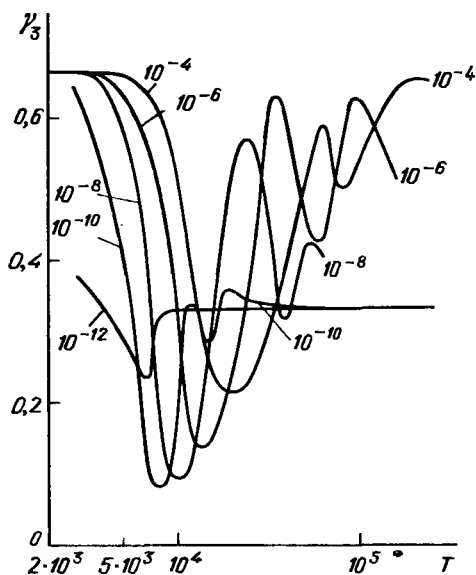


Рис. 1. Зависимости  $\gamma_3(T)$  при  $\rho \neq \text{const}$ , указанных на кривых, для нормального состава (табл. 1) в области, где происходит ионизация водорода и гелия

Здесь  $q_i = m_u Q_i / \rho$ . Все величины в (6) безразмерны и близки к единице, что удобно для численного решения.

После нахождения степеней ионизации в зависимости от  $\rho$  и  $T$ , можно вычислить термодинамические функции и их производные. На рис. 1 в качестве примера такого расчета приведена зависимость  $\gamma_3(\rho, T)$  для смеси с составом  $x_H = 0,75$ ,  $x_{He} = 0,22$  и солнечным соотношением между другими элементами (табл. 1). Два минимума на кривых  $\gamma_3 |_{\rho}(T)$  соответствуют областям ионизации водорода и первой ионизации гелия. При малой плотности  $\rho = 10^{-12} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$  второй минимум попадает в область преобладания давления излучения и потому не заметен.



## § 2. Релятивистский газ с учетом вырождения

В центральных областях звезд, находящихся на поздних стадиях эволюции, а также при взрывах сверхновых кинетическая энергия электронов может стать порядка их энергии покоя, т.е. скорости их приближаются к скорости света:

$$kT \sim m_e c^2, \quad \langle v_e \rangle \sim c. \quad (2.1)$$

При вычислении термодинамических функций необходимо тогда использовать полные релятивистские выражения для энергии и импульса электронов. С другой стороны, плотности могут вырасти настолько, что среднее число частиц в ячейке фазового пространства приближается к единице. При этом необходимо учитывать принцип Паули для электронов (спин = 1/2), число которых в ячейке фазового пространства равно либо нулю, либо единице. Среднее число электронов с энергией  $\epsilon$  в ячейке задается функцией Ферми [145]

$$f_e = \left[ 1 + \exp\left(\frac{\epsilon - \mu_{te}}{kT}\right) \right]^{-1}, \quad (2.2)$$

где  $\mu_{te}$  — химический потенциал электронов,

$$\epsilon = (m_e^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2}, \quad p = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \text{импульс электрона}. \quad (2.3)$$

Термодинамические функции находятся с помощью интегралов по импульсному пространству (с учетом статистического веса  $g_e = 2$ ) [145]:

$$n_e = 2 \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty f_e p^2 dp, \quad (2.4)$$

$$E_e = \frac{2}{\rho} \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty f_e \epsilon p^2 dp, \quad (2.5)$$

$$P_e = 2 \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{3} \int_0^\infty f_e p v \cdot p^2 dp, \quad v = \frac{pc}{\sqrt{p^2 + m_e^2 c^2}}, \quad (2.6)$$

$$S_e = - \frac{2}{\rho} \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} k \int_0^\infty [f_e \ln f_e + (1 - f_e) \ln (1 - f_e)] p^2 dp, \quad (2.7)$$

После преобразования интегралов и введения безразмерных величин

$$x = \frac{pc}{kT}, \quad \alpha = \frac{m_e c^2}{kT} = \frac{5,93013 \cdot 10^9 \text{ К}}{T}, \quad \beta = \frac{\mu_{te}}{kT} \quad (2.8)$$

получим

$$\begin{aligned} n_e &= \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{kT}{c\hbar} \right)^3 I_{n-}, \quad E_e = \frac{1}{\pi^2 \rho} \left( \frac{kT}{c\hbar} \right)^3 kT I_{E-}, \\ P_e &= \frac{1}{3\pi^2} \left( \frac{kT}{c\hbar} \right)^3 kT I_{P-}, \\ S_e &= \frac{k}{\pi^2 \rho} \left( \frac{kT}{c\hbar} \right)^3 \left( I_{E-} - \beta I_{n-} + \frac{1}{3} I_{P-} \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} I_{n-} &= \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1 + \exp(\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \beta)}, \quad I_{P-} = \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2 + \alpha^2} [1 + \exp(\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \beta)]}, \\ I_{E-} &= \int_0^\infty \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2} x^2 dx}{1 + \exp(\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \beta)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Когда  $kT \geq 0,1 m_e c^2$ , в термодинамическом равновесии необходимо учитывать позитроны. Аннигиляция пары  $e^- e^+$  приводит к рождению фотонов, химический потенциал которых в равновесии равен нулю,  $\mu_\Phi = 0$ . Из условия равновесия аннигиляции  $\mu_{te} + \mu_{te^+} = \mu_\Phi = 0$  следует равенство

$$\mu_{te^+} = -\mu_{te}. \quad (2.11)$$

Термодинамические функции для позитронов получаются из (2.9), где следует заменить  $\beta$  на  $-\beta$  и использовать интегралы  $I_{i+}$ ,  $i = n, E, P$ , получаемые из  $I_{i-}$  в (2.10) заменой  $\beta$  на  $-\beta$ . Нуклоны и ядра часто можно считать невырожденными и нерелятивистскими, поэтому для них, вместе

излучением, имеем

$$E_{N,r} = \frac{3}{2} \frac{kT}{\mu_N m_u} + \frac{aT^4}{\rho}, \quad (2.12)$$

$$P_{N,r} = \frac{\rho kT}{\mu_N m_u} + \frac{aT^4}{3}, \quad (2.13)$$

$$S_{N,r} = \frac{k}{\rho} \sum_i n_i \left\{ \frac{5}{2} + \ln \left[ \left( \frac{m_i kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{g_i}{n_i} \right] \right\} + \frac{4}{3} \frac{aT^3}{\rho}. \quad (2.14)$$

Здесь рассмотрено полностью ионизованное вещество. Если ядерные реакции не идут и весовые доли элементов неизменны ( $x_i = \text{const}$ ), то аналогично (1.18) имеем

$$S_N = \frac{k}{\mu_N m_u} \ln \left( \frac{T^{3/2}}{\rho} \right) + \text{const}. \quad (2.15)$$

В (2.12) – (2.15) использована величина

$$\mu_N = \left( \sum_i \frac{x_i}{A_i} \right)^{-1}, \quad (2.16)$$

равная среднему числу нуклонов в ядре. Для получения полных выражений термодинамических функция  $P$ ,  $E$  и  $S$  необходимо просуммировать соответствующие выражения для электронов, позитронов, ядер и излучения. Заряд ядер связан с избытком электронов над позитронами. Имеем

$$\frac{\rho}{\mu_Z m_u} = n_e - n_{e^+}, \quad \mu_Z = \left( \sum_i \frac{Z_i x_i}{A_i} \right)^{-1} - \text{число нуклонов на один электрон}. \quad (2.17)$$

Выражение (2.17) с учетом (2.9), (2.10) служит для нахождения зависимости  $\mu_{te}(\rho, T)$ . Для случая полной ионизации при  $y_{ii} = 1$ ,  $i = Z$  имеем из (1.6), (2.16) и (2.17)

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_N} + \frac{1}{\mu_Z} \quad (2.18)$$

В данном параграфе отсчет энергии ведется от энергии покоя ядер, которая в отсутствии ядерных превращений остается неизменной.

