ГЛАВА 3

КОНВЕКЦИЯ

Распределения температуры и плотности в звездах, которые удовлетворяют уравнениям равновесия и теплопроводности, могут оказаться неустойчивыми относительно развития несимметричных возмущений различного масштаба, приводящих к движению вещества, которое называется конвекцией. Рассмотрим конвекцию в оптически толстых средах. Проблема атмосферной конвекции, где оптическая толща может быть малой, имеет свою специфику и должна рассматриваться отдельно.

§ 10. Условия возникиовения конвекции; путь перемешивания

а) **Условие конвективной неустойчивости.** Рассмотрим область звезды, где тепловой поток переносится теплопроводностью. Выделим малый элемент объема внутри этой области и сместим его наружу или внутрь на расстояние dr. При медленных перемещениях давление внутри элемента равно давлению внешней среды. После освобождения данный элемент либо стремится возвратиться в исходное положение, либо продолжает удаляться от него. В последнем случае среда называется конвективно неустойчивой.

Предположим сначала, что обмен энергией между элементом и средой отсутствует. В этом случае плотность внутри элемента при его смещениях следует адиабатическому закону. Пусть первоначально элемент находился в точке с параметрами T_0, ρ_0, P_0. При смещении на dr его параметры (с индексом e) и параметры среды (с индексом m) изменяются на величины

$$\Delta T_e = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \frac{dP}{dr} dr, \qquad \Delta T_m = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \frac{dP}{dr} dr + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P \frac{dS}{dr} dr,$$

$$\Delta \rho_e = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S \frac{dP}{dr} dr, \qquad \Delta \rho_m = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S \frac{dP}{dr} dr + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_P \frac{dS}{dr} dr. \tag{10.1}$$

Среда конвективно неустойчива, если при смещении наружу и расширении элемента его плотность падает быстрее, чем плотность среды, а при смещении внутрь и сжатии – быстрее растет. В этих условиях архимедова сила стремится удалить элемент от исходного равновесного положения. Таким образом, среда конвективно неустойчива, если

$$\Delta \rho_e > \Delta \rho_m \text{ или } \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_P \frac{dS}{dr} dr < 0 \text{ при сжатии,}$$

$$\Delta \rho_e < \Delta \rho_m \text{ или } \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_P \frac{dS}{dr} dr > 0 \text{ при расширении.} \tag{10.2}$$

Учитывая, что $(\partial \rho/\partial S)_P = -\gamma_2 \rho^2 T/P$, где $\gamma_2 = \left(\dfrac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_S$ дано в (1.12), а $dr < 0$ при сжатии и $dr > 0$ при расширении, получаем из обоих случаев

(10.2), что в конвективно неустойчивой звезде

$$dS/dr < 0, \tag{10.3}$$

т.е. удельная энтропия падает от центра наружу.

Условие (10.3) необходимо для развития конвективной неустойчивости, но не достаточно из-за неизбежного нарушения адиабатичности при движении элемента в среде. При адиабатическом расширении элемента в среде с $dS/dr < 0$ его температура становится больше температуры среды и процессы теплопроводности стремятся ее выровнять, что стабилизирует конвективную неустойчивость. С другой стороны, вязкость замедляет движение элемента, что также дает стабилизацию. Общий критерий конвективной неустойчивости с учетом явлений переноса был получен Релеем (1916) и имеет вид [312]

$$R = \frac{g\alpha_T\beta_T h^4}{k_T\nu} > R_{cr} \approx 10^3. \tag{10.4}$$

Здесь g – ускорение силы тяжести, h –толщина рассматриваемого слоя, $\alpha_T = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P$ – коэффициент теплового расширения, $\beta_T = (\partial T/\partial r)_S - dT/dr = \Delta\nabla T$ – превышение градиента над адиабатическим, k_T и ν – коэффициенты температуропроводности и кинематической вязкости, которые выражаются через коэффициенты теплопроводности λ и вязкости η в виде

$$\lambda = \rho c_p k_T, \qquad \eta = \rho\nu. \tag{10.5}$$

Величина R_{cr} зависит от геометрии системы, граничных условий. Для слоя со свободными границами $R_{cr} = 27\pi^4/4 = 657{,}5$; с одной свободной границей и одной жесткой неподвижной $R_{cr} = 1101$; с двумя жесткими неподвижными границами $R_{cr} = 1708$ [312]. Величину $\beta_T = \Delta\nabla T$ можно выразить через dS/dr, используя термодинамические сотношения [145]

$$\Delta\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_S - \frac{dT}{dr} = -\frac{T}{c_p}\frac{dS}{dr}, \quad \left(\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_S = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S\frac{dP}{dr}\right). \tag{10.6}$$

Условие Релея (10.4) означает, что для развития конвекции необходимо конечное значение отрицательного градиента энтропии. Для реальных условий в звездах, где характерные масштабы h очень велики, коэффициент при dS/dr в (10.4), (10.6) столь велик, что условие (10.3) можно использовать и в качестве достаточного условия возникновения конвекции. Этот критерий известен, как критерий Шварцшильда (1906).

б) Учет неоднородности химического состава. В химически неоднородной среде критерий (