

Задача. Найти релятивистские поправки к адиабатическому показателю γ_1 в идеальном газе.

Ответ. $\gamma_1 = \frac{5}{3} \left(1 - \frac{\mu}{\mu_Z} \frac{kT}{m_e c^2} \right)$. При этом использованы формулы (1.11), (2.13), (2.15), (2.18) и (2.47), где опущены поправки на вырождение и рождение пар $\sim \alpha^{3/2} y^3$ и $e^{-2\alpha}$.

§ 3. Уравнение состояния при наличии ядерного равновесия и процессов слабого взаимодействия

Когда температура вещества достигает нескольких миллиардов кельвинов, характерные времена ядерных реакций t_n становятся меньше всех макроскопических времен и устанавливается равновесие относительно ядерного состава. В условиях ядерного равновесия концентрации ядер находятся из соотношения между химическими потенциалами ядер $\mu_{A,Z}$, нейтронов μ_n и протонов μ_p , аналогично условию химического равновесия

$$\mu_{A,Z} = Z\mu_p + (A - Z)\mu_n. \quad (3.1)$$

Для нерелятивистских и невырожденных ядер имеем [145]

$$\mu_{A,Z} = -kT \ln \left[\left(\frac{m_{A,Z} kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{g_{A,Z}}{n_{A,Z}} \right] + m_{A,Z} c^2. \quad (3.2)$$

Равновесная концентрация ядер из (3.1), (3.2) имеет вид

$$n_{A,Z} = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{kT} \right)^{\frac{3}{2}(A-1)} \left(\frac{m_{A,Z}}{m_p^Z m_n^{A-Z}} \right)^{3/2} \times \quad (3.3)$$

$$\times \frac{g_{A,Z}}{g_p^Z g_n^{A-Z}} \exp \left\{ \frac{[Z\mu_p + (A - Z)\mu_n - m_{A,Z}] c^2}{kT} \right\} n_p^Z n_n^{A-Z}.$$

В предэкспоненте достаточно положить $m_n = m_p = m_u$, $m_{A,Z} = A m_u$, а числитель в экспоненте есть энергия связи ядра $B_{A,Z}$. Учтя также $g_p = g_n = 2$, получим

$$n_{A,Z} = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_p kT} \right)^{\frac{3}{2}(A-1)} \frac{A^{3/2}}{2^A} g_{A,Z} e^{\frac{B_{A,Z}}{kT}} n_p^Z n_n^{A-Z}.$$

В табл. 5 приведены спины I , энергии связи B наиболее устойчивых ядер, $g_{A,Z} = 2I_{A,Z} + 1$. Благодаря экспоненциально быстрой зависимости скорости ядерных реакций от температуры (см. гл. 4), переход от застывшего ядерного состава к ядерному равновесию занимает узкую зону температур, где характерные времена ядерных реакций сравнимы с макроскопическими (тепловым или гидродинамическим) и где необходимо рассмотрение кинетики ядерных реакций. При данной температуре T и плотности

$$\rho = \sum_i n_{A_i Z_i} m_{A_i Z_i} + n_p m_p + n_n m_n \approx (\sum_i n_{A_i Z_i} + n_p + n_n) m_u \quad (3.4)$$

для нахождения ядерного состава необходимо знать связь между концентрациями n_n и n_p .

Энергии связи и спины ядер стабильных изотопов наиболее обильных элементов [135, 180]

Атомный номер	Элемент (изотоп)	Энергия связи E_D , кэВ	Спин ядра I
1	^1H , ^2H	0,2225	1/2, 1
2	^3He , ^4He	7718, 28297	1/2, 0
6	^{12}C , ^{13}C	92165, 97112	0, 1/2
7	^{14}N , ^{15}N	104663, 115496	1, 1/2
8	^{16}O , ^{17}O , ^{18}O	127624, 131766, 139813	0, 5/2, 0
10	^{20}Ne , ^{21}Ne , ^{22}Ne	160651, 167412, 177778	0, 3/2, 0
11	^{23}Na	186570	3/2
12	^{24}Mg , ^{25}Mg , ^{26}Mg	198262, 205594, 216688	0, 5/2, 0
13	^{27}Al	224959	5/2
14	^{28}Si , ^{29}Si , ^{30}Si	236544, 245018, 255627	0, 1/2, 0
15	^{31}P	262925	1/2
16	^{32}S , ^{33}S , ^{34}S	271789, 280432, 291847	0, 3/2, 0
17	^{35}Cl , ^{37}Cl	298220, 317112	3/2, 3/2
18	^{36}Ar , ^{38}Ar , ^{40}Ar	306727, 327354, 343822	0, 0, 0
20	^{40}Ca , ^{42}Ca , ^{43}Ca , ^{44}Ca , ^{46}Ca , ^{48}Ca	342063, 361900, 369832, 380969, 398787, 416014	0, 0, 7/2 0, 0, 0
24	^{50}Cr , ^{52}Cr , ^{53}Cr , ^{54}Cr	435061, 456364, 464304, 474024	0, 0, 3/2, 0
25	^{55}Mn	482091	5/2
26	^{54}Fe , ^{56}Fe , ^{57}Fe , ^{58}Fe	471779, 492280, 499926, 509969	0, 0, 1/2, 0
28	^{58}Ni , ^{60}Ni , ^{61}Ni , ^{62}Ni , ^{64}Ni	506484, 526871, 534691, 545288, 561788	0, 0, 3/2 0, 0,