Рассмотрим предельные случаи формул (2.9).

а) Сильное вырождение. При нулевой температуре электроны заполняют фазовое пространство вплоть до граничного импульса Ферми  $p_{Fe}$ . Плотность электронов равна удвоенному (за счет статистического веса) числу ячеек в сферической области фазового пространства радиусом  $p_{Fe}$ :

$$n_e = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi}{3} p_{Fe}^3 = \frac{p_{Fe}^3}{3\pi^2 \hbar^3}. \quad (2.19)$$

С учетом (2.17) получаем в отсутствие позитронов

$$p_{Fe} = \left( \frac{3\pi^2 \rho}{\mu_Z m_u} \right)^{1/3} \quad \hbar = \left( \frac{1,027 \rho}{10^6 \mu_Z} \right)^{1/3} m_e c. \quad (2.20)$$

Кинетическая энергия электрона на границе фазовой области называется энергией Ферми:

$$\epsilon_{Fe} = (m_e^2 c^4 + p_{Fe}^2 c^2)^{1/2} - m_e c^2 = m_e c^2 (\sqrt{1 + y^2} - 1), \quad y = \frac{p_{Fe}}{m_e c}, \quad (2.21)$$

$$\rho = \frac{m_e^3 c^3 \mu_Z m_u}{3\pi^2 \hbar^3} y^3 = 9,740 \cdot 10^5 \mu_Z \left[ \left( \frac{\epsilon_{Fe}}{m_e c^2} + 1 \right)^2 - 1 \right]^{3/2}.$$

Учтя, что  $f_e = 1$  при  $p < p_{Fe}$  и  $f_e = 0$  при  $p > p_{Fe}$ , получаем из (2.5), (2.6)

$$E_e = \frac{2}{\rho} \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_{Fe}} (p^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2} p^2 dp =$$

$$= \frac{m_e^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3 \rho} g(y) = \frac{6,002 \cdot 10^{22}}{\rho} g(y), \quad (2.22)$$

$$P_e = \frac{2}{3} \frac{4\pi c}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_{Fe}} (p^2 + m_e^2 c^2)^{-1/2} p^4 dp = \frac{m_e^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} f(y),$$

где

$$f(y) = y(2y^2 - 3)\sqrt{y^2 + 1} + 3 \operatorname{Arsh} y,$$

$$g(y) = 3y(2y^2 + 1)\sqrt{y^2 + 1} - 3 \operatorname{Arsh} y, \quad (2.23)$$

$$g(y) + f(y) = 8y^3 \sqrt{y^2 + 1}.$$

Температурные поправки при сильном вырождении находятся из разложения общих формул с помощью соотношения [145]

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(u) du}{e^{u-u_0} + 1} = \int_0^{u_0} \varphi(u) du + \frac{\pi^2}{6} \varphi'(u_0) + \frac{7\pi^4}{360} \varphi'''(u_0) + \dots, \quad (2.24)$$

которое справедливо при  $e^{-u_0} \ll 1$ . Обозначая  $u = \sqrt{x^2 + \alpha^2} - \alpha$ ,  $u_0 = \beta - \alpha$  и пренебрегая вкладом позитронов  $\sim e^{-u_0}$ , получаем [166] из (2.9) – (2.10)

$$n_e = \frac{1}{3\pi^2} \left( \frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 \left[ y_1^3 + \frac{\pi^2}{\alpha^2 y_1} \left( y_1^2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{7\pi^4}{40\alpha^4 y_1^5} + \dots \right], \quad (2.25)$$

$$E_e = \frac{m_e^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3 \rho} \left[ g(y_1) + \frac{4\pi^2}{\alpha^2 y_1} (3y_1^2 + 1)\sqrt{y_1^2 + 1} + \right.$$

$$\left. + \frac{7\pi^4}{5\alpha^4 y_1^5} (2y_1^4 - y_1^2 + 1)\sqrt{y_1^2 + 1} + \dots \right], \quad (2.26)$$

$$P_e = \frac{m_e^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} \left[ f(y_1) + \frac{4\pi^2}{\alpha^2} y_1 \sqrt{y_1^2 + 1} + \frac{7\pi^4}{15\alpha^4 y_1^3} (2y_1^2 - 1)\sqrt{y_1^2 + 1} + \dots \right]. \quad (2.27)$$

$$S_e = \frac{m_e^2 c}{3\hbar^3 \rho} k^2 T \left[ y_1 \sqrt{y_1^2 + 1} + \frac{7\pi^2}{15\alpha^2 y_1^3} \left( y_1^2 - \frac{1}{2} \right) \sqrt{y_1^2 + 1} + \dots \right]. \quad (2.28)$$

Здесь  $y_1 = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}/\alpha$ , параметр разложения  $\alpha y_1 \gg 1$ , а функции  $\varphi(u)$  после сведения интегралов (2.10) к виду (2.24) равны  $\varphi_n = (u + \alpha)\sqrt{u^2 + 2u\alpha}$ ,  $\varphi_E = (u + \alpha)^2\sqrt{u^2 + 2u\alpha}$ ,  $\varphi_P = (u^2 + 2u\alpha)^{3/2}$ . Найдем явную зависимость  $E_e$ ,  $P_e$  и  $S_e$  от  $\rho$  и  $T$ , оставляя только члены  $\sim \alpha^{-2}$ . Используя определение  $y$  из (2.20), (2.21) и соотношение (2.25), получаем связь между  $y$ ,  $y_1$  и  $\alpha$ :

$$y = \left(\frac{3\pi^2\rho}{\mu_Z m_u}\right)^{1/3} \frac{\hbar}{m_e c}, \quad y^3 = y_1^3 + \frac{\pi^2}{\alpha^2 y_1} \left(y_1^2 + \frac{1}{2}\right). \quad (2.29)$$

Учтя малость  $(y^3 - y_1^3)$ , получим

$$y_1^3 = y^3 - \frac{\pi^2}{\alpha^2 y} \left(y^2 + \frac{1}{2}\right).$$

После подстановки  $y_1(y)$  в (2.23), (2.25) – (2.28) имеем

$$g(y_1) = g(y) - \frac{8\pi^2}{\alpha^2 y} \left(y^2 + \frac{1}{2}\right) \sqrt{y^2 + 1},$$

$$f(y_1) = f(y) - \frac{8\pi^2}{3\alpha^2} \left(y^2 + \frac{1}{2}\right) \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

и явные выражения термодинамических функций

$$E_e = \frac{m_e^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3 \rho} \left[ g(y) + \frac{4\pi^2}{\alpha^2} y \sqrt{y^2 + 1} \right],$$

$$P_e = \frac{m_e^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3 \rho} \left[ f(y) + \frac{4\pi^2}{3\alpha^2} y \frac{y^2 + 2}{\sqrt{y^2 + 1}} \right], \quad (2.30)$$

$$S_e = \frac{m_e^2 c}{3\hbar^3 \rho} k^2 T y \sqrt{y^2 + 1}.$$

В предельных случаях функции  $f$  и  $g$  равны

$$f(y) \approx \frac{8}{5} y^5 \left(1 - \frac{5}{14} y^2\right), \quad g(y) \approx 8y^3 + \frac{12}{5} y^5 \left(1 - \frac{5}{28} y^2\right) \text{ при } y \ll 1, \quad (2.31)$$

