

Угловая зависимость сечения рассеяния задается углом $\tilde{\theta}$, $l_i l_i' = \cos \tilde{\theta}$, который выражается через углы исходного (θ , φ) и рассеянного (θ' , φ') луча с помощью соотношения [219]

$$\begin{aligned} \cos^2 \tilde{\theta} &= \cos^2 \theta \cos^2 \theta' + \sin^2 \theta \sin^2 \theta' \cos^2 (\varphi - \varphi') + \\ &+ 2 \cos \theta \cos \theta' \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi'). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Когда частота при рассеянии меняется, то оно называется некогерентным.

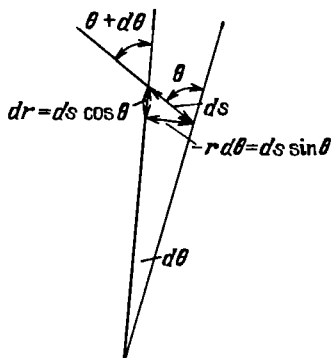


Рис. 18. Перенос излучения в сферической геометрии

В этом случае два последних члена в (5.9) следует заменить на

$$\begin{aligned} \rho \int \left[\frac{\nu}{\nu'} K(\tilde{\theta}, \nu' \rightarrow \nu) I_{\nu}^{\downarrow} \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_{\nu} \right) - K(\tilde{\theta}, \nu \rightarrow \nu') \times \right. \\ \left. \times I_{\nu} \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu'^3} I_{\nu'}^{\downarrow} \right) \right] d\nu' \frac{d\Omega'}{4\pi}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\int K(\tilde{\theta}, \nu \rightarrow \nu') d\nu' \frac{d\Omega'}{4\pi} = \sigma_{\nu},$$

где учтены вынужденные процессы рассеяния (см. § 21). Часто вместо реальных угловых зависимостей при рассеянии (см. § 7) используют приближение изотропного рассеяния, для которого последний член в (5.9) после интегрирования по $d\varphi'$ имеет вид

$$\frac{1}{2} \rho \sigma_{\nu} \int_0^{\pi} I_{\nu}(\theta') \sin \theta' d\theta'. \quad (5.17)$$

§ 6. Эддингтоновское приближение.

Лучистая теплопроводность

Свободный пробег фотона внутри звезды обычно много меньше ее размера, поэтому перенос излучения там достаточно рассмотреть в приближении лучистой теплопроводности. Параметры фотосферы, где $\tau \lesssim 1$, входят как граничные условия для уравнений, описывающих строение звезды (см. гл. 6). При этом используются только усредненные свойства поля излучения. Для получения граничных условий часто пользуются прибли-

жением Эддингтона [197], которое позволяет единым способом описать как прозрачные, так и непрозрачные области. Точные решения уравнения переноса изучаются в теории звездных атмосфер, где получают теоретические спектры для сопоставления с наблюдаемыми [159, 197, 219].

а) Моменты уравнения переноса. Приближенное описание поля излучения основано на рассмотрении усредненных по углу и частоте характеристик. Для этого рассмотрим моменты уравнения переноса (5.9). Интегрируя (5.9) по $d\Omega dv$ с учетом (5.10) в декартовой системе координат и при наличии ЛТЕ (5.13), (5.14), получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = -\rho c \left[\int_0^\infty \alpha_\nu S_\nu dv - \alpha_P B(T) \right]. \quad (6.1)$$

Аналогичное интегрирование с весом l_i дает

$$\frac{1}{c} \frac{\partial F_i}{\partial t} + c \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} = -\kappa \rho F_i. \quad (6.2)$$

Здесь S_ν (эрг · см⁻³ · Гц⁻¹) и S (эрг · см⁻³) – спектральная и полная плотность лучистой энергии:

$$S_\nu = \frac{1}{c} \int_\Omega I_\nu d\Omega, \quad S = \int_0^\infty S_\nu dv; \quad (6.3)$$

F_i – плотность потока лучистой энергии (эрг · см⁻² · с⁻¹):

$$F_i = \int_{\Omega, \nu} I_\nu l_i d\Omega dv; \quad (6.4)$$

$B(T)$ – плотность энергии равновесного излучения (эрг · см⁻³):

$$B(T) = \frac{1}{c} \int_{\Omega, \nu} B_\nu(T) d\Omega dv = \frac{8\pi (kT)^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = aT^4, \quad (6.5)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} [145], \quad a = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} \text{ (см. § 1)}.$$

Члены с рассеянием в правой части (5.9) выпадают после интегрирования из (6.1) в силу (5.8), из которого следует равенство

$$\sigma_\nu \int_\Omega I_\nu(l_i) d\Omega = \int_\Omega d\Omega \int_{\Omega'} \frac{d\Omega'}{4\pi} \sigma(\cos \tilde{\theta}) I_\nu(l'_i). \quad (6.6)$$

Величина P_{ik} – тензор давлений поля излучения (эрг · см⁻³) есть

$$P_{ik} = \frac{1}{c} \int_{\Omega, \nu} I_\nu l_i l_k d\Omega dv. \quad (6.7)$$

Член с излучением выпал из (6.2) в силу равенства $\int_\Omega \cos \theta d\Omega = 0$, а последний член в (5.9) обращается в нуль только для четных функций $\sigma(x)$, для которых $\int_\Omega \sigma_\nu l_i(\cos \theta) \cos \theta d\Omega = 0$. В случае релятивистских электронов

[21] этот член остается после интегрирования и его следует добавить к (6.2).

