может быть больше $\sigma_{\gamma Z^{\pm}}$, однако, как показано в [559], благодаря рождению пар рассеяние на них всегда преобладает над (7.35), а также над фотон-фотонным рассеянием. Сечение взаимодействия с ядрами всегда меньше, чем $\sigma_{e\mp}$, поэтому все эти процессы при высоких температурах не дают заметного вклада в непрозрачность в астрофизических условиях.

з) Таблицы непрозрачности. Формулы Краммерса (7.15), (7.18) являются слишком грубыми, поэтому в последние годы в расчетах эволюции используются таблицы непрозрачности, в которых вычисление κ по формуле (6.8) проводится численно. При этом для различных смесей элементов учитываются [128, 129, 334]:

свободно-свободные переходы (7.5),

связанно-свободные переходы (7.14),

связанно-связанные переходы (п. г.),

рассеяние на электронах (п. д) с учетом релятивистских поправок [559], а также релеевское рассеяние на молекулах водорода H_2, учет отрицательных ионов H^- и He^-, а также молекул H_2, H_2^+.

Для численного расчета электронной концентрации и концентраций ионов с учетом вырождения и ионизации давлением использовались методы, изложенные в § 1 и § 4 с дополнительными уточнениями [128]. Полная непрозрачность κ есть сумма непрозрачностей по различным механизмам взаимодействия с излучением, включая рассеяние:

$$\kappa = \sum_i \kappa_i. \tag{7.36}$$

Вклад электронной теплопроводности учитывался по формуле (7.33).

В табл. 11 приведены значения непрозрачности из [334] для состава, близкого к солнечному $x_H = 0{,}7$, $x_{He} = 0{,}28$. В этих последних расчетах не учтена электронная теплопроводность. При тех параметрах ρ и T, где λ_e существенна, приведены величины полной непрозрачности из более ранних расчетов [129]. Отметим, что существовавшее долгое время расхождение между таблицами Кокса и расчетами Карсона устранено [319] после обнаружения ошибки в расчетах Карсона. В табл. 12 для того же состава даны таблицы непрозрачности при низких температурах [250], в которых дополнительно учитывается большое число молекул и поглощение на кремниевой пыли. Основной вклад в непрозрачность при низких температурах дают водяной пар, окись титана и пыль.

§ 8. Теплопроводность вещества при больших плотностях и температурах

В белых карликах и оболочках нейтронных звезд перенос тепла определяется вырожденными электронами, которые могут быть релятивистскими, а внутри нейтронных звезд важен тепловой поток, обусловленный вырожденными нейтронами. Расчет коэффициента теплопроводности в газе проводится в кинетической теории на основе решения уравнения Больцмана [222].

а) Решение уравнения Больцмана для нерелятивистского газа. Для вырожденного газа впервые такое решение получено в работе [611]. Пусть в веществе присутствует смесь легких ферми-частиц и тяжелого невырожденного газа. Уравнение Больцмана для легкого газа в сопутствующей системе координат имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial r_i} + \left(F_i - \frac{dc_{0i}}{dt}\right)\frac{\partial f}{\partial v_i} - \frac{\partial f}{\partial v_i} v_k \frac{\partial c_{0i}}{\partial r_k} = J,$$

$$J = J_{nn} + J_{nN} = B \int [f'f_1'(1-f)(1-f_1) - ff_1(1-f')(1-f_1')] \times$$
$$\times g_{nn} W_{nn}(\theta, g_{nn}) d\Omega dc_{1i} + \int [f'f_N'(1-f) - ff_N(1-f')] \times \tag{8.1}$$
$$\times g_{nN} W_{nN}(\theta, g_{nN}) d\Omega dc_{Ni}.$$

Здесь $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial r_i}$; f, f_N – функции распределения легких и тяжелых частиц, штрихами обозначены функции распределения частиц после столкновений, $v_i = c_i - c_{0i}$, $v_{iN} = c_{Ni} - c_{0i}$ – хаотические скорости легких и тяжелых частиц, c_i, c_{Ni} – скорости легких и тяжелых частиц в неподвижной системе, θ – угол между направлениями относительных скоростей до $(\tilde{g}_i)$ и после $(\tilde{g}_i')$ столкновения, имеющих один и тот же модуль g_{nn} или g_{nN}, $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, $W(\theta, g)$ – дифференциальное сечение столкновений частиц с относительной скоростью g, отклоняющейся на угол θ и лежащей после столкновения в телесном угле $d\Omega$, $c_{0i} = \frac{1}{\rho}(\rho_n \langle c_i \rangle + \rho_N \langle c_{Ni} \rangle)$ – среднемассовая скорость, $\rho = \rho_n + \rho_N$ – плотность вещества, F_i – ускорение, создаваемое внешними силами. Средние значения величин $\langle \varphi_i \rangle$, $\langle \varphi_{Ni} \rangle$ определяются как

$$\langle \varphi_i \rangle = \frac{B}{n_n} \int f \varphi_i dc_i, \quad B = \frac{2m^3}{h^3}, \quad \langle \varphi_{Ni} \rangle = \frac{1}{n_N} \int f_N \varphi_{Ni} dc_{Ni}. \tag{8.2}$$

Функции f и f_N нормированы так, что

$$n_n = B \int f dc_i, \quad n_N = \int f_N dc_{Ni}, \quad \rho = n_n m_n, \quad \rho_N = n_N m_N, \tag{8.3}$$

m и m_N – массы легких и тяжелых частиц.