и

$$f(y) \approx 2y^4 \left(1 - \frac{1}{y^2}\right), \quad g(y) \approx 6y^4 \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) \text{ при } y \gg 1.$$

Учтя (2.31), в нерелятивистском пределе  $y \ll 1$  получаем из (2.30)

$$E_e = \frac{m_e c^2}{\mu_Z m_u} + \frac{m_e^4 c^5}{10\pi^2 \hbar^3 \rho} y^5 \left(1 - \frac{5}{28} y^2 + \frac{5\pi^2}{3\alpha^2 y^4}\right) \quad (2.32)$$

$$P_e = \frac{m_e^4 c^5}{15\hbar^3 \pi^2} y^5 \left(1 - \frac{5}{14} y^2 + \frac{5\pi^2}{3\alpha^2 y^4}\right).$$

В ультрарелятивистском пределе  $y \gg 1$  соответственно имеем

$$\begin{aligned}
 E_e &= \frac{m_e^4 c^5}{4\pi^2 \hbar^3 \rho} y^4 \left( 1 + \frac{1}{y^2} + \frac{2\pi^2}{3\alpha^2 y^2} \right), \\
 P_e &= \frac{m_e^4 c^5}{12\pi^2 \hbar^3} y^4 \left( 1 - \frac{1}{y^2} + \frac{2\pi^2}{3\alpha^2 y^2} \right), \\
 S_e &= \frac{m_e^2 c}{3\hbar^3 \rho} k^2 T y^2.
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

б) **Очень малая плотность вещества.** Плотность вещества может быть настолько малой, что концентрация пар превысит концентрацию исходных электронов. В этом случае малым параметром является величина  $\beta \ll 1$ ; при  $\beta = 0$  имеет место  $n_e = n_{e+}$ . Разлагая (2.10) в ряд по  $\beta$ , получим, используя интегрирование по частям,

$$\begin{aligned}
 I_{n\mp} &= I_2 \pm \beta I_1, \quad I_{P\mp} = I_3 \pm 3\beta I_2 + \frac{3}{2} \beta^2 I_1, \\
 I_{E\mp} &= I_4 \pm \beta (\alpha^2 I_0 + 3I_2) + \frac{\beta^2}{2} I_5,
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

где

$$\begin{aligned}
 I_0(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{dx}{1 + \exp\sqrt{x^2 + \alpha^2}}, \\
 I_1(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{(2x^2 + \alpha^2) dx}{\sqrt{x^2 + \alpha^2} (1 + \exp\sqrt{x^2 + \alpha^2})}, \\
 I_2(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1 + \exp\sqrt{x^2 + \alpha^2}}, \\
 I_3(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2 + \alpha^2} (1 + \exp\sqrt{x^2 + \alpha^2})}, \\
 I_4(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{x^2 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx}{1 + \exp\sqrt{x^2 + \alpha^2}}, \\
 I_5(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{(3x^2 + \alpha^2) \exp\sqrt{x^2 + \alpha^2}}{(1 + \exp\sqrt{x^2 + \alpha^2})^2} dx.
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

При  $\alpha = 0$  интегралы (2.35) выражаются [145] через  $\Gamma$ -функцию и  $\zeta$ -функцию Римана с помощью соотношения

$$F_\nu(0) = \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1} dx}{1 + e^x} = (1 - 2^{1-\nu}) \Gamma(\nu) \zeta(\nu), \quad \nu > 0
 \tag{2.36}$$

формулы

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \ln 2.$$

Учитывая для целых  $\nu = n$  значения  $\zeta(n)$  из [145] и  $\Gamma(n) = (n-1)!$ , получаем

$$I_0(0) = \ln 2; \quad I_1(0) = \frac{\pi^2}{6}; \quad I_2(0) = \frac{3}{2} \zeta(3) = 1,80308; \\ I_3(0) = I_4(0) = \frac{7\pi^4}{120}; \quad I_5(0) = 3I_1(0) = \pi^2/2. \quad (2.37)$$

С учетом (2.34)–(2.37) и определения  $y$  в (2.29), термодинамические функции с учетом (2.9), (2.17) примут вид

$$\beta = \frac{y^3 \alpha^3}{\pi^2 A_2}, \quad n_{e\mp} = \frac{15}{\pi^4} I_2(0) \frac{aT^3}{k} A_1 \left( 1 \pm \frac{1}{6I_2(0)} \frac{y^3 \alpha^3}{A_1} \right), \\ E_{e-} + E_{e+} = \frac{7}{4} \frac{aT^4}{\rho} B_0 \left( 1 + \frac{30}{7\pi^6} \frac{B_2}{B_0 A_2^2} y^6 \alpha^6 \right), \quad (2.38) \\ P_{e-} + P_{e+} = \frac{7}{12} aT^4 A_0 \left( 1 + \frac{30}{7\pi^6} \frac{y^6 \alpha^6}{A_0 A_2} \right), \\ S_{e-} + S_{e+} = \frac{7}{3} \frac{aT^3}{\rho} \frac{3B_0 + A_0}{4} \left( 1 + \frac{15}{7\pi^6} \frac{6B_2 - 2A_2}{3B_0 + A_0} \frac{y^6 \alpha^6}{A_2^2} \right),$$

где введены функции

$$A_0(\alpha) = \frac{120}{7\pi^4} I_3(\alpha), \quad A_2(\alpha) = \frac{6}{\pi^2} I_1(\alpha), \\ B_0(\alpha) = \frac{120}{7\pi^4} I_4(\alpha), \quad B_2(\alpha) = \frac{2}{\pi^2} I_5(\alpha), \quad (2.39) \\ A_1(\alpha) = \frac{I_2(\alpha)}{I_2(0)}.$$

В случае ультрарелятивистских пар  $\alpha \ll 1$  для (2.39) имеют место асимптотические представления [166]

$$A_0 = 1 - \frac{15}{7\pi^2} \alpha^2, \quad A_2 = 1 - \frac{3}{2\pi^2} \alpha^2, \\ B_0 = 1 - \frac{5}{7\pi^2} \alpha^2, \quad B_2 = 1 - \frac{1}{2\pi^2} \alpha^2, \quad (2.40) \\ A_1 = 1 - \frac{\ln 2}{2I_2(0)} \alpha^2.$$

Из (2.38)–(2.40) получаем термодинамические функции вблизи ультрарелятивистских пар в газе малой плотности

$$\begin{aligned}
 n_{\mp} &= \frac{15}{\pi^4} I_2(0) \frac{aT^3}{k} \left( 1 - \frac{\ln 2}{2I_2(0)} \alpha^2 \pm \frac{1}{6I_2(0)} y^3 \alpha^3 \right), \\
 E_{e-} + E_{e+} &= \frac{7}{4} \frac{aT^4}{\rho} \left( 1 - \frac{5}{7\pi^4} \alpha^2 + \frac{30}{7\pi^6} y^6 \alpha^6 \right), \\
 P_{e-} + P_{e+} &= \frac{7}{12} aT^4 \left( 1 - \frac{15}{7\pi^4} \alpha^2 + \frac{30}{7\pi^6} y^6 \alpha^6 \right), \\
 S_{e-} + S_{e+} &= \frac{7}{3} \frac{aT^3}{\rho} \left( 1 - \frac{15}{14\pi^4} \alpha^2 + \frac{15}{7\pi^6} y^6 \alpha^6 \right).
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