$$B_{A,Z} = (Zm_p + (A-Z)m_n - m_{A,Z})c^2,$$

$$m_n = m_p + m_e + 782,5 \text{ кэВ}$$

Взаимопревращения протонов и нейтронов, как свободных, так и связанных в ядрах, происходят в реакциях слабого взаимодействия (см. гл. 5). Характерное время слабых процессов t_β при высокой температуре значительно больше ядерного t_n и может быть порядка микроскопического, гидродинамического или теплового. Нейтрино, возникающие при слабых взаимодействиях, свободно улетают из звезд. В этих условиях термодинамическое равновесие относительно реакций слабого взаимодействия отсутствует. Исключение составляют горячие нейтронные звезды, которые непрозрачны для нейтрино с энергией $E_{\nu_e} \geq 1$ МэВ. Термодинамические функции равновесного нейтринного ν_e , $\tilde{\nu}_e$ -газа с $kT \gg m_{\nu_e}c^2$ *) анало-

*) Эксперимент ИТЭФ дает $m_{\tilde{\nu}_e} = 30 \pm 16$ эВ [127], из оценок по теории великого объединения $m_{\nu_0} \approx 10^{-1} \div 10^{-6}$ эВ, однако возможность $m_{\nu_0} = 0$ полностью не отвергнута [172]; эксперимент в Цюрихе дает $m_{\nu_0} < 18$ эВ [544а].

гичны электронным (2.56), где $\beta = \mu_{\nu_e}/kT$, а величины $E_{\nu_e \tilde{\nu}_e}$, $P_{\nu_e \tilde{\nu}_e}$, $S_{\nu_e \tilde{\nu}_e}$ в два раза меньше, чем $E_{e\pm}$, $P_{e\pm}$ и $S_{e\pm}$ за счет статистического веса. В левой части первого соотношения (2.56), служащего для нахождения μ_{ν_e} , вместо $\rho/\mu_Z m_u$ должна стоять величина, связанная с концентрацией лептонного заряда Q_{ν_e} : $2(Q_{\nu_e} - n_{e^-} + n_{e^+}) = 2(n_{\nu_e} - n_{\tilde{\nu}_e})$. После таких замен все формулы п.д § 2 применимы для равновесного нейтринного газа, а связь между n_p и n_n определяется соотношениями между химическими потенциалами

$$\mu_n = \mu_p + \mu_{te} + \mu_{\tilde{\nu}_e}, \quad \mu_{\tilde{\nu}_e} = -\mu_{\nu_e}. \quad (3.5)$$

Второе соотношение (3.5) следует из равновесия реакции $\nu_e + \tilde{\nu}_e \rightarrow e^+ + e^-$ и условия (2.11). Равновесие других типов нейтрино ν_μ и ν_τ описывается аналогично ν_e , хотя оно вряд ли достижимо даже в горячих нейтронных звездах из-за большой массы их лептонов.

В условиях свободного улета нейтрино строгое нахождение связи n_p и n_n состоит в решении уравнений кинетики бета-процессов

$$\frac{dN_n}{dt} = -\frac{dN_p}{dt} = \sum_i (W_{A_i Z_i}^+ - W_{A_i Z_i}^-) n_{A_i Z_i},$$

$$N_n = \sum_i (A_i - Z_i) n_{A_i Z_i} + n_n, \quad (3.6)$$

$$N_p = \sum_i Z_i n_{A_i Z_i} + n_p$$

при известном начальном соотношении между N_n и N_p . В работе [328] параметр N_n/N_p считался независимым при расчетах ядерного равновесия элементов группы железа. В первом соотношении (3.6) при суммировании