При малых отклонениях от равновесного распределения Ферми решение уравнения Больцмана ищется в виде

$$f = f_0[1 + \chi(1 - f_0)],$$
$$f_0 = \{1 + \exp[(mv^2 - 2\mu)/2kT]\}^{-1}. \tag{8.4}$$

Здесь μ – химический потенциал ферми-газа. Наличие анизотропии, связанной с градиентами температуры и давлений компонент, приводит к поправке к равновесной функции распределения, которая ищется в виде

$$\chi = -A_i \frac{\partial \ln T}{\partial r_i} - n_n \mathcal{D}_i d_i \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}},$$
$$d_i = \frac{\rho_N}{\rho} \frac{\partial \ln P_n}{\partial r_i} - \frac{\rho_n}{P_n} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_N}{\partial r_i}. \tag{8.5}$$

Здесь

$$P_n = \frac{1}{3} n_n m \langle v^2 \rangle \text{ — давление ферми-газа,}$$

$$P_N \text{ — давление остальных компонентов смеси,} \tag{8.6}$$

$$G_n \equiv G_n(x_0) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}dx}{1+\exp(x-x_0)} = \frac{F_{n-1}(x_0)}{\Gamma(n)},$$

$$x = \frac{mv^2}{2kT}, \qquad x_0 = \frac{\mu}{kT},$$

где $F_i(x_0)$ определены ранее в (2.49). Будем считать, что функция распределения тяжелых невырожденных частиц обладает следующими свойствами:

$$f_N = f_{N0}(1+\chi_N),$$

$$\chi_N = -A_{Ni} \frac{\partial \ln T}{\partial r_i} - n_n \mathcal{D}_{Ni} d_i \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}}, \tag{8.7}$$

$$\int f_{N0} dv_{Ni} = n_N, \qquad \int v_{Ni} v_{Nk} f_{N0}\, dv_{Ni} = n_N \delta_{ik} \frac{kT}{m_N}.$$

При этом изотропная функция распределения f_{N0} может отличаться от максвелловской. Подставляя (8.4)–(8.6) в уравнение Больцмана (8.1) и используя уравнения переноса для исключения временных производных, получаем уравнения [53] для A_i и $\mathcal{D}_i$

$$f_0(1-f_0)\left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{5}{2}\frac{G_{5/2}}{G_{3/2}}\right)v_i = I_{nn}(A_i) + I_{nN}(A_i),$$

$$\frac{1}{n_n} f_0(1-f_0)\, v_i = I_{nn}(\mathcal{D}_i) + I_{nN}(\mathcal{D}_i), \tag{8.8}$$

где $I_{nn}(R)$ и $I_{nN}(R)$ — линеаризованные интегралы столкновений (8.1). Отметим, что при классическом рассмотрении столкновения в (8.1) следует произвести замену

$$gW(\theta, g)d\Omega \Rightarrow gb\, db\, d\varphi. \tag{8.9}$$

б) **Теплопроводность нейтронного газа.** Пусть легкие частицы являются нейтронами, а тяжелые — ядрами. Так как нейтроны могут составлять существенную долю массы, нужно учитывать их вклад в плотность. Нейтронный газ, близкий к идеальному, погруженный в кристаллическую решетку ядер, может существовать в неравновесном слое в оболочках нейтронных звезд (см. § 4, пп.д, е). Если ядра много тяжелее нейтронов, то детали функции f_N несущественны. Теплопроводность нейтронного газа рассчитывалась в [607], а в смеси с ядрами [53].

Следуя [53], решение уравнений (8.8) ищем в виде разложения в ряд по системе ортогональных с весом $f_0(1-f_0)x^{3/2}$ полиномов $Q(x)$, аналогичных полиномам Сонина [222] в невырожденном случае,

$$A_i = [a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x)]\, v_i, \qquad \mathcal{D}_i = [d_0 Q_0(x) + d_1 Q_1(x)]\, v_i,$$

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = \frac{5}{2}\,\frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} - x, \tag{8.10}$$

$$x = u^2, \quad u_i = \left(\frac{m_n}{2kT}\right)^{1/2} v_i .$$

В A_{Ni}, $\mathcal{D}_{Ni}$ из (8.7) учтем только первые члены разложения, определяемые из условия, что поправки к равновесным функциям не дают вклада в среднемассовую скорость

$$A_{Ni} = a_{0N} Q_0 v_{Ni}, \qquad n_n a_0 + n_N a_{0N} = 0,$$

$$\mathcal{D}_{Ni} = d_{0N} Q_0 v_{Ni}, \qquad n_n d_0 + n_N d_{0N} = 0, \tag{8.11}$$

$$u_{Ni} = (m_N/2kT)^{1/2} v_{Ni} .$$

Используя определение теплового потока, связанного с нейтронами, а также диффузионной скорости $\langle v_i \rangle$, с учетом (8.4), (8.7), (8.10) получаем [53]

$$q_i = \frac{1}{2} n_n m_n \langle v^2 v_i \rangle = -\frac{5}{2} m_n n_n \left(\frac{kT}{m_n}\right)^2 \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \left\{ \left[a_0 - \right.\right.$$

$$\left. - a_1 \left(\frac{7}{2}\,\frac{G_{7/2}}{G_{5/2}} - \frac{5}{2}\,\frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \right) \right] \frac{\partial \ln T}{\partial r_i} +$$

$$\left. + n_n \left[d_0 - d_1 \left(\frac{7}{2}\,\frac{G_{7/2}}{G_{5/2}} - \frac{5}{2}\,\frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \right) \right] \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} d_i \right\}, \tag{8.12}$$

$$\langle v_i \rangle = -\frac{kT}{m_n} \left(a_0 \frac{\partial \ln T}{\partial r_i} + d_0 n_n \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} d_i \right), \qquad \langle v_{Ni} \rangle = -\frac{\rho_n}{\rho_N} \langle v_i \rangle. \tag{8.13}$$

Если положить $\langle v_i \rangle = 0$ в (8.13), то из (8.12) получается тепловой поток, обусловленный теплопроводностью в виде

$$q_i = -\lambda_n \frac{\partial T}{\partial r_i} = -\frac{5}{2} m_n n_n \left(\frac{kT}{m_n}\right)^2 \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \left(\frac{7}{2}\,\frac{G_{7/2}}{G_{5/2}} - \frac{5}{2}\,\frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{a_0 d_1}{d_0} - a_1 \right) \frac{\partial \ln T}{\partial r_i} . \tag{8.14}$$