Ввиду того что поток излучения определяется частотами, на которых поглощение и рассеяние минимально, в (6.2) используется Росселандово усреднение α_ν и σ_ν по частоте [229]:

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu}, \quad (6.8)$$

где $B_\nu(T)$ дано в (5.14), а $\kappa_\nu = \alpha_\nu + \sigma_\nu$. В (6.1) более правильно использовать значение $\langle \alpha_\nu \rangle = \alpha_P$, усредненное по Планку [197],

$$\alpha_P = \frac{4\pi \int_0^\infty \alpha_\nu B_\nu(T) d\nu}{cB(T)}. \quad (6.9)$$

б) Плоская атмосфера. В этом случае в силу плоской симметрии в (6.1), (6.2) остаются следующие компоненты F_i и P_{ik} :

$$F = F_z = \int_{\Omega, \nu} I_\nu \cos \theta d\Omega d\nu, \quad (6.10)$$

$$P = P_{zz} = \frac{1}{c} \int_{\Omega, \nu} I_\nu \cos^2 \theta d\Omega d\nu. \quad (6.11)$$

Имеем тогда вместо (6.1) и (6.2) в стационарном случае

$$\frac{dF}{dz} = -\rho c \left[\int_0^\infty \alpha_\nu S_\nu d\nu - \alpha_P B(T) \right], \quad (6.12)$$

$$c \frac{dP}{dz} = -\kappa \rho F. \quad (6.13)$$

В атмосфере звезды принимается условие лучистого равновесия, эквивалентное условию постоянства потока F в (6.12):

$$F = \text{const} = L/4\pi R^2, \quad L - \text{светимость}, \quad (6.14)$$

$$\int_0^\infty \alpha_\nu S_\nu d\nu = \alpha_P B(T), \quad R - \text{радиус звезды}.$$

В эддингтоновском приближении принимается

$$P = \frac{1}{3} S, \quad (6.15)$$

как в случае равновесного излучения. Это условие получается, если из (6.11) вынести за знак интеграла среднее значение $\langle \cos^2 \theta \rangle =$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \cos^2 \theta d\Omega = 1/3. \text{ Для серой атмосферы } \alpha_\nu = \alpha_P = \kappa = \text{const} \text{ имеем}$$

$$S = B(T) = aT^4. \quad (6.16)$$

Вводя оптическую толщину

$$\tau = \int_z^{\infty} \kappa \rho dz, \quad (6.17)$$

находим решение (6.13) в виде

$$\frac{dS}{d\tau} = 3 \frac{F}{c}, \quad S = 3 \frac{F}{c} \tau + \text{const}. \quad (6.18)$$

Для нахождения постоянной в (6.18) следует учесть, что при $\tau \rightarrow 0$ остаются только кванты, летящие в направлении углов $0 \leq \theta \leq \pi/2$. В этом интервале $\langle \cos \theta \rangle = 1/2$, и Эддингтоном принято

$$F = \int_0^{\infty} dv \int_0^{\pi/2} I_{\nu} \cos \theta d\Omega \approx \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dv \int_0^{\pi/2} I_{\nu} d\Omega = \frac{cS(0)}{2}. \quad (6.19)$$

Тогда в (6.18) имеем $\text{const} = 2 \frac{F}{c}$ и

$$S = 2 \frac{F}{c} \left(1 + \frac{3}{2} \tau \right). \quad (6.20)$$

Если учесть (6.16) и ввести $\frac{ac T_{\text{ef}}^4}{4} = F$, то решение (6.20) примет вид

$$T^4 = \frac{1}{2} T_{\text{ef}}^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau \right). \quad (6.21)$$

Фотосфера определяется условием $T = T_{\text{ef}}$ и расположена при $\tau = 2/3 = 0,667$, $T(0) = \frac{1}{2^{1/4}} T_{\text{ef}} = 0,841 T_{\text{ef}}$. Чандрасекхар [219] показал, что вместо (6.19) точнее использовать граничное условие

$$F = \frac{cS(0)}{\sqrt{3}}. \quad (6.22)$$

Тогда

$$\text{const} = \frac{\sqrt{3} F}{c}, \quad S = 3 \frac{F}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \tau \right), \quad T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{ef}}^4 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \tau \right). \quad (6.23)$$

Фотосфера расположена здесь при $\tau = 4/3 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,756$,

$$T(0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)^{1/4} T_{\text{ef}} = 0,811 T_{\text{ef}}.$$

в) **Сферически-симметричный случай.** В этом случае для ненулевых компонент имеем

$$F = F_r = \int_{\Omega, \nu} I_{\nu} \cos \theta d\Omega dv, \quad (6.24)$$

$$P = P_{rr} = \frac{1}{c} \int_{\Omega, \nu} I_{\nu} \cos^2 \theta d\Omega dv, \quad (6.25)$$