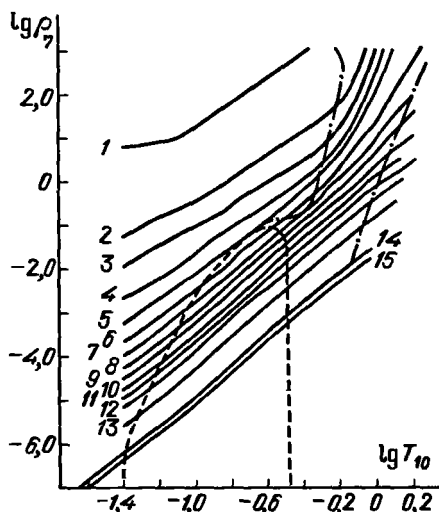


Рис. 6. Изэнтропы вещества на плоскости T, ρ . Для $10^9 < T < 2 \cdot 10^{10}$ К, $10^5 < \rho < 10^{10}$ г/см³ изэнтропы построены для равновесного химического состава по данным работы [114]. Штриховая линия разделяет области $\gamma_1 > 4/3$ и $\gamma_1 < 4/3$ и построена по данным расчетов [46]. Штрихпунктирные линии разделяют области $\gamma_1 > 4/3$ и $\gamma_1 < 4/3$ и построены по данным работы [114] с учетом распада железа. Цифры на рисунке соответствуют следующим изэнтропам: 1 - $S_{10} = 0,003981$, 2 - $S_{10} = 0,01$, 3 - $S_{10} = 0,01585$, 4 - $S_{10} = 0,02512$, 5 - $S_{10} = 0,03981$, 6 - $S_{10} = 0,0631$, 7 - $S_{10} = 0,1$, 8 - $S_{10} = 0,1585$, 9 - $S_{10} = 0,2512$, 10 - $S_{10} = 0,3981$, 11 - $S_{10} = 0,631$, 12 - $S_{10} = 1,0$, 13 - $S_{10} = 2,512$, 14 - $S_{10} = 10$, 15 - $S_{10} = 15,85$, $S_{10} = S/10^{10}$ эрг · г⁻¹ · К⁻¹

нужно учитывать свободные нейтроны и протоны. Скорости бета-реакций (c^{-1}) $W_{A,Z}^+ = W_{A,Z}(e^+ \text{-распад}) + W_{A,Z}(e^- \text{-захват})$ и $W_{A,Z}^- = W_{A,Z}(e^- \text{-распад}) + W_{A,Z}(e^+ \text{-захват})$ рассмотрены в § 19.

Если в течение времени $t \gg t_\beta$ величины T и ρ в звезде меняются слабо, то достигается кинетическое равновесие по бета-процессам с $dN_n/dt = 0$ в (3.6). В этом случае соотношения (3.6) однозначно определяют состав вещества [117–119, 224]. Для приближенного определения состава в условиях свободного улета нейтрино иногда используется соотношение (3.5) с $\mu_{\nu_e} = 0$. Расчеты в этом приближении сделаны в [114]. В ядерном равновесии учитывались ядра железа ${}^{56}\text{Fe}$, включая семь первых возбужденных уровней, ${}^4\text{He}$, n и p . Рост температуры ведет сначала к расщеплению ядер железа на ${}^4\text{He}$ и нуклоны, а затем к чисто нуклонному составу. При большой плотности основную часть свободных нуклонов составляют нейтроны. На рис. 6 из [46] приведены изэнтропы вещества на плоскости ρ, T и указаны области с $\gamma_1 < 4/3$, необходимые для анализа устойчивости (см. гл. 12). В области ядерного равновесия использовались результаты [114].

§ 4. Вещество при очень больших плотностях, нейтронизация, взаимодействие частиц

При очень больших плотностях в условиях сильного вырождения электронов и нуклонов приближенно вещество можно считать холодным с $T = S = 0$ [110].

а) Холодная нейтронизация вдоль состояний минимума энергии (СМЭ). При плотностях $\rho < 8,1 \cdot 10^6 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ вещество в СМЭ состоит из ${}^{56}\text{Fe}$, ядра которого максимально стабильны*). Когда ϵ_{Fe} из (2.21) достигает значения ϵ_β при

$$\begin{aligned} \epsilon_\beta(A, Z) &= (m_{A, Z-1} - m_{A, Z})c^2 - m_e c^2 = \\ &= B_{A, Z} - B_{A, Z-1} + (m_n - m_p)c^2 - m_e c^2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

захват электрона стабильным ядром (A, Z) становится энергетически выгодным. Ядро $(A, Z - 1)$, которое в обычных условиях является β^- радиоактивным, при большой энергии Ферми электронов оказывается устойчивым. Процесс захвата электрона ядром, называемый нейтронизацией, рассчитан впервые в [216].

При нулевой температуре состояние термодинамического равновесия соответствует минимуму полной энергии E_{tot} как функции A и Z при данном числе нуклонов в единице объема. С ростом плотности равновесие смещается в сторону все более переобогащенных нейтронами ядер. При $\rho \gg \rho_{nd}$ энергия связи последнего нейтрона в ядре Q_n близка к нулю

*) Энергия связи на нуклон $B_n = B_{A, Z}/A$, определяемая в соответствии с (3.3), (4.3), максимальна для ${}^{62}\text{Ni}$ (см. табл. 5). Однако при сравнении стабильности ядер нужно отсчитывать их энергию от какого-то фиксированного состояния, например, протонно-электронного. При этом оказывается, что образование ядер железа ${}^{56}\text{Fe}$ сопровождается максимальным выделением энергии.