Умножая (8.8) на $BQ_0(x)$ и $BQ_1(x)$ и интегрируя по dv_i, получаем систему уравнений для коэффициентов a_k, d_k:

$$0 = b_{00} a_0 + b_{01} a_1,$$

$$-\frac{15}{4} n_n \left(\frac{7}{2}\,\frac{G_{7/2}}{G_{3/2}} - \frac{5}{2}\,\frac{G^2_{5/2}}{G^2_{3/2}} \right) = b_{10} a_0 + (a_{11} + b_{11}) a_1, \tag{8.15}$$

$$\frac{3}{2} = b_{00} d_0 + b_{01} d_1, \qquad 0 = b_{10} d_0 + (a_{11} + b_{11}) d_1, \tag{8.16}$$

где

$$a_{11} = B^2 \int f_0 f_{01}(1 - f_0')(1 - f_{01}')Q_1(x)u_i[Q_1(x)u_i + Q_1(x_1)u_{1i} - Q_1(x')u_i' - Q_1(x_1')u_{1i}']\, g_{nn} W_{nn}(\theta, g_{nn})d\Omega dv_i dv_{1i}, \tag{8.17}$$

$$b_{j1} = B\int f_0 f_{N0}(1 - f_0')Q_j(x)u_i\,[Q_1(x)u_i - Q_1(x')u_i']\times g_{nN} W_{nN}(\theta, g_{nN})d\Omega dv_i dv_{Ni}, \quad j = 0, 1. \tag{8.18}$$

С учетом (8.11) имеем

$$b_{j0} = B\int f_0 f_{N0}(1 - f_0')Q_j(x)u_i\left[u_i - u_i' - \frac{n_n}{n_N}\left(\frac{m_n}{m_N}\right)^{1/2}\times (u_{Ni} - u_{Ni}')\right] g_{nN} W_{nN}(\theta, g_{nN})d\Omega dv_i dv_{Ni}. \tag{8.19}$$

Сохранение импульса при столкновении дает соотношение

$$u_i - u_i' = -\left(\frac{m_N}{m_n}\right)^{1/2}(u_{Ni} - u_{Ni}'). \tag{8.20}$$

Считая $m_N \gg m_n$, получаем

$$|u_i| = |u_i'|, \qquad u_i(u_i - u_i') = u^2(1 - \cos\theta), \qquad g_{nN} = |v_i| = v. \tag{8.21}$$

С учетом (8.10), (8.21) коэффициенты b_{jk} из (8.18), (8.19) вычисляются в явном виде [53]. Коэффициенты a_{11} из (8.17) в явном виде удается получить только для предельных случаев слабого и сильного вырождения. Можно также предложить простую интерполяционную формулу между этими случаями. Подставляя в (8.14) решения (8.15) и (8.16), получаем коэффициент теплопроводности нейтронного газа в виде [53]

$$\lambda_n = \frac{75}{64\pi^2}\frac{k}{\sqrt{2}}\left(\frac{kT}{m_n}\right)^{1/2}\frac{n_n^2}{n_N}\left(\frac{2\pi^2\hbar^2}{kTm_n}\right)^{3/2}\frac{G_{5/2}^2}{G_{3/2}^2}\left(\frac{7}{2}\frac{G_{7/2}}{G_{5/2}} - \frac{5}{2}\frac{G_{5/2}}{G_{3/2}}\right)^2\left[\frac{25}{4}\frac{G_{5/2}^2}{G_{3/2}^2}\tilde{\Omega}_{nN}(1) - 5\frac{G_{5/2}}{G_{3/2}}\tilde{\Omega}_{nN}(2) + \tilde{\Omega}_{nN}(3) + \frac{32}{21}\pi^4\frac{n_n}{n_N} I \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\right]^{-1}, \tag{8.22}$$

где

$$\tilde{\Omega}_{nN}(r) = \int_0^\infty dx \int_0^\pi d\theta f_0(1 - f_0)x^{r+1}(1 - \cos\theta)W_{nN}(\theta, x)\sin\theta,$$

$$I = \int_0^1 \frac{y^3 W_{nn}(y)dy}{(1 - y^2)^{1/2}}, \qquad y = \frac{g}{(2x_0)^{1/2}}, \qquad g = \frac{1}{2}\left(\frac{m_n}{kT}\right)^{1/2} g_{nn}, \tag{8.23}$$

$$W_{nn}(\theta, g) = \sum_{l=0}^\infty W_{nn}^{(l)}(g)P_l(\cos\theta), \qquad W_{nn}(g) = \sum_{l=0}^\infty W_{nn}^{(l)}(g)[P_l(0)]^2,$$

$$\epsilon = \frac{21\sqrt{2}}{8\pi^{13/2}}\left(\frac{2\pi^2\hbar^2}{kTm_n}\right)^{3/2} n_n \frac{\sqrt{\pi}\,\Omega_{nn}^{(2)}(2)}{8I}\begin{cases}\gg 1 & \text{при } e^{x_0}\gg 1\\ \ll 1 & \text{при } e^{x_0}\ll 1\end{cases},$$

$$\Omega_{nn}^{(i)}(r) = \sqrt{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-g^2} g^{2r+3}\,dg\int\limits_0^\pi (1-\cos^i\theta)\,W_{nn}(\theta, g)\sin\theta\,d\theta.$$

В случае сильного вырождения нейтронов получаем

$$\lambda_n^{\text{выр}} = \frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/3}\frac{k^2T}{\hbar}\;\frac{n_n^{2/3}}{n_N}\;\frac{1}{\overline{W}_{nN}(x_0)}\times$$

$$\times\left[1+\frac{64}{21\pi}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/3}\frac{m_n^2}{\hbar^4}\;\frac{(kT)^2}{n_n^{1/3}n_N}\;\frac{I}{\overline{W}_{nN}(x_0)}\right]^{-1}, \tag{8.24}$$