В нерелятивистском пределе  $\alpha \gg 1$ , оставляя два члена при разложении знаменателя в (2.35), имеем [93]

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{360}{7\pi^4} \alpha^2 \left[ K_2(\alpha) - \frac{1}{4} K_2(2\alpha) \right], \\
 B_0 &= \frac{120}{7\pi^4} \alpha^2 \left[ \alpha K_1(\alpha) + 3K_2(\alpha) - \frac{\alpha}{2} K_1(2\alpha) - \frac{3}{4} K_2(2\alpha) \right], \\
 A_1 &= \frac{\alpha^2}{I_2(0)} \left[ K_2(\alpha) - \frac{1}{2} K_2(2\alpha) \right], \quad A_2 = \frac{6\alpha^2}{\pi^4} [K_2(\alpha) - K_2(2\alpha)], \\
 B_2 &= \frac{2\alpha^2}{\pi^2} [\alpha K_1(\alpha) + 3K_2(\alpha) - 2\alpha K_1(2\alpha) - 3K_2(2\alpha)],
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

где  $K_n(\alpha)$  – функции Бесселя мнимого аргумента (Ганкеля), имеющие разложения при  $\alpha \gg 1$  [93]:

$$\begin{aligned}
 K_1(\alpha) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} e^{-\alpha} \left( 1 + \frac{3}{8\alpha} - \frac{15}{128\alpha^2} \right), \\
 K_2(\alpha) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} e^{-\alpha} \left( 1 + \frac{15}{8\alpha} + \frac{105}{128\alpha^2} \right).
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

В табл. 3 приведены значения функций  $A_i(\alpha)$ ,  $B_i(\alpha)$  для  $0 \leq \alpha \leq 10$ , полученные численным интегрированием в [167].

в) Слабое вырождение. Слабое вырождение соответствует  $f_e \ll 1$  в (2.2). Тогда в интегралах (2.10) можно провести разложение в ряд, воспользовавшись большим значением экспоненты в знаменателе. Оставляя два первых члена разложения, получаем [218, 166, 363, 93]

$$\begin{aligned}
 I_{n\mp} &= \alpha^2 \left[ K_2(\alpha) e^{\pm\beta} - \frac{1}{2} K_2(2\alpha) e^{\pm 2\beta} \right], \\
 I_{P\mp} &= 3\alpha^2 \left[ K_2(\alpha) e^{\pm\beta} - \frac{1}{4} K_2(2\alpha) e^{\pm 2\beta} \right], \\
 I_{E\mp} &= \alpha^3 \left[ K_1(\alpha) e^{\pm\beta} + \frac{3}{\alpha} K_2(\alpha) e^{\pm\beta} - \frac{1}{2} K_1(2\alpha) e^{\pm 2\beta} - \frac{3}{4\alpha} K_2(2\alpha) e^{\pm 2\beta} \right].
 \end{aligned} \tag{2.44}$$



Таблица 3

Значение функций  $A_j(\alpha)$ ,  $B_j(\alpha)$  для  $0 < \alpha < 10$ 

$\alpha$	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$B_0$	$B_1$	$B_2$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,50	9,4989 (-1)	9,5476 (-1)	9,6299 (-1)	9,8119 (-1)	9,8342 (-1)	9,8702 (-1)
1,00	8,2749 (-1)	8,4020 (-1)	8,6278 (-1)	9,2303 (-1)	9,3130 (-1)	9,4529 (-1)
1,50	6,7622 (-1)	6,9345 (-1)	7,2532 (-1)	8,3028 (-1)	8,4519 (-1)	8,7168 (-1)
2,00	5,2709 (-1)	5,4480 (-1)	5,7846 (-1)	7,1580 (-1)	7,3497 (-1)	7,7039 (-1)
2,50	3,9653 (-1)	4,1217 (-1)	4,4246 (-1)	5,9438 (-1)	6,1464 (-1)	6,5311 (-1)
3,00	2,9030 (-1)	3,0290 (-1)	3,2762 (-1)	4,7800 (-1)	4,9689 (-1)	5,3345 (-1)
3,50	2,0806 (-1)	2,1764 (-1)	2,3656 (-1)	3,7418 (-1)	3,9040 (-1)	4,2216 (-1)
4,00	1,4661 (-1)	1,5360 (-1)	1,6748 (-1)	2,8635 (-1)	2,9949 (-1)	3,2544 (-1)
4,50	1,0189 (-1)	1,0685 (-1)	1,1675 (-1)	2,1497 (-1)	2,2520 (-1)	2,4549 (-1)
5,00	7,0003 (-2)	7,3461 (-2)	8,0361 (-2)	1,5877 (-1)	1,6650 (-1)	1,8188 (-1)
5,50	4,7634 (-2)	5,0006 (-2)	5,4746 (-2)	1,1563 (-1)	1,2133 (-1)	1,3271 (-1)
6,00	3,2147 (-2)	3,3756 (-2)	3,6973 (-2)	8,3190 (-2)	8,7329 (-2)	9,5597 (-2)
7,00	1,4345 (-2)	1,5066 (-2)	1,6510 (-2)	4,1752 (-2)	4,3848 (-2)	4,8039 (-2)
8,00	6,2613 (-3)	6,5769 (-3)	7,2085 (-3)	2,0259 (-2)	2,1280 (-2)	2,3321 (-2)
9,00	2,6856 (-3)	2,8211 (-3)	3,0922 (-3)	9,5667 (-3)	1,0049 (-2)	1,1014 (-2)
10,0	1,1356 (-3)	1,1929 (-3)	1,3076 (-3)	4,4175 (-3)	4,6404 (-3)	5,0864 (-3)

В данной и последующих таблицах в скобках указан порядок величины

Из (2.17) имеем с нужной точностью, учтя (2.44) и величину  $u$  из (2.29),

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \beta &= \frac{\alpha y^3}{6K_2(\alpha)} \left[ 1 + \frac{K_2(2\alpha)}{K_2(\alpha)} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}} \right], \\ \operatorname{ch} \beta &= \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}} + \frac{K_2(2\alpha)}{K_2(\alpha)} \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}, \\ \operatorname{ch} 2\beta &= 1 + 2 \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}, \quad \operatorname{sh} 2\beta = \frac{\alpha y^3}{3K_2(\alpha)} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}}, \\ \beta &= \ln \left[ \frac{\alpha y^3}{6K_2(\alpha)} + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}} \right] + \frac{K_2(2\alpha)}{K_2(\alpha)} \frac{\alpha y^3}{6K_2(\alpha)}. \quad *) \end{aligned} \quad (2.45)$$

