§ 9. Перенос излучения в движущихся средах

Если в среде имеют место крупномасштабные движения с полем скоростей v_i, то уравнение переноса (5.9) формально не изменится. Однако взаимодействие квантов с веществом зависит от скорости движения, меняющей частоту квантов из-за эффекта Доплера. При этом возникают существенные усложнения в правой части уравнения (5.9). В связи с этим удобнее записать уравнение переноса в сопутствующей системе координат, покоящейся относительно вещества. В этой системе правая часть (5.9) не меняется, но необходимо учесть изменения в конвективных членах левой части.

а) **Уравнение переноса в сопутствующей системе.** В первых работах [113, 162, 320] уравнение переноса в сопутствующей системе было выведено сложным "геометрическим" методом. В [36, 159] был сделан более простой вывод этого уравнения с помощью инвариантов рассеяния (см. ниже). Обозначим индексом "0" величины, относящиеся к сопутствующей системе. Считая $v \ll c$, оставим везде только первые поправки $\sim v/c$ [320, 36, 159]:

$$\mu_0 = \mu - (1-\mu^2)\frac{v}{c}, \qquad \mu = \mu_0 + (1-\mu_0^2)\frac{v}{c},$$

$$\nu_0 = \nu\left(1 - \mu\frac{v}{c}\right), \qquad \nu = \nu_0\left(1 + \mu_0\frac{v}{c}\right), \tag{9.1}$$

$$\mu_0 = \cos\theta_0, \qquad \mu = \cos\theta.$$

Из условия инвариантности функции распределения фотонов в фазовом пространстве $\tilde{n}_\nu$ относительно преобразований Лоренца (импульс фотона $p_\nu = h\nu/c$),

$$\tilde{n}_\nu = \frac{c^3 f_\nu}{h^3\nu^2} = \frac{c^2 I_\nu}{h^4\nu^3}, \tag{9.2}$$

получаем инвариант

$$\frac{I_\nu}{\nu^3} = \frac{I_{\nu_0}}{\nu_0^3}. \tag{9.3}$$

Здесь $dn_\nu = \tilde{n}_\nu p_\nu^2 dp_\nu dV d\Omega$, f_ν и I_ν определены в (5.1) и (5.4). Из инвариантной записи левой части (5.9) с помощью (9.3) следуют, например, соотношения $\left(\text{используя } \dfrac{dt_0}{\nu_0} = \dfrac{dt}{\nu}\right)$

$$\begin{gathered} \frac{j_{\nu_0}\rho_0}{\nu_0^2} = \frac{j_\nu \rho}{\nu^2}, \\ (\alpha_\nu + \sigma_\nu)\rho\nu = (\alpha_{\nu_0} + \sigma_{\nu_0})\rho_0\nu_0. \end{gathered} \tag{9.4}$$

Для плоской атмосферы, делая замену переменных в уравнениях (5.9), (5.11)

$$(t, r, \mu, \nu, I_\nu) \Rightarrow (t_0, r_0, \mu_0, \nu_0, I_{\nu_0}),$$

с помощью (9.1), (9.3), (9.4) получаем с точностью до членов $\sim v/c$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_{\nu_0}}{\partial t_0}+\mu_0\frac{\partial I_{\nu_0}}{\partial r_0}+\frac{3\mu_0^2}{c}\frac{\partial v}{\partial r_0}I_{\nu_0}-\frac{\mu_0^2}{c}\frac{\partial v}{\partial r_0}\nu_0\frac{\partial I_{\nu_0}}{\partial \nu_0}-$$
$$-\frac{\mu_0(1-\mu_0^2)}{c}\frac{\partial v}{\partial r_0}\frac{\partial I_{\nu_0}}{\partial \mu_0}=j_{\nu_0}\rho_0-\alpha_{\nu_0}\rho_0 I_{\nu_0}. \quad (9.5)$$

Здесь опущено рассеяние, которое можно добавить к правой части аналогично (5.9), и использованы лагранжевы координаты

$$t_0=t,\qquad m=\int_{r_*}^{r_0}\rho_0(x)dx,\qquad \frac{dm}{dr_0}=\rho_0, \quad (9.6)$$

где r_0 — радиус данной лагранжевой точки. При переходе к эйлеровой системе $(\tilde{t},\ \tilde{r}_0)$ в (9.5) нужно сделать замену

$$r_0=\tilde{r}_0,\qquad \frac{\partial}{\partial r_0}=\frac{\partial}{\partial\tilde{r}_0},\qquad \frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}+v\frac{\partial}{\partial\tilde{r}_0}. \quad (9.7)$$