где

$$\overline{W}_{nN}(x_0) = W_{nN}^{(0)}(x_0) - \frac{1}{3}W_{nN}^{(1)}(x_0),\qquad W_{nN}(\theta. x) = \sum_{i=0}^{\infty} W_{nN}^{(i)}(x)P_l(\cos\theta), \tag{8.25}$$

$$n_n = \frac{8\pi}{3}(kTm_n/2\pi^2\hbar^2)^{3/2}x_0^{3/2}.$$

Для чисто нейтронного газа имеем .

$$\lambda_{nn} = \begin{cases}\dfrac{75}{64}k\left(\dfrac{kT}{m_n}\right)^{1/2}\dfrac{1}{\Omega_{nn}^{(2)}(2)} & \text{без вырождения [222]},\\[2ex] \dfrac{7\pi\hbar^3 n_n}{256Tm_n^2 I} & \text{при сильном вырождении [607]}.\end{cases} \tag{8.26}$$

Сечение рассеяния можно оценить из экспериментальных данных по pn- и pp-рассеянию. Формула для сечения упругого изотропного рассеяния при энергиях нейтронов $\lesssim$ 10 МэВ имеет вид [23]

$$W_{nn} = \frac{\hbar^2}{m_n}\;\frac{1}{E+E_{nn}},. \tag{8.27}$$

где E – энергия нейтрона в системе центра инерции. Величина E_{nn} очень мала: $E_{nn}\leqslant 60$ кэВ (энергия синглетного состояния нейтронов). Учтем также, что при больших энергиях $150\leqslant E\leqslant 400$ МэВ сечение W_{nn} постоянно и составляет $\approx 3{,}4\cdot 10^{-27}$ см^2 [23]. Аппроксимируем W_{nn} формулой

$$W_{nn} = \left(3{,}4\cdot 10^{-27}+\frac{4{,}15\cdot 10^{-25}}{E+E_{nn}}\right)\text{см}^2, \tag{8.28}$$

где E и $E_{nn.}$ взяты в МэВ

$$E = \frac{m_n g_{nn}^2}{4\cdot 1{,}602\cdot 10^{-6}} = \frac{2kTx_0y^2}{1{,}602\cdot 10^{-6}}\ (\text{МэВ}). \tag{8.29}$$

Для сильного вырождения, подставляя (8.28) в (8.23) и (8.26), получаем приближенно после интегрирования

$$I=\left(2{,}3\cdot 10^{-27}+\frac{1{,}5\cdot 10^{-25}}{\rho^{2/3}}\right)\ \text{см}^2,$$

$$\lambda_{\text{nn}}=\frac{9{,}2\cdot 10^{18}}{1+\dfrac{66}{\rho_{12}^{2/3}}}\ \frac{\rho_{12}}{T_9},\qquad \rho_{12}=\frac{n_{\text{n}}m_{\text{n}}}{10^{12}},\qquad T_9=\frac{T}{10^9}. \tag{8.30}$$

Примем, что

$$W_{\text{n}N}\approx A^{2/3}W_{\text{nn}}\ \text{ с }\ W_{\text{nn}}\ \text{ из (8.27) при}$$

$$E=\frac{mv^2}{2\cdot 1{,}602\cdot 10^{-6}}=\frac{kTx}{1{,}602\cdot 10^{-6}}\ (\text{МэВ}). \tag{8.31}$$

Тогда из (8.24) получаем коэффициент нейтронной теплопроводности в смеси с ядрами

$$\lambda_{\text{n}}=\frac{9{,}2\cdot 10^{18}\rho_{12}/T_9}{1+\dfrac{66}{\rho_{12}^{2/3}}+2{,}5\,\dfrac{\rho_{12}^{1/3}\rho_{12N}}{A_{100}^{1/3}\,T_9^2}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{132}{\rho_{12}^{2/3}}\right)}, \tag{8.32}$$

$$\rho_{12N}=Am_{\text{n}}n_N/10^{12},\qquad A_{100}=A/100.$$

Формула (8.32) справедлива при сильном вырождении:

$$x_0\gg 1,\qquad 5{,}8\,\frac{\rho_{12}^{2/3}}{T_9}\gg 1.$$

Экстраполяция формулы (8.30) в область нейтронной жидкости $\rho\geqslant 1{,}5\cdot 10^{14}$ г $\cdot$ см$^{-3}$ количественно согласуется с [357], где рассмотрена теплопроводность на основе теории ядерной математики.

в) **Теплопроводность нерелятивистских электронов.** Рассмотрим кинетику электронного газа, учитывая электрон-ионные столкновения в приближении Лоренца [222], и пренебрегая межэлектронными соударениями. Правые части (8.8) с учетом (8.9), (8.20), (8.21) примут вид*)

$$I_{\text{e}N}(R_{\text{i}})=B\int f_0 f_{N0}(1-f_0')(R_{\text{i}}-R_{\text{i}}')\,vb\,db\,d\varphi\,dv_{Ni}. \tag{8.33}$$

Принимая $R_{\text{i}}=R(v)v_{\text{i}}$ и умножая (8.8) на v_i, получаем для $A(v)$ и $\mathscr{D}(v)$ с учетом (8.3) и (8.6)

$$A(v)=\frac{x-\dfrac{5}{2}\,\dfrac{G_{5/2}}{G_{3/2}}}{2\pi n_N\displaystyle\int_0^\infty(1-\cos\theta)\,vb\,db}, \tag{8.34}$$

*) Для кулоновских столкновений классическое сечение совпадает с квантовым [144]; вместо нейтронов в этих формулах нужно рассматривать электроны: P_{e} вместо P_{n} и т.д.

$$\mathcal{D}(v) = \frac{1}{2\pi n_e n_N \int\limits_0^\infty (1-\cos\theta) vb\,db}. \qquad (8.35)$$