но, в отличие от (6.10)–(6.11) угол θ здесь отсчитывается от направления радиуса-вектора в данной точке и меняется при нерадиальном движении. Используя левую часть уравнения переноса в виде (5.12), в стационарном случае получаем следующие уравнения моментов:

$$\frac{dF}{dr} + 2 \frac{F}{r} = -\rho c \left[\int_0^\infty \alpha_\nu S_\nu dv - \alpha_P B(T) \right], \quad (6.26)$$

$$\frac{dP}{dr} - \frac{S - 3P}{r} = -\kappa \rho \frac{F}{c}. \quad (6.27)$$

В сферически-симметричном случае $F \sim 1/r^2$, $S \sim 1/r^2$ при $\tau \rightarrow 0$, поэтому вместо (6.15) используется переменный фактор Эддингтона [159]

$$\dot{P} = fS, \quad f = \begin{cases} 1/3 & \text{при } \tau \rightarrow \infty, \\ 1 & \text{при } \tau \rightarrow 0. \end{cases} \quad (6.28)$$

В случае лучистого равновесия

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}. \quad (6.29)$$

При $\tau \rightarrow 0$ и больших радиусах излучение сильно дилутировано, $\cos \theta \approx 1$ и вместо (6.19) имеем

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} = cS(\tau \rightarrow 0). \quad (6.30)$$

С учетом (6.28)–(6.30) решение (6.27) при $\tau \rightarrow 0$ имеет вид

$$S = \frac{L}{4\pi r^2 c} (\tau + 1). \quad (6.31)$$

При больших τ внутри звезд излучение всегда близко к равновесному и выполняются соотношения (6.15) и (6.16). Тогда из (6.27) имеем в приближении лучистой теплопроводности

$$L(r) = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr} 4\pi r^2. \quad (6.32)$$

Подставив (6.16) в (6.31) и дифференцируя, имеем при $\tau \rightarrow 0$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{1}{2} T_0 R_0^{1/2} r^{-3/2}, \quad T_0^4 = \frac{L}{4\pi ac R_0^2}. \quad (6.33)$$

Интерполируя (6.32) и (6.33), получаем приближенное уравнение, определяющее зависимость $T(r)$ при любых τ [520]:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho L}{16\pi ac T^3 r^2} - \frac{f}{2} T_0 R_0^{1/2} r^{-3/2}, \quad (6.34)$$

$$f = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} \tau & \text{при } \tau < 2/3 \\ 0 & \text{при } \tau \geq 2/3 \end{cases}.$$

Расчеты показывают [520], что распределение температуры в атмосфере звезды слабо чувствительно к выбору R_0 и T_0 , соответствующих $\tau = 0$.

Вместо переменного эддингтоновского фактора (6.28) три момента S , F и P в сферическом случае можно связать между собой, используя два свободных параметра [18]:

$$P = \mu_0^2 S, \quad 3P - S = 2 \frac{F}{c} (\Lambda - \mu_0). \quad (6.35)$$

Тогда вместо (6.27) получаем уравнение

$$\mu_0^2 \frac{dS}{dr} + 2(\Lambda - \mu_0) \frac{F}{cr} + \kappa \rho \frac{F}{c} = 0. \quad (6.36)$$

В [18] принималось, как и в эддингтоновском приближении $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, а для Λ рассматривалось два варианта:

$$\Lambda = 2\mu_0 \quad \text{и} \quad \Lambda = \mu_0 + \mu_0^2. \quad (6.37)$$

Оба варианта (6.37) при малых τ дают более точное решение, чем эддингтоновское приближение $\Lambda = \mu_0$. При больших τ условие (6.37) дает существенно большую погрешность, чем $\Lambda = \mu_0$, поэтому можно рассмотреть интерполяционную зависимость вида

$$\Lambda = \mu_0 + \frac{\mu_0^2}{1 + (\kappa r \rho)^2}.$$

Еще один вариант приближения Эддингтона для сферически-симметричного случая приведен в [614, 615].

§ 7. Непрозрачность: поглощение, рассеяние и электронная теплопроводность.

Росселандово среднее

При движении сквозь вещество фотон с энергией $h\nu \ll m_e c^2$ может либо рассеяться, либо поглотиться и передать энергию электрону тремя следующими способами:

- 1) увеличить скорость свободного электрона,
- 2) перевести электрон из связанного состояния в свободное,
- 3) перевести электрон из одного связанного состояния в другое с большей энергией возбуждения.

Для переноса тепла может оказаться важным рассеяние и электронная теплопроводность. Приближенное исследование процессов поглощения, выявляющее их качественные особенности, провести сравнительно просто, однако количественные результаты получаются при этом слишком грубыми. Исследование этих процессов, в особенности связанно-связанных переходов, с достаточной точностью, когда учитываются необходимые состояния ионизации и возбуждения различных элементов и переходы между ними в рамках квантовой механики, требуют весьма трудоемких расчетов на вычислительной машине. Рассмотрим приближенную теорию этих процессов.