Уравнение переноса в эйлеровой форме записано в [159]. Для сферически симметричного случая, используя (5.12) вместо (5.11) в лагранжевых координатах

$$t_0=t,\quad m=4\pi\int_{r_*}^{r_0}\rho_0(x)x^2dx,\qquad \frac{dm}{dr_0}=4\pi\rho_0 r_0^2. \quad (9.8)$$

аналогично (9.5) получаем [320]

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_{\nu_0}}{\partial t}+\mu_0\frac{\partial I_{\nu_0}}{\partial r_0}+\frac{3v}{cr_0}\left[1-\mu_0^2\left(1-\frac{\partial\ln v}{\partial\ln r_0}\right)\right]I_{\nu_0}+$$
$$+\frac{1-\mu_0^2}{r_0}\left[1+\frac{\mu_0 v}{c}\left(1-\frac{\partial\ln v}{\partial\ln r_0}\right)\right]\frac{\partial I_{\nu_0}}{\partial\mu_0}-$$
$$-\frac{\nu_0 v}{cr_0}\left[1-\mu_0^2\left(1-\frac{\partial\ln v}{\partial\ln r_0}\right)\right]\frac{\partial I_{\nu_0}}{\partial\nu_0}=j_{\nu_0}\rho_0-\alpha_{\nu_0}\rho_0 I_{\nu_0}. \quad (9.9)$$

Используя (9.7), можно получить из (9.9) уравнение переноса для сферически-симметричного случая в эйлеровой системе координат. Более подробный вывод уравнения переноса для движущихся сред дан в книге [159].

б) **Уравнения моментов в эддингтоновском приближении.** Вывод моментных уравнений сделаем так же, как в § 6. Для плоской атмосферы, умножая (9.5) на μ и μ^2 и интегрируя, получаем, опуская далее индекс "0",

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}(P+S)=-\rho c\left[\int_0^\infty\alpha_\nu S_\nu d\nu-\alpha_P B(T)\right], \quad (9.10)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}+c\frac{\partial P}{\partial r}-\frac{2}{c\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}F=-\kappa\rho F. \quad (9.11)$$

Здесь использованы обозначения § 6 и уравнения неразрывности вещества в лагранжевых координатах

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial r} = 0. \tag{9.12}$$

С помощью (9.12) $\partial v/\partial r$ заменяется на $\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)$. При $P = S/3$ из (9.11) и (9.12) получается замкнутая система моментных уравнений в эддингтоновском приближении [36, 37].

Аналогичная процедура для случая сферической симметрии с использованием уравнения (9.9) дает

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}(P + S) + \frac{v}{r}(S - 3P) =$$

$$= -\rho c \left[\int_0^\infty \alpha_\nu S_\nu d\nu - \alpha_P B(T)\right], \tag{9.13}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t} + c\frac{\partial P}{\partial r} - c\frac{S - 3P}{r} - \frac{2}{c\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}F - \frac{2}{r}\frac{v}{c}F = -\kappa\rho F. \tag{9.14}$$

Здесь также использовалось уравнение неразрывности в лагранжевой системе для исключения $\partial v/\partial r$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(vr^2) = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} - 2\frac{v}{r}. \tag{9.15}$$

Для замыкания системы (9.13), (9.14) можно воспользоваться связью $P = fS$ с переменным фактором Эддингтона f из (6.28). При решении задач о стационарном истечении из звезд удобно воспользоваться записью уравнений моментов в эйлеровой системе. Для этого в (9.10), (9.11) и (9.13), (9.14) нужно сделать замену

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow v\frac{\partial}{\partial r}. \tag{9.16}$$

Отметим, что в условиях лучистого равновесия правые части в (9.10), (9.13) обращаются в нуль. В истекающих оболочках с градиентом скорости величина $F \neq \mathrm{const}$*) ввиду возможной трансформации потока лучистой энергии в кинетическую. Если поле излучения не влияет на свойства потока, то уравнения (9.10)–(9.14) могут быть решены при заданных $\rho(r, t)$, $v(r, t)$. Для решения самосогласованной задачи систему следует дополнить уравнениями неразрывности, движения и энергии для вещества, рассмотренными ниже.

---

*) В сферически-симметричном случае $Fr^2 \neq \mathrm{const}$.