В [222] для кулоновского взаимодействия электронов с ионами, имеющими заряд Z, получено

$$\cos\theta = \frac{t_0^2 - 1}{t_0^2 + 1}, \qquad t_0 = \frac{bv^2 m_e}{Ze^2}, \qquad (8.36)$$

$$\Phi_{12} = \int\limits_0^{b_{\max}} (1-\cos\theta) vbdb = \frac{2Z^2 e^4}{m_e^2 v^3}\Lambda_v, \qquad \Lambda_v = \ln\left(\frac{b_{\max} v^2 m_e}{Ze^2}\right).$$

С учетом (8.2), (8.4), (8.12), (8.34) – (8.36) получаем

$$q_i = -\frac{640k}{\Lambda}\frac{m_e(kT)^4}{n_N Z^2 e^4 h^3}\left(G_5 - \frac{1}{2}\frac{G_{5/2}}{G_{3/2}}G_4\right)\frac{\partial T}{\partial r_i} -$$

$$-\frac{128}{\Lambda}\frac{m_e(kT)^5}{n_N Z^2 e^4 h^3}\frac{G_{5/2}}{G_{3/2}}G_4 d_i, \qquad (8.37)$$

$$\langle v_i \rangle = -\frac{128k}{\Lambda}\frac{m_e(kT)^3}{n_e n_N Z^2 e^4 h^3}\left(G_4 - \frac{5}{8}\frac{G_{5/2}}{G_{3/2}}G_3\right)\frac{\partial T}{\partial r_i} -$$

$$-\frac{32}{\Lambda}\frac{m_e(kT)^4}{n_e n_N Z^2 e^4 h^3}\frac{G_{5/2}}{G_{3/2}}G_3 d_i. \qquad (8.38)$$

Полагая $\langle v_i \rangle = 0$ и выражая d_i через $\frac{\partial T}{\partial r_i}$, получаем из (8.37) и (8.38)

$$q_i = -\frac{128k}{\Lambda}\frac{m_e(kT)^4}{n_N Z^2 e^4 h^3}\left(5G_5 - 4\frac{G_4^2}{G_3}\right)\frac{\partial T}{\partial r_i} = -\lambda_e\frac{\partial T}{\partial r_i}. \qquad (8.39)$$

Коэффициент теплопроводности λ_e с учетом (7.6), (8.25) и разложения функций G_n по (2.24)

$$G_n = \frac{1}{\Gamma(n)}\left[\frac{x_0^n}{n} + \frac{\pi^2}{6}(n-1)x_0^{n-2} + \ldots\right] \qquad (8.40)$$

записывается в виде

$$\lambda_e = \frac{128k}{\Lambda}\frac{m_e(kT)^4}{n_N Z^2 e^4 h^3}\left(5G_5 - 4\frac{G_4^2}{G_3}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{16\sqrt{2}}{\pi^{3/2}\Lambda} k \dfrac{n_e}{n_N}\left(\dfrac{kT}{e^2 Z}\right)^2\left(\dfrac{kT}{m_e}\right)^{1/2} & \text{(НВ)}, \\[2ex] \dfrac{1}{32\Lambda}\dfrac{k^2 T n_e^2 h^3}{m_e^2 n_N Z^2 e^4} & \text{(В)} \end{cases} \qquad (8.41)$$

(пометы НВ и В относятся к невырожденным и вырожденным электронам соответственно). Выпишем используемую в дальнейшем эффективную частоту столкновений электронов с ионами ν_{ei} [90]

$$\nu_{ei} = \frac{\int dp_i \nu(v) p v \left(-\dfrac{\partial f_0}{\partial \epsilon}\right)}{\int dp_i p v \left(-\dfrac{\partial f_0}{\partial \epsilon}\right)} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2\pi}{m_e}}\,\frac{Z^2 e^4 n_N \Lambda}{(kT)^{3/2} G_{3/2}}\,\frac{1}{1+e^{-x_0}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2\pi}{m_e}}\,\dfrac{Z^2 e^4 n_N \Lambda}{(kT)^{3/2}} & \text{(НВ)}, \\[2ex] \dfrac{32\pi^2}{3}\,\dfrac{Z^2 e^4 n_N \Lambda m_e}{h^3 n_e} & \text{(В)}, \quad \epsilon = \dfrac{pv}{2}, \end{cases} \tag{8.42}$$

где импульс электронов $p = m_e v$; $G_{3/2}$, x_0 определены в (8.6); функция распределения f_0 дана в (2.2);

$$\nu(v) = 2\pi n_N \varphi_{12} = \frac{4\pi Z^2 e^4 \Lambda_v n_N}{m_e^2 v^3} \quad -$$

частота столкновений электронов, имеющих скорость v; φ_{12} дано в (8.36). Усредненный по скоростям кулоновский логарифм есть

$$\Lambda = \overline{\Lambda}_v = \ln\left(\frac{b_{max}\overline{v^2} m_e}{Ze^2}\right). \tag{8.43}$$

С учетом (8.2), (8.4), (8.6), (8.25) имеем

$$\overline{v^2} = \frac{3kT}{m_e}\,\frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} = \begin{cases} \dfrac{3kT}{m_e} & \text{(НВ)} \\[2ex] \dfrac{3}{5}\,\dfrac{h^2}{m_e^2}\left(\dfrac{3n_e}{8\pi}\right)^{2/3} & \text{(В)} \end{cases}. \tag{8.44}$$

Параметр b_{max} является радиусом экранирования заряда, который в обычной плазме называется дебаевским. Радиус экранирования невырожденными ионами $r_{\mathcal{D}i}$ есть [176]*)

$$r_{\mathcal{D}i}^{-2} = \frac{4\pi n_N e^2 Z^2}{kT}. \tag{8.45}$$

*) Строго говоря, экранирование ионами носит здесь динамический характер и радиус экранирования несколько отличается от $r_{\mathcal{D}i}$ в (8.45) (см. [461]).