При выводе (2.45) использовалась малость членов, содержащих  $K_2(2\alpha)$ , которые учитывают слабое вырождение. С помощью (2.44), (2.45) получаем из (2.9)

$$\begin{aligned} n_{e-} + n_{e+} &= \frac{6\rho}{\mu_Z m_u y^3} \left[ \frac{K_2(\alpha)}{\alpha} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}} - \frac{K_2(2\alpha)}{2\alpha} \right], \\ E_{e-} + E_{e+} &= \frac{6kT}{\mu_Z m_u y^3} \left\{ \left[ K_1(\alpha) + \frac{3}{\alpha} K_2(\alpha) \right] \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}} + \right. \\ &+ \left[ \frac{3}{2\alpha} K_2(2\alpha) - K_1(2\alpha) + \frac{K_1(\alpha)K_2(2\alpha)}{K_2(\alpha)} \right] \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)} - \frac{1}{2} K_1(2\alpha) - \\ &\left. - \frac{3}{4\alpha} K_2(2\alpha) \right\}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} P_{e-} + P_{e+} &= \frac{6\rho kT}{\mu_Z m_u y^3} \left[ \frac{K_2(\alpha)}{\alpha} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}} + \frac{1}{2\alpha} K_2(2\alpha) \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{4} \frac{K_2(2\alpha)}{\alpha} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{e-} + S_{e+} &= \frac{6k}{\mu_Z m_u y^3} \left\{ \left[ K_1(\alpha) + \frac{4}{\alpha} K_2(\alpha) \right] \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}} - \right. \\ &- \frac{y^3}{6} \ln \left[ \frac{\alpha y^3}{6K_2(\alpha)} + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}} \right] + \left[ \frac{K_2(2\alpha)}{\alpha} - K_1(2\alpha) + \right. \\ &\left. + \frac{K_1(\alpha)K_2(2\alpha)}{K_2(\alpha)} \right] \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)} - \frac{K_1(2\alpha)}{2} - \frac{K_2(2\alpha)}{\alpha} \left. \right\}. \end{aligned}$$

Формулы (2.46) справедливы для слабо вырожденного газа произвольной плотности, в том числе очень малой, когда число рождающихся пар много больше исходного числа электронов и  $\lambda = \alpha^2 y^6 / 36K_2^2(\alpha) \ll 1$ . Необходимо

\*) Напомним, что  $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

также, чтобы газ не был релятивистским, так как при  $\alpha \leq 1$  рождающиеся пары заполняют фазовое пространство даже при очень малой плотности. Таким образом, для применимости (2.46) требуется выполнение условия  $\alpha \gg 1$ , когда справедливо разложение (2.43)\*).

При  $\lambda \gg 1$  из (2.46) и (2.43), оставляя два члена разложения по  $1/\lambda$ , получаем термодинамические функции идеального газа с поправками на вырождение, релятивизм и рождение пар (см. также [166])

$$\begin{aligned}
 n_{e-} + n_{e+} &= \frac{\rho}{\mu_Z m_u} \left\{ 1 + \frac{9\pi}{\alpha^3 y^6} e^{-2\alpha} \left[ 1 + \frac{15}{4\alpha} - \frac{\alpha^{3/2} y^3}{6\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{15}{16\alpha} \right) \right] \right\}, \\
 E_{e-} + E_{e+} &= \frac{m_e c^2}{\mu_Z m_u} + \frac{3}{2} \frac{kT}{\mu_Z m_u} \left\{ 1 + \frac{5}{4\alpha} + \frac{\alpha^{3/2} y^3}{12\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{15}{16\alpha} \right) + \right. \\
 &+ \left. \frac{6\pi}{\alpha^2 y^6} e^{-2\alpha} \left[ 1 + \frac{21}{4\alpha} - \frac{\alpha^{3/2} y^3}{6\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{27}{16\alpha} \right) \right] \right\}, \\
 P_{e-} + P_{e+} &= \frac{\rho kT}{\mu_Z m_u} \left\{ 1 + \frac{\alpha^{3/2} y^3}{12\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{45}{16\alpha} \right) + \frac{9\pi}{\alpha^3 y^6} e^{-2\alpha} \left[ 1 + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{15}{4\alpha} - \frac{\alpha^{3/2} y^3}{12\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{15}{16\alpha} \right) \right] \right\}, \\
 S_{e-} + S_{e+} &= \frac{k}{\mu_Z m_u} \left\{ \frac{5}{2} - \ln \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha^{3/2} y^3}{3} \right) + \frac{15}{4\alpha} + \frac{\alpha^{3/2} y^3}{24\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{45}{16\alpha} \right) + \right. \\
 &+ \left. \frac{9\pi}{\alpha^2 y^6} e^{-2\alpha} \left[ 1 + \frac{23}{4\alpha} - \frac{\alpha^{3/2} y^3}{6\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{35}{16\alpha} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Величина  $E_{e+} + E_{e-}$  в (2.47) включает энергию покоя рождающихся пар и их кинетическую энергию без релятивистских поправок, а в  $P_{e+} + P_{e-}$  учтены релятивистские поправки к давлению пар. В пределе очень малой плотности  $\lambda \ll 1$ , оставляя два члена разложения по  $\lambda$ , из (2.46) получаются формулы, совпадающие с нерелятивистским пределом формул (2.38) при учете (2.42).

г) **Нерелятивистский газ.** В этом случае  $\alpha \sim \beta \gg 1$  и вкладом позитронов можно пренебречь. Формулы (2.9) и (2.10) при этом сводятся к виду

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho}{\mu_Z m_u} &= \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \left( \frac{m_e kT}{\hbar^2} \right)^{3/2} F_{1/2}(\beta - \alpha), \\
 E_e &= \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 \rho} \left( \frac{m_e kT}{\hbar^2} \right)^{3/2} [kTF_{3/2}(\beta - \alpha) + m_e c^2 F_{1/2}(\beta - \alpha)] = \\
 &= \frac{m_e c^2}{\mu_Z m_u} + \frac{kT}{\mu_Z m_u} \frac{F_{3/2}(\beta - \alpha)}{F_{1/2}(\beta - \alpha)},
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

\*Если в (2.46) пренебречь слабым вырождением, то  $P_{e-} + P_{e+} = kT(n_{e-} + n_{e+})$ .

$$P_e = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi^2} \left( \frac{m_e kT}{\hbar^2} \right)^{3/2} kTF_{3/2}(\beta - \alpha) = \frac{2}{3} \frac{\rho kT}{\mu_Z m_u} \frac{F_{3/2}(\beta - \alpha)}{F_{1/2}(\beta - \alpha)},$$

$$S_e = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{k}{\rho} \left( \frac{m_e kT}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left[ \frac{5}{3} F_{3/2}(\beta - \alpha) - (\beta - \alpha) F_{1/2}(\beta - \alpha) \right] =$$

$$= \frac{k}{\mu_Z m_u} \left[ \frac{5}{3} \frac{F_{3/2}(\beta - \alpha)}{F_{1/2}(\beta - \alpha)} - (\beta - \alpha) \right],$$

где  $F_\nu(\xi)$  – интегралы Ферми

$$F_\nu(\xi) = \int_0^\infty \frac{y^\nu dy}{1 + \exp(y - \xi)}, \quad y = \frac{x^2}{2\alpha} = \frac{p^2}{2m_e kT}, \quad \xi = \beta - \alpha. \quad (2.49)$$

В нерелятивистском пределе кинетическая энергия электронов отделяется от энергии покоя. Если  $e^{-\beta+\alpha} \gg 1$ , то  $f_e \ll 1$  и вырождение несущественно.

