянии ионизации,

$n_e = \sum_i \sum_{j=1}^{i} j n_{ij}$ см$^{-3}$ – концентрация электронов в условиях электронейтральности, (1.5)

$\mu = \left[\sum_i \frac{m_u}{m_i} x_i \sum_{j=0}^{i} (1+j) y_{ij}\right]^{-1}$ – количество нуклонов на одну частицу газа (средняя атомная масса). (1.6)

В полностью ионизованном газе, состоящем из водорода, гелия и других элементов с $A_i \approx 2i \gg 1$, имеем

$$\mu = \left[2x_H + \frac{3}{4} x_{He} + \frac{1}{2} x_A\right]^{-1}, \quad x_A = \sum_{i \geqslant 6} x_i, \quad m_{He} \approx 4m_u, \quad m_H \approx m_u. \tag{1.7}$$

Энергия в (1.1) отсчитывается от энергии покоя полностью ионизованных ионов и электронов. Степени ионизации элементов в термодинамическом равновесии определяются формулой Саха [145]

$$\frac{y_{i,j-1}}{y_{i,j}} = n_e \frac{g_{i,j-1}}{2g_{ij}} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_e kT}\right)^{3/2} e^{I_{ij}/kT} = n_e K(T). \tag{1.8}$$

Здесь $I_{ij} = \epsilon_{i,j-1} - \epsilon_{ij}$ – энергия (потенциал) ионизации j-го электрона, $I_{i0} = 0$. Энергии ионизации наиболее обильных элементов приведены в табл. 2. Для нахождения степени ионизации элементов в смеси необходимо решить систему уравнений (1.8) с учетом (1.4), (1.5). Аналитическое решение получается в случае однократной ионизации одного (i-го) сорта атомов

$$n_e = n_{i1} = \frac{\rho}{m_i} y_{i1}, \quad y_{i0} = 1 - y_{i1},$$

$$\frac{1 - y_{i1}}{y_{i1}^2} = \frac{\rho}{m_i} \frac{g_{i0}}{2g_{i1}} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_e kT}\right)^{3/2} e^{I_{i1}/kT} = F_{\rho,T},$$

откуда

$$y_{i1} = \left(\frac{1}{4F_{\rho,T}^2} + \frac{1}{F_{\rho,T}}\right)^{1/2} - \frac{1}{2F_{\rho,T}}. \tag{1.9}$$

---

*) $m_p = 1{,}67265 \cdot 10^{-24}$ – масса протона, $m_n = 1{,}67495 \cdot 10^{-24}$ г – масса нейтрона, $m_D/m_u = 2{,}01410$, $m_{^3H}/m_u = 3{,}01605$, $m_{^3He}/m_u = 3{,}01603$, – относительные массы атомов дейтерия, трития и гелия-3. Константы взяты из [5, 180].

Таблица 2

Потенциалы ионизации и полные моменты внешних электронных оболочек наиболее обильных элементов [180].

Атомный номер	Элемент	Потенциалы ионизации, эВ	Полные моменты
1	H^-, H	0,747; 13,5985	0; 1/2
2	He	24,5876; 54,418	0; 1/2; 0
6	C	11,260; 24,284; 47,89; 64,49	0; 1/2; 0; 1/2
7	N	14,534; 29,602; 47,45; 77,47	3/2; 0; 1/2; 0
8	O	13,618; 35,118; 54,94; 77,41	2; 3/2; 0; 1/2
10	Ne	21,565; 40,964; 63,46; 97,12	0, 3/2; 2; 3/2
11	Na	5,1391; 47,287; 71,64; 98,92	1/2; 0; 3/2; 2
12	Mg	7,646; 15,035; 80,15; 109,2	0, 1/2; 0; 3/2
13	Al	5,9858; 18,828; 28,448; 120	1/2; 0; 1/2; 0
14	Si	8,152; 16,346; 33,493; 45,14	0; 1/2; 0; 1/2
15	P	10,49; 19,73; 30,18; 51,47	3/2; 0; 1/2; 0
16	S	10,36; 23,33; 34,83; 47,31	2; 3/2; 0; 1/2
17	Cl	12,968; 23,81; 39,61; 53,47	3/2; 2; 3/2; 0
18	Ar	15,760; 27,63; 40,74; 59,81	0; 3/2; 2; 3/2
20	Ca	6,113; 11,872; 50,91; 67,10	0; 1/2; 0; 3/2
24	Cr	6,766; 16,50; 30,96; 49	3; 5/2; 0; 3/2
25	Mn	7,4368; 15,640; 33,67; 51,2	5/2; 2; 5/2; 0
26	Fe	7,87; 16,18; 30,65; 54,8	4; 9/2; 4; 5/2
28	Ni	7,63; 18,17; 35,2; 54,9	4; 5/2; 4; 9/2
1 эв = 11,604 К		X_0; X_+; X_{++}; X_{+++}	X_0; X_+; X_{++}; X_{+++}

При исследовании звездной эволюции часто необходимо знать значения адиабатических показателей

$$\gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_S, \quad \gamma_2 = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_S, \quad \gamma_3 = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho}\right)_S$$