Расчет электронного экранирования сводится к уравнению Томаса–Ферми [144] с конечной температурой. Приближенно примем [4, 90]

$$r_{\mathscr{D}e}^{-2} = 4\pi n_e e^2 \frac{\int dp_i\left(-\dfrac{\partial f_0}{\partial \epsilon}\right)}{\int dp_i f_0} = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e}\cdot\overline{\left(\frac{1}{v^2}\right)} =$$

$$= \frac{4\pi n_e e^2}{kT}\frac{G_{1/2}}{G_{3/2}} = \begin{cases} 4\pi n_e e^2/kT & (\text{НВ}),\\ 16(3\pi^5)^{1/3} n_e^{1/3} e^2 m_e/h^2 & (\text{В}). \end{cases} \tag{8.46}$$

Общий радиус экранирования есть

$$\frac{1}{b_{\max}^2} = \frac{1}{r_{\mathscr{D}i}^2} + \frac{1}{r_{\mathscr{D}e}^2} = \frac{4\pi e^2}{kT}\left(n_N Z^2 + n_e\frac{G_{1/2}}{G_{3/2}}\right). \tag{8.47}$$

Для сильного вырождения $x_0 \gg 1$ имеем $r_{\mathscr{D}e} \gg r_{\mathscr{D}i}$ и важно только ионное экранирование $b_{\max} \approx r_{\mathscr{D}i}$. При высоких температурах и плотностях учет квантовых эффектов меняет значение Λ. Если обозначить

$$r_m = \frac{Ze^2}{m_e\overline{v^2}}, \tag{8.48}$$

то (8.43) можно переписать в виде

$$\Lambda = \ln\frac{b_{\max}}{b_{\min}}, \qquad b_{\min} = r_m. \tag{8.49}$$

Из квантовой механики следует, что минимальный прицельный параметр не может быть меньше длины волны де-Бройля, точнее [246]

$$b_{\min} > r_F = \frac{h\sqrt{3/5}}{4\pi m_e\sqrt{\overline{v^2}}} = \frac{h}{4\pi\sqrt{5m_e kT}}\left(\frac{G_{3/2}}{G_{5/2}}\right)^{1/2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{h}{4\pi\sqrt{5m_e kT}} & (\text{НВ}),\\[2ex] \dfrac{h}{4\pi p_{Fe}} = \dfrac{n_e^{-1/3}}{2(3\pi)^{1/3}} & (\text{В}). \end{cases} \tag{8.50}$$

Поэтому в общем случае $b_{\min}$ определяется условием

$$b_{\min} = \max\{r_m, r_F\} = \begin{cases} r_m & \text{при } \dfrac{v_{ch}}{c} < \dfrac{2\sqrt{5}}{3}\dfrac{e^2}{\hbar c}Z = \dfrac{Z}{92},\\[2ex] r_F & \text{при } \dfrac{v_{ch}}{c} > \dfrac{Z}{91{,}93}, \end{cases} \tag{8.51}$$

где $v_{ch} = \sqrt{\overline{v^2}/3} = (kT/m_e)^{1/2}(G_{5/2}/G_{3/2})^{1/2}$. Таким образом, в достаточно широкой области существования нерелятивистских электронов необходимо брать $b_{\min} = r_F$. Отметим, что для смеси ядер в формулах (8.37)–(8.43) следует сделать замену

$$n_N Z^2 \Rightarrow \langle n_N Z^2\rangle = \sum_i n_{Ni} Z_i^2, \qquad n_N Z^2\Lambda \Rightarrow \langle n_N Z^2\Lambda\rangle = \sum_i n_{Ni} Z_i^2\Lambda_i, \tag{8.52}$$

где Λ_i дается формулой (8.43) с $Z = Z_i$. Учет межэлектронных соударений можно сделать, либо отказавшись от приближения Лоренца, вычисляя λ_e аналогично λ_n из п.б), либо феноменологически заменив ν_{ei} на $(\nu_{ei} + \nu_{ee})$ в формуле (8.41). Последний способ представляется более предпочтительным, так как при этом не теряется точность учета (ei) столкновений, которые практически всегда преобладают для вырожденных электронов. Исследование вклада (ee)-столкновений в этом случае показало, что [202, 461] при $Z \gg 1$ он пренебрежимо мал, а при $Z \sim 1$ он не превышает 50 %.

При высоких значениях плотности и сильном вырождении электронов становится существенным кулоновское взаимодействие между ионами, влияющее на (ei)-столкновения. Электронная теплопроводность для этого случая рассмотрена в следующем разделе.

г) Теплопроводность вырожденных электронов с учетом релятивизма и эффектов неидеальности ионов. Релятивистские электроны в звездах, как правило, сильно вырождены. Теплопроводность для этого случая рассчитана в работах [246, 245]. Записывая λ_e в виде, аналогичном (8.41), где вместо m_e берется полная масса электрона на границе Ферми (см. § 2) m_*:

$$m_* = (m_e^2 + p_{Fe}^2/c^2)^{1/2} \quad \text{с } p_{Fe} \text{ из (2.20)}, \tag{8.53}$$

получаем

$$\lambda_e = \frac{\pi^2 k^2 T n_e}{3 m_* \nu_e} = \frac{4{,}11 \cdot 10^{15} (\rho_6/\mu_Z) T_6}{[1 + (\rho_6/\mu_Z)^{2/3}]^{1/2}} \left(\frac{10^{16}\ \text{с}^{-1}}{\nu_e} \right) (\text{эрг} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}),$$
$$\rho_6 = \rho/10^6\ \text{г} \cdot \text{см}^{-3}, \qquad T_6 = T/10^6\ \text{К}. \tag{8.54}$$