В этом пределе получаем

$$F_{1/2}(\beta - \alpha) = e^{\beta - \alpha} \Gamma(3/2) [1 - 2^{-3/2} e^{\beta - \alpha}],$$

$$F_{3/2}(\beta - \alpha) = e^{\beta - \alpha} \Gamma(5/2) [1 - 2^{-5/2} e^{\beta - \alpha}]. \quad (2.50)$$

Первые члены в интегралах (2.50) приводят к термодинамическим функциям обычного газа (см. § 1). С учетом поправок из первого соотношения (2.48) и (2.49) имеем

$$e^{\beta - \alpha} = \frac{\rho}{\mu_Z m_u} \pi^{3/2} \sqrt{2} \left( \frac{\hbar^2}{m_e kT} \right)^{3/2} \left[ 1 + \frac{\rho}{\mu_Z m_u} \frac{\pi^{3/2}}{2} \left( \frac{\hbar^2}{m_e kT} \right)^{3/2} \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha^{3/2} y^3}{3} \left( 1 + \frac{\alpha^{3/2} y^3}{6\sqrt{\pi}} \right),$$

что приводит к термодинамическим функциям, следующим из (2.47), если в них пренебречь поправками на релятивизм ( $\sim 1/\alpha$ ) и рождение пар ( $\sim e^{-2\alpha}$ ). В пределе сильно вырожденного газа  $\beta - \alpha \gg 1$  для вычисления интегралов Ферми (2.49) воспользуемся формулой (2.24). Оставляя два первых члена разложения, получаем

$$F_{1/2}(\beta - \alpha) = \frac{2}{3} (\beta - \alpha)^{3/2} + \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{(\beta - \alpha)^{1/2}},$$

$$F_{3/2}(\beta - \alpha) = \frac{2}{5} (\beta - \alpha)^{5/2} + \frac{\pi^2}{4} (\beta - \alpha)^{3/2}. \quad (2.51)$$

Определяя из первого соотношения (2.48)

$$\beta - \alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{3\pi^2 \rho}{\mu_Z m_u} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m_e kT} \left[ 1 - \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{\mu_Z m_u}{3\pi^2 \rho} \right)^{4/3} \left( \frac{m_e kT}{\hbar^2} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{\alpha y^2}{2} \left( 1 - \frac{\pi^2}{3\alpha^2 y^4} \right), \quad (2.52)$$

получаем термодинамические функции, следующие из (2.32), если пренебречь в них релятивистскими поправками ( $\sim 1/\alpha^2$ ). Из (2.48) следует, что адиабата нерелятивистского электронного газа имеет вид  $T\rho^{-2/3} = \text{const}$ .  $P\rho^{-5/3} = \text{const}$  вне зависимости от степени вырождения. При этом  $E_{e, \text{кин}} = \frac{3}{2} P_e$ , где  $E_{e, \text{кин}} = E_e - \frac{m_e c^2}{\mu_Z m_u}$ . Та же связь  $\rho$ ,  $T$  и  $P$  вдоль адиабаты имеет место для любого одноатомного идеального нерелятивистского газа с постоянными  $\mu$  и  $\mu_Z$ .

д) Ультрарелятивистский газ. Когда кинетическая энергия электронов много больше их энергии покоя, величиной  $\alpha$  в интегралах (2.10) можно пренебречь, что, с учетом определения (2.49) позволит записать их в виде

$$I_{n\pm} = F_2(\pm\beta). \quad I_{P\pm} = I_{E\pm} = F_3(\pm\beta). \quad (2.53)$$

В ультрарелятивистском равновесном газе всегда имеет место  $\beta \geq 0$  и вырождение не может быть малым ввиду интенсивного рождения пар.

Интегралы Ферми целого индекса обладают свойствами, позволяющими выразить термодинамические функции ультрарелятивистского газа в виде полиномов по  $T$  и  $\beta$  [166]. Из (2.49) легко показать, что

$$\frac{dF_\nu(x)}{dx} = \nu F_{\nu-1}(x). \quad F_0(x) = \int_0^\infty \frac{dy}{1 + e^{y-x}} = \ln(1 + e^x),^* \quad (2.54)$$

$$F_0(x) - F_0(-x) = x.$$

Интегрируя последовательно первое соотношение (2.54), получаем

$$F_1(x) + F_1(-x) = \frac{x^2}{2} + 2F_1(0), \quad F_2(x) - F_2(-x) = \frac{x^3}{3} + 4F_1(0)x, \quad (2.55)$$

$$F_3(x) + F_3(-x) = \frac{x^4}{4} + 6F_1(0)x^2 + 2F_3(0).$$

Интегралы  $F_\nu(0)$  приведены в (2.36), откуда имеем

$$F_1(0) = \pi^2/12; \quad F_2(0) = \frac{3}{2} \zeta(3) = 1.803; \quad F_3(0) = 7\pi^4/120.$$

В итоге получаем значения термодинамических функций для  $e^-e^+$ -пар в виде

$$\frac{\rho}{\mu_Z m_u} = \frac{1}{3\pi^2} \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^3 (\beta^3 + \pi^2 \beta),$$

$$E_{e^-} + E_{e^+} = \frac{1}{4\pi^2 \rho} \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \left( \beta^4 + 2\pi^2 \beta^2 + \frac{7\pi^4}{15} \right) kT,$$

$$P_{e^-} + P_{e^+} = \frac{1}{3} \rho (E_{e^-} + E_{e^+}). \quad (2.56)$$

$$S_{e^-} + S_{e^+} = \frac{k}{3\pi^2 \rho} \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \left( \pi^2 \beta^2 + \frac{7\pi^4}{15} \right).$$

\*Интеграл берется с помощью замены  $z = \exp\left(\frac{x-y}{2}\right)$ .

В пределе сильного вырождения  $\beta \gg (1, \alpha)$  вклад позитронов пренебрежимо мал, и из первого соотношения (2.56) и (2.29) имеем

$$\beta = \left( \frac{3\pi^2 \rho}{\mu_Z m_u} \right)^{1/3} \frac{\hbar c}{kT} \left[ 1 - \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{\mu_Z m_u}{3\pi^2 \rho} \right)^{2/3} \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^2 \right] = \alpha y \left( 1 - \frac{\pi^2}{3\alpha^2 y^2} \right).$$

Это приводит к термодинамическим функциям (2.33) без членов  $\sim y^{-2}$ , задающих отклонения от ультрарелятивизма. В ультрарелятивистском газе малой плотности при  $\beta \rightarrow 0$  имеем

$$\beta = \frac{3\rho}{\mu_Z m_u} \left( \frac{\hbar c}{kT} \right)^3 \left[ 1 - \frac{1}{\pi^6} \left( \frac{3\pi^2 \rho}{\mu_Z m_u} \right)^2 \left( \frac{\hbar c}{kT} \right)^6 \right] = \frac{y^3 \alpha^3}{\pi^2} \left( 1 - \frac{y^6 \alpha^6}{\pi^6} \right),$$

что приводит к термодинамическим функциям, следующим из (2.41) без учета отклонений от ультрарелятивизма  $\sim \alpha^{-2}$ . Из (2.56) следует, что вдоль адиабаты ультрарелятивистского газа выполняются соотношения  $T\rho^{-1/3} = \text{const}$ ,  $P\rho^{-4/3} = \text{const}$ . Из полученных выше явных выражений термодинамических функций в зависимости от  $\rho$  и  $T$  легко, с помощью (1.11)–(1.17), найти явные выражения для адиабатических показателей и теплоемкостей во всех предельных случаях. Области применимости асимптотических формул с точностью  $\sim 1\%$  изображены на рис. 2. Некоторые асимптотические формулы с большим числом членов разложения