и теплоемкостей

$$c_v = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\rho, \quad c_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P.$$

В условиях неполной ионизации все величины рассчитываются численно, для чего их удобно выразить через производные

$$\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_\rho, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \ln \rho}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \ln T}\right)_\rho = c_v.$$

Воспользуемся известными свойствами якобианов

$$\frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial (u, v)}{\partial (t, s)} \frac{\partial (t, s)}{\partial (x, y)}; \quad \frac{\partial (u, v)}{\partial (x, v)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_v. \tag{1.10}$$

Получаем

$$\gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_T - \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_\rho \left(\frac{\partial S}{\partial \ln \rho}\right)_T \Bigg/ \left(\frac{\partial S}{\partial \ln T}\right)_\rho, \tag{1.11}$$

$$\gamma_2 = \left[\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_\rho - \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial \ln T}\right)_\rho \Bigg/ \left(\frac{\partial S}{\partial \ln \rho}\right)_T\right]^{-1}, \tag{1.12}$$

$$\gamma_3 = -\left(\frac{\partial S}{\partial \ln \rho}\right)_T \Bigg/ \left(\frac{\partial S}{\partial \ln T}\right)_\rho, \tag{1.13}$$

$$c_v = (\partial S/\partial \ln T)_\rho, \tag{1.14}$$

$$c_p = c_v - \left(\frac{\partial S}{\partial \ln \rho}\right)_T \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_\rho \Bigg/ \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_T, \tag{1.15}$$

$$c_p/c_v = \gamma_1 \Bigg/ \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_T. \tag{1.16}$$

Производные от энтропии выражаются через производные от энергии и давления из первого закона термодинамики и условия полноты дифференциала свободной энергии $F = E - TS$:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \ln T}\right)_\rho = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial \ln T}\right)_\rho, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \ln \rho}\right)_T = -\frac{1}{\rho T}\left(\frac{\partial P}{\partial \ln T}\right)_\rho. \tag{1.17}$$

Если степени ионизации y_{ij} постоянны, то из (1.3) – (1.6) следует

$$S = \frac{k}{\mu m_u} \ln(T^{3/2}/\rho) + \frac{4}{3}\frac{aT^3}{\rho} + \mathrm{const} \tag{1.18}$$

и все производные вычисляются аналитически:

$$\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_T = \beta_g, \quad \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_\rho = 4 - 3\beta_g,$$
$$\left(\frac{\partial S}{\partial \ln \rho}\right)_T = -\frac{P}{\rho T}(4 - 3\beta_g), \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \ln T}\right)_\rho = \frac{3}{2}\frac{P}{\rho T}(8 - 7\beta_g). \tag{1.19}$$

Здесь $\beta_g = P_g/P$ – отношение газового давления к полному. Выражения для адиабатических показателей и теплоемкостей одноатомного газа с $\mu = \mathrm{const}$ и излучения принимают вид [218]

$$\gamma_1 = \beta_g + \frac{2}{3}\frac{(4 - 3\beta_g)^2}{8 - 7\beta_g}, \quad \gamma_2 = \left[4 - 3\beta_g + \frac{3}{2}\beta_g \frac{8 - 7\beta_g}{4 - 3\beta_g}\right]^{-1},$$
$$\gamma_3 = \frac{2}{3}\frac{4 - 3\beta_g}{8 - 7\beta_g}, \tag{1.20}$$
$$c_v = \frac{3}{2}\frac{P}{\rho T}(8 - 7\beta_g), \quad c_p = \frac{3}{2}\frac{P}{\rho T}(8 - 7\beta_g)\left[1 + \frac{2}{3}\frac{(4 - 3\beta_g)^2}{\beta_g(8 - 7\beta_g)}\right],$$
$$\frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{2}{3}\frac{(4 - 3\beta_g)^2}{\beta_g(8 - 7\beta_g)} = \gamma_1/\beta_g.$$

Соотношения (1.18)–(1.20) широко применяются при описании звездной материи, так как основная часть массы звезд находится в состоянии полной ионизации с μ = const. В оболочках звезд, где температура меньше, вещество ионизовано не полностью и $\mu = \mu(\rho, T)$.

Задача. Вывести уравнения для концентраций электронов в плазме, состоящей из H^0, H^+, H^-, He^0, He^+, He^{++}, а также атомов и однократно ионизованных ионов k других элементов.