Величина ν_e является полной частотой столкновений электронов в среде. В [246] вычисление ν_e проводится для вырожденного газа электронов с

$$T < T_F = \frac{m_* - m_e}{k} c^2 = 5{,}93 \cdot 10^9 \frac{(\rho_6/\mu_Z)^{2/3}}{1 + [1 + (\rho_6/\mu_Z)^{2/3}]^{1/2}},$$
$$20 Z^2 \ll \rho < 4 \cdot 10^{11}\ \text{г} \cdot \text{см}^{-3}. \tag{8.55}$$

Ограничение снизу на ρ в (8.55) есть условие идеальности электронного газа ([145], см. также (4.23)). При $T_m < T < T_F$, где

$$T_m = Z^2 e^2 / k \Gamma_m l_{WS} \text{ — температура кристаллизации,}$$
$$\Gamma = Z^2 e^2 / k T l_{WS} \text{ — газовый параметр, } \Gamma_m \approx 150^{*)} \tag{8.56}$$
$$l_{WS} = (3/4\pi n_N)^{1/3} \text{ — радиус ячейки Вигнера—Зейца (см. (4.25)),}$$

наиболее важно рассеяние электронов на ионах. Вычисление ν_{ei}, проводимое так же, как в п. в, дает, аналогично (8.42)

$$\nu_{ei} = \frac{32 \pi^2 m_* n_N Z^2 e^4}{3 h^3 n_e} \Lambda_{ei} = 1{,}77 \cdot 10^{16} \frac{n_N Z^2}{n_e} \left[1 + \left(\frac{\rho_6}{\mu_Z} \right)^{2/3} \right]^{1/2} \Lambda_{ei}. \tag{8.57}$$

---

*) См. сноску к с. 50.

При вычислении кулоновского логарифма следует учесть, что за счет релятивистских поправок становятся существенными члены $\sim v_{\mathrm{Fe}}^2/c^2$, а с учетом ионных корреляций максимальный прицельный параметр интерполируется выражением $b_{\max}^2 = r_{\mathscr{D}i}^2 + l_{WS}^2/6$, где l_{WS} дано в (8.56), а $r_{\mathscr{D}i}$ в (8.45)*). Значение $b_{\min} = r_{\mathrm{F}} = h/4\pi p_{\mathrm{Fe}}$ аналогично (8.50). В [246] получена интерполяционная формула для Λ_{ei}, справедливая при всех температурах $T_m < T < T_{\mathrm{Fe}}$,

$$\Lambda_{\mathrm{ei}} = \ln\left[\left(\frac{2\pi Z}{3}\right)^{1/3}\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{\Gamma}\right)^{1/2}\right] - \frac{v_{\mathrm{Fe}}^2}{2c^2} =$$

$$= \ln\left[(4Z)^{1/3}\left(1+\frac{2}{\Gamma}\right)^{1/2}\right] - \frac{(\rho_6/\mu_Z)^{2/3}}{2[1+(\rho_6/\mu_Z)^{2/3}]}, \tag{8.58}$$

$$v_{\mathrm{Fe}}/c = (p_{\mathrm{Fe}}/m_{\mathrm{e}}c)\left(1+\frac{p_{\mathrm{Fe}}^2}{m_{\mathrm{e}}^2c^2}\right)^{-1/2} \quad \text{(см. (2.3). (8.53)).}$$

При температурах ниже температуры кристаллизации $T < T_m$ вместо (ei)-рассеяния происходит рассеяние электронов на тепловых колебаниях кристаллической решетки — фононах. Частота столкновений электронов с фононами $\nu_{\mathrm{e,ph}}$ классического $(T > \theta = 0{,}45\hbar\omega_{p\mathrm{i}}/k)$**) и квантового $(T < \theta)$ кристаллов с 10 % аппроксимируется формулой [245, 246]

$$\nu_{\mathrm{e,ph}} = \frac{e^2}{\hbar v_{\mathrm{Fe}}}\,\omega_{p\mathrm{i}}x\left[\left(2-\frac{v_{\mathrm{Fe}}^2}{c^2}\right)\varphi^{(0)}(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi^2}\left(3\Lambda_{\mathrm{ph}} - 1 + \frac{v_{\mathrm{Fe}}^2}{2c^2}\right)\varphi^{(2)}(x)\right], \tag{8.59}$$

где справедливы интерполяционные формулы

$$x^2\varphi^{(0)}(x) = 13\,[1+(\theta/3{,}46T)^2]^{-1/2},$$

$$(x/\pi)^2\varphi^{(2)}(x) = 13(\theta/5{,}1T)^2\,[1+(\theta/4{,}17T)^2]^{-3/2}, \tag{8.60}$$

при этом

$$\omega_{p\mathrm{i}}^2 = \frac{4\pi n_N Z^2 e^2}{m_N} \quad \text{— плазменная частота ионов,}$$

$$x = \frac{\hbar\omega_{p\mathrm{i}}}{kT} = \frac{\theta}{0{,}45T}, \tag{8.61}$$

$\Lambda_{\mathrm{ph}} = \Lambda_{\mathrm{ei}}$ из (8.58), если принять там $\Gamma \gg 1$.

Уточнение формулы (8.59) на основе расчетов методом Монте-Карло сделано в работе [546]. Если в кристалле имеются примеси, ионы другого сорта, вкрапленные в узлы решетки, то при низких температурах рассеяние на них может оказаться существенным. Частота столкновений электро-

---

*) При низких плотностях $\rho \sim 20Z^2$ важен учет электронного экранирования, уменьшающего $b_{\max}$ и приводящего к уменьшению ν_{ei} на ~ 40 % [432].