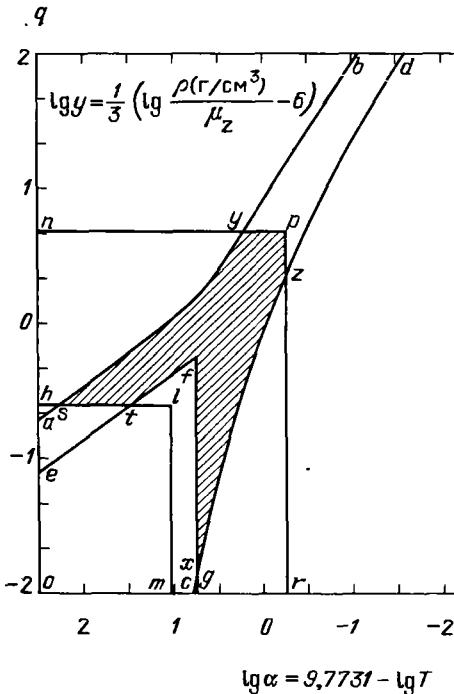


Рис. 2. Области применимости приближенных асимптотических формул на плоскости  $\lg y = \frac{1}{3} (\lg (\rho/\mu_Z) - 6,0116)$ ,  $\lg \alpha = 9,7731 - \lg T$ :

А) левее линии  $ayb$  применимо приближение вырожденного газа с поправками (2.30),

В) правее линии  $czd$  – приближение малой плотности (2.38),

С) внутри области  $oefg$  – приближение почти невырожденного почти нерелятивистского газа (2.46),

Д)  $ohlm$  – область применимости приближения нерелятивистского газа (2.48),

Е) правее и выше ломаной  $npr$  применимо приближение ультрарелятивистского газа (2.56).

В следующих областях применимы различные приближения:

1)  $nqby$  – приближения А и Е,  
2) правее ломаной  $rzd$  – приближения В и Е.

3)  $sxg$  – приближения В и С.

4)  $oetlm$  – приближения С и Д.

5)  $ahs$  – приближения А и Д.

Заштрихована область, где необходим численный расчет интегралов, входящих в термодинамические функции, например, методом Гаусса

Корни и коэффициенты для вычисления интегралов (2,57) методом Гаусса при  $n = 5$ , при  $p = 0, 1, 2, 3, 4$  (см., например [29])

Корни $x_i$ и коэффициенты $A_i$	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
$x_1$	0,26356	0,61703	1,0311	1,4906	1,9859
$x_2$	1,4134	2,1130	2,8372	3,5813	4,3417
$x_3$	3,5964	4,6108	5,6203	6,6270	7,6320
$x_4$	7,0858	8,3991	9,6829	10,944	12,188
$x_5$	12,641	14,260	15,828	17,357	18,852
$A_1$	0,52176	0,34801	0,52092	1,2510	4,1856
$A_2$	0,39867	0,50228	1,0667	3,2386	12,877
$A_3$	0,075942	0,14092	0,38355	1,3902	6,3260
$A_4$	3,6118 (-3)	8,7199 (-3)	0,028564	0,11904	0,60475
$A_5$	2,3370 (-5)	6,8973 (-5)	2,6271 (-4)	1,2328 (-3)	6,8976 (-3)

даны в работе [166], рассчитанные по ним таблицы и интерполяционные коэффициенты приведены в [167], см. также [67a].

е) Анализ общего случая. При отсутствии малых параметров для расчета термодинамических функций нужно вычислять интегралы (2.10) численно. Весьма эффективным является метод, аналогичный методу Гаусса [137], и использованный для этих целей в работе [46]. Подынтегральные выражения в (2.10) представляются в виде  $f(x)x^p e^{-x}$ , где функция  $f(x)$  ограничена на любом конечном интервале и хорошо аппроксимируется каким-нибудь полиномом степени  $\leq 2n - 1$  на интервале  $(0, N)$  при достаточно большом  $N$ . Вычисления проводятся по следующей квадратурной формуле:

$$\int_0^{\infty} f(x)x^p e^{-x} dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i), \quad (2.57)$$

где  $x_i$  — корни полинома Лагерра  $L_n^{(p)}$ , а коэффициенты  $A_i$  определяются системой линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^n A_i x_i^k = (k+p)!,$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Формула (2.57) является точной, если  $f(x)$  — полином степени  $\leq 2n - 1$ . Это следует из условия ортогональности полиномов Лагерра  $L_n^{(p)}$  на промежутке  $(0, \infty)$  с весом  $x^p e^{-x}$ . Значение  $p = 2$  можно использовать при вычислении  $I_n$  и  $p = 3$  для  $I_E$  и  $I_P$  из (2.10). Значения  $x_i$  и  $A_i$  для пятиточечной схемы ( $n = 5$ ) приведены в таблице 4 [29] для  $p = 0, 1, 2, 3, 4$ .

Выражения для адиабатического показателя  $\gamma_1$  и теплоемкостей в общем случае при постоянном ядерном составе получены в [46]

$$\gamma_1 = \left( \kappa + \frac{N^2}{M} \right) \left[ 1 + \frac{(\mu_N/\mu_Z)\pi^4}{45(I_{n-} - I_{n+})} + \frac{(\mu_N/\mu_Z)(I_{p-} + I_{p+})}{3(I_{n-} - I_{n+})} \right]^{-1}, \quad (2.58)$$

$$C_v = \frac{k}{\mu_N m_u} M, \quad C_p = \frac{k}{\mu_N m_u} \left( M + \frac{N^2}{\kappa} \right),$$

где

$$M = \frac{3}{2} + \frac{\mu_N/\mu_Z}{I_{n-} - I_{n+}} \left\{ \frac{4\pi^4}{15} + \sum_{+,-} (3I_{E\pm} + I_{P\pm} + \alpha^2 I_{5\pm} + \alpha^2 I_{6\pm}^*) - \frac{[3(I_{n-} - I_{n+}) + \alpha^2(I_{4-} - I_{4+})]^2}{\sum_{+,-} (I_{5\pm} + I_{6\pm})} \right\},$$

$$N = 1 + \frac{\mu_N/\mu_Z}{3(I_{n-} - I_{n+})} \left\{ \frac{4\pi^4}{15} + \sum_{+,-} (3I_{E\pm} + I_{P\pm}) - \frac{3(I_{n-} - I_{n+})[3(I_{n-} - I_{n+}) + \alpha^2(I_{4-} - I_{4+})]}{\sum_{+,-} (I_{5\pm} + I_{6\pm})} \right\}, \quad (2.59)$$

$$\kappa = 1 + \frac{\mu_N}{\mu_Z} \frac{I_{n-} - I_{n+}}{\sum_{+,-} (I_{5\pm} + I_{6\pm})},$$

$$I_{4\pm} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + \exp(\sqrt{x^2 + \alpha^2} \pm \beta)},$$

$$I_{5\pm} = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2} dx}{1 + \exp(\sqrt{x^2 + \alpha^2} \pm \beta)},$$

$$I_{6\pm} = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + \alpha^2} [1 + \exp(\sqrt{x^2 + \alpha^2} \pm \beta)]}.$$

Безразмерный химический потенциал  $\beta$  вдоль изэнтропы удовлетворяет уравнению

$$T \frac{d\beta}{dT} = \frac{M}{N} \frac{I_{n-} - I_{n+}}{\sum_{+,-} (I_{5\pm} + I_{6\pm})} - \frac{3(I_{n-} - I_{n+}) + \alpha^2(I_{4-} - I_{4+})}{\sum_{+,-} (I_{5\pm} + I_{6\pm})}. \quad (2.60)$$

Зависимости  $\gamma_1(T)$ ,  $C_v(T)$ ,  $C_p/C_v(T)$  для чистого железа ( $A = 56$ ,  $\mu_N/\mu_Z = Z = 26$ ), построенные по формулам (2.58)–(2.60) в [46], приведены на рис. 3–5.