Решение. Используя формулу Саха (1.8) и табл. 2, получаем для водорода

$$y_{H^0} = \frac{4}{n_e}\left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{0{,}747}{T_э}} y_{H^-} \equiv \frac{y_{H^-}}{n_e} Q_{H^0}, \quad g_{H^0} \quad 4, \tag{1}$$

$$y_{H^+} = \frac{1}{n_e}\left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{13{,}6}{T_э}} y_{H^0} \equiv \frac{y_{H^0}}{n_e} Q_{H^+} = \frac{y_{H^-}}{n_e^2} Q_{H^0} Q_{H^+}.$$

Используя условие $y_{H^-} + y_{H^0} + y_{H^+} = 1$, имеем

$$y_{H^-} = n_e^2 (n_e^2 + n_e Q_{H^0} + Q_{H^0} Q_{H^+})^{-1}. \tag{2}$$

Аналогично для гелия получаем

$$y_{He^0} = n_e^2 (n_e^2 + n_e Q_{He^+} + Q_{He^+} Q_{He^{++}})^{-1},$$

$$y_{He^+} = \frac{y_{He^0}}{n_e} Q_{He^+}, \quad y_{He^{++}} = \frac{y_{He^0}}{n_e^2} Q_{He^{++}} Q_{He^+}, \tag{3}$$

где

$$Q_{He^+} = 4\left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{24{,}6}{T_э}}, \quad Q_{He^{++}} = \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{54{,}4}{T_э}} \tag{4}$$

и для тяжелых элементов

$$y_{j^+} = \frac{Q_{j^+}}{n_e + Q_{j^+}}, \quad Q_{j^+} = 2\frac{g_{j^+}}{g_{j^0}}\left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{I_{j1}}{kT}}. \tag{5}$$

Здесь $T_э$ – температура в электронвольтах. Используя соотношение (1.4) для каждого элемента и условие электронейтральности (1.5)

$$n_{H^+} + n_{He^+} + 2n_{He^{++}} + \sum_{j=1}^{k} n_{j^+} = n_e + n_{H^-},$$

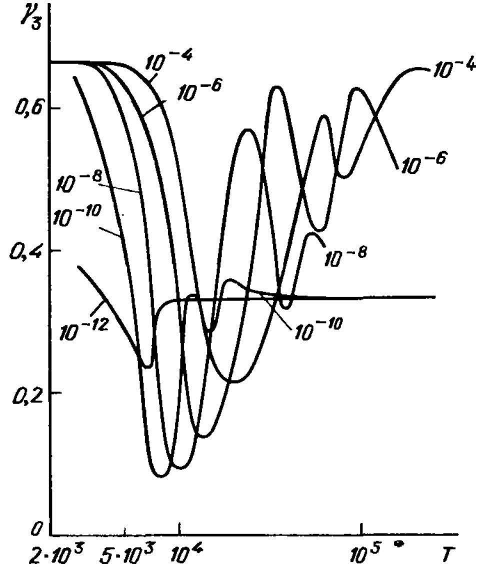
получаем уравнение для приведенной электронной концентрации

$$x_e = \frac{m_u}{\rho} n_e,$$

$$x_H \frac{q_{H^0} q_{H^+} - x_e^2}{x_e^2 + x_e q_{H^0} + q_{H^0} q_{H^+}} + \frac{x_{He}}{4} \frac{x_e q_{He^+} + 2 q_{He^+} q_{He^{++}}}{x_e^2 + x_e q_{He^+} + q_{He^+} q_{He^{++}}} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k} x_j \frac{m_u}{m_j} \frac{q_{j^+}}{x_e + q_{j^+}} = x_e. \tag{6}$$

Рис. 1. Зависимости $\gamma_3(T)$ при ρ = const, указанных на кривых, для нормального состава (табл. 1) в области, где происходит ионизация водорода и гелия



Здесь $q_i = m_u Q_i/\rho$. Все величины в (6) безразмерны и близки к единице, что удобно для численного решения.

После нахождения степеней ионизации в зависимости от ρ и T, можно вычислить термодинамические функции и их производные. На рис. 1 в качестве примера такого расчета приведена зависимость $\gamma_3(\rho, T)$ для смеси с составом $x_H = 0{,}75$, $x_{He} = 0{,}22$ и солнечным соотношением между другими элементами (табл. 1). Два минимума на кривых $\gamma_3 \,|_\rho(T)$ соответствуют областям ионизации водорода и первой ионизации гелия. При малой плотности $\rho = 10^{-12}$ г · см$^{-3}$ второй минимум попадает в область преобладания давления излучения и потому не заметен.

§ 2. Релятивистский газ с учетом вырождения

В центральных областях звезд, находящихся на поздних стадиях эволюции, а также при взрывах сверхновых кинетическая энергия электронов может стать порядка их энергии покоя, т.е. скорости их приближаются к скорости света:

$$kT \sim m_e c^2, \quad \langle v_e \rangle \sim c. \tag{2.1}$$

При вычислении термодинамических функций необходимо тогда использовать полные релятивистские выражения для энергии и импульса электронов. С другой стороны, плотности могут вырасти настолько, что среднее число частиц в ячейке фазового пространства приближается к единице. При этом необходимо учитывать принцип Паули для электронов (спин = 1/2), число которых в ячейке фазового пространства равно либо нулю, либо единице. Среднее число электронов с энергией ϵ в ячейке задается функцией Ферми [145]

$$f_e = \left[1 + \exp\left(\frac{\epsilon - \mu_{te}}{kT}\right)\right]^{-1}, \tag{2.2}$$

где μ_{te} – химический потенциал электронов,

$$\epsilon = (m_e^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2}, \quad p = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \text{ – импульс электрона.} \tag{2.3}$$