**) Величина θ определена в (4.38), где она выражена через $\omega_{\mathrm{i}} = \omega_{p\mathrm{i}}/\sqrt{3}$.

нов с примесями $\nu_{e,imp}$ задается формулой [245]

$$\nu_{e,imp} = \frac{4m_* e^2 \overline{(\Delta Z)^2}\, x_{imp} \Lambda_{imp}}{3\pi\hbar^3 Z}, \tag{8.62}$$

где

$\overline{(\Delta Z)^2}$ – среднее отклонение заряда в примесях,

x_{imp} – весовая концентрация примесей, (8.63)

$$\Lambda_{imp} = \ln\left(\frac{2p_{Fe}}{\hbar q_{TF}}\right) - \frac{1}{2} - \frac{v_{Fe}^2}{2c^2}.$$

Здесь p_{Fe} определено в (2.20), $q_{TF} = \dfrac{\sqrt{3}\,\omega_{pe}}{v_{Fe}}$, $\omega_{pe}^2 = \dfrac{4\pi n_e e^2}{m_*}$, v_{Fe} дано в (8,58)*).

Расчеты показали, что для релятивистских электронов (ее)-столкновения могут быть более существенны, чем в нерелятивистском газе. Частота (ее)-столкновений дается формулой [245]

$$\nu_{ee} = \frac{3}{2\pi^3}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{(kT)^2}{\hbar m_* c^2}\left(\frac{2k_{Fe}}{q_{TF}}\right)^3 J(y) =$$

$$= 5{,}08 \cdot 10^{11} T_6^2 (v_{Fe}/c)^{3/2} [1 + (\rho_6/\mu_Z)^{2/3}]^{-1/2} J(y) \quad (\text{с}^{-1}), \tag{8.64}$$

где

$$k_{Fe} = \frac{p_{Fe}}{\hbar}, \quad y = \frac{\sqrt{3}\, T_p}{T}, \quad T_p = \frac{\hbar\omega_{pe}}{k} \doteq 3{,}33 \cdot 10^8 \left(\frac{\rho_6}{\mu_Z}\right)^{1/3}\left(\frac{v_{Fe}}{c}\right)^{1/2}$$

$$J(y \geqslant 20) \approx 51{,}0 - \frac{995}{y} + \frac{1{,}51 \cdot 10^4}{y^2}, \tag{8.65}$$

$$J(y \leqslant 1) \approx \frac{y^3}{3}\Lambda_{ee}, \qquad \Lambda_{ee} = \ln\frac{2}{y}.$$

Для промежуточных значений имеем таблицу

y	0,5	1,5	3	7	10
$J(y)$	0,056	0,53	2,6	8,8	13,5

Таким образом, теплопроводность вырожденных электронов определяется формулой (8.54), где

$$\nu_e = \begin{cases} \nu_{ei} + \nu_{ee} & \text{при} \quad T \geqslant T_m, \\ \nu_{e,ph} + \nu_{e,imp} + \nu_{ee} & \text{при} \quad T \leqslant T_m. \end{cases} \tag{8.66}$$

Соответствующие формулы для смеси ионов можно получить с помощью замен (8.52).

---

*) Величина q_{TF} имеет смысл обратного радиуса экранирования $q_{TF} = r_{\mathcal{D}e}^{-1}$ (см. (8.46) для нерелятивистского случая).

д) Поглощение при больших температурах и сильных магнитных полях. При аккреции на нейтронные звезды и черные дыры возможно существование областей с большими магнитными полями, где важна непрозрачность, связанная с синхротронным или циклотронным самопоглощением. Оценки непрозрачности для этого случая сделаны в [294]. Из закона Кирхгофа (5.13) следует, что между полной излучательной способностью вещества ϵ_{tot} (эрг · г$^{-1}$ · с$^{-1}$) и средней по Росселанду непрозрачностью κ существует линейная связь

$$\epsilon_{tot} = A\sigma T^4 \kappa.$$

Для тормозного излучения нерелятивистских электронов, согласно [89] и (7.15), соответствующие ϵ_{tot} и κ равны

$$\begin{aligned} \epsilon_{ff} &= 6 \cdot 10^{20} \rho T^{1/2}, \\ \kappa_{ff} &= 6{,}4 \cdot 10^{22} \rho T^{-7/2}. \end{aligned} \tag{8.67}$$

Отсюда

$$A = \frac{6}{6{,}4 \cdot 10^2 \sigma} \approx 170. \tag{8.68}$$

Для максвелловского распределения*) излучательная способность электронов в магнитном поле с компонентой $B_\perp$, перпендикулярной направлению движения электрона, вычислена в [59]:

$$\epsilon_B = \begin{cases} 2{,}3\, TB_\perp^2 & \text{при } kT \ll m_e c^2, \\ 3{,}2 \cdot 10^{-10} T^2 B_\perp^2 & \text{при } kT \gg m_e c^2. \end{cases} \tag{8.69}$$

Соответствующие непрозрачности с использованием (8.68), (8.69) равны [294]

$$\kappa_B = \begin{cases} 2 \cdot 10^2\, B^2/T^3 & \text{при } kT \ll m_e c^2, \\ 3 \cdot 10^{-8} B^2/T^2 & \text{при } kT \gg m_e c^2. \end{cases} \tag{8.70}$$

В [294] для релятивистских максвелловских электронов аналогично вычислено κ_{ff}, используя ϵ_{ff} (см., например, [59]):

$$\begin{aligned} \epsilon_{ff} &= 2 \cdot 10^{16} \rho T \ln \frac{kT}{m_e c^2}, \\ \kappa_{ff} &= 2 \cdot 10^{18} (\rho/T^3) \ln \frac{kT}{m_e c^2}. \end{aligned} \tag{8.71}$$

В оценках этого раздела рассматривалась чисто водородная невырожденная плазма. Учет рождения пар сводится к умножению ϵ и κ в (8.70), (8.71) на величину $\left(1 + \frac{2n_+ m_u}{\rho}\right)$. Для равновесных пар n_+ определяется из (2.9), (2.17). Сравнение (8.71) с (7.29), (7.31) показывает, что для невырожденных электронов всегда $\kappa_{ff} \ll \kappa_{es}$.

---

*) Здесь распределение Максвелла для релятивистских электронов используется вместо ферми-дираковской функции, так как концентрация пар не предполагается равновесной.