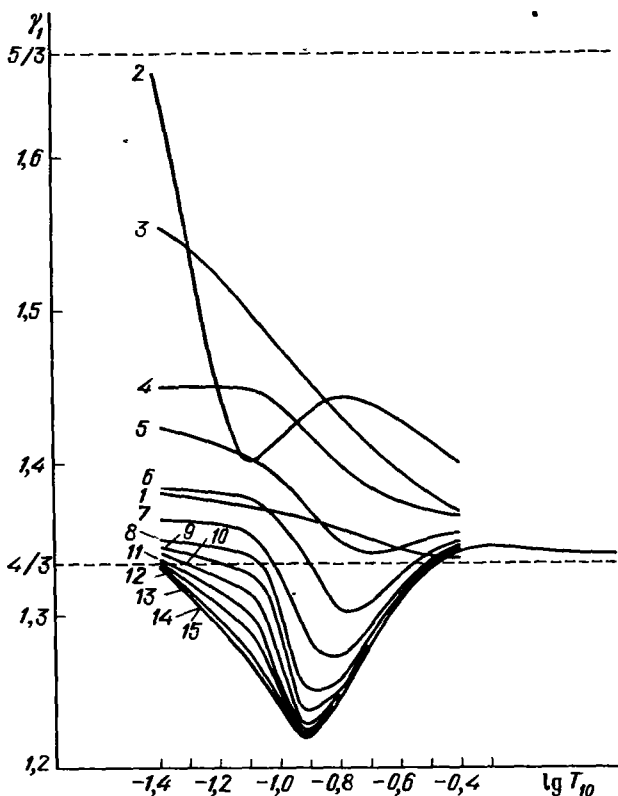


Рис. 3. Зависимость показателя адиабаты  $\gamma_1$  от температуры  $T$  для чистого железа вдоль изэнтроп, построенных на рис. 6

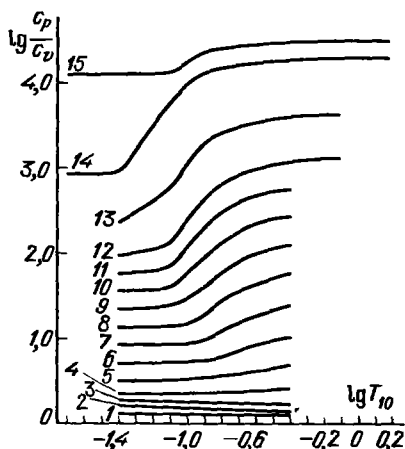
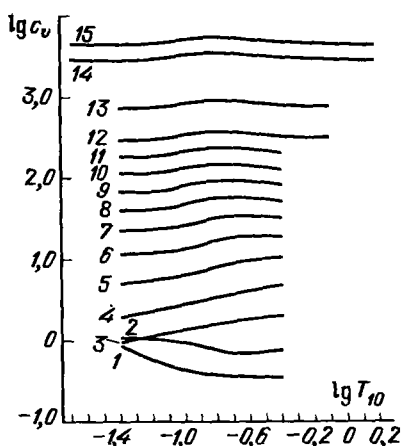


Рис. 4. Зависимость теплоемкости при постоянном объеме  $c_v$  от температуры  $T$  для чистого железа вдоль изэнтроп, построенных на рис. 6

Рис. 5. Зависимость отношения теплоемкостей  $c_p/c_v$  от температуры  $T$  для чистого железа вдоль изэнтроп, построенных на рис. 6

**Задача.** Найти релятивистские поправки к адиабатическому показателю  $\gamma_1$  в идеальном газе.

**Ответ.**  $\gamma_1 = \frac{5}{3} \left( 1 - \frac{\mu}{\mu_Z} \frac{kT}{m_e c^2} \right)$ . При этом использованы формулы (1.11), (2.13), (2.15), (2.18) и (2.47), где опущены поправки на вырождение и рождение пар  $\sim \alpha^{3/2} y^3$  и  $e^{-2\alpha}$ .

### § 3. Уравнение состояния при наличии ядерного равновесия и процессов слабого взаимодействия

Когда температура вещества достигает нескольких миллиардов кельвинов, характерные времена ядерных реакций  $t_n$  становятся меньше всех макроскопических времен и устанавливается равновесие относительно ядерного состава. В условиях ядерного равновесия концентрации ядер находятся из соотношения между химическими потенциалами ядер  $\mu_{A,Z}$ , нейтронов  $\mu_n$  и протонов  $\mu_p$ , аналогично условию химического равновесия

$$\mu_{A,Z} = Z\mu_p + (A - Z)\mu_n. \quad (3.1)$$

Для нерелятивистских и невырожденных ядер имеем [145]

$$\mu_{A,Z} = -kT \ln \left[ \left( \frac{m_{A,Z} kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{g_{A,Z}}{n_{A,Z}} \right] + m_{A,Z} c^2. \quad (3.2)$$

Равновесная концентрация ядер из (3.1), (3.2) имеет вид

$$n_{A,Z} = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{kT} \right)^{\frac{3}{2}(A-1)} \left( \frac{m_{A,Z}}{m_p^Z m_n^{A-Z}} \right)^{3/2} \times \quad (3.3)$$

$$\times \frac{g_{A,Z}}{g_p^Z g_n^{A-Z}} \exp \left\{ \frac{[Zm_p + (A - Z)m_n - m_{A,Z}] c^2}{kT} \right\} n_p^Z n_n^{A-Z}.$$

В предэкспоненте достаточно положить  $m_n = m_p = m_u$ ,  $m_{A,Z} = A m_u$ , а числитель в экспоненте есть энергия связи ядра  $B_{A,Z}$ . Учтя также  $g_p = g_n = 2$ , получим

$$n_{A,Z} = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{m_p kT} \right)^{\frac{3}{2}(A-1)} \frac{A^{3/2}}{2^A} g_{A,Z} e^{\frac{B_{A,Z}}{kT}} n_p^Z n_n^{A-Z}.$$

В табл. 5 приведены спины  $I$ , энергии связи  $B$  наиболее устойчивых ядер,  $g_{A,Z} = 2I_{A,Z} + 1$ . Благодаря экспоненциально быстрой зависимости скорости ядерных реакций от температуры (см. гл. 4), переход от застывшего ядерного состава к ядерному равновесию занимает узкую зону температур, где характерные времена ядерных реакций сравнимы с макроскопическими (тепловым или гидродинамическим) и где необходимо рассмотрение кинетики ядерных реакций. При данной температуре  $T$  и плотности

$$\rho = \sum_i n_{A_i Z_i} m_{A_i Z_i} + n_p m_p + n_n m_n \approx (\sum_i A_i n_{A_i Z_i} + n_p + n_n) m_u \quad (3.4)$$

для нахождения ядерного состава необходимо знать связь между концентрациями  $n_n$  и  $n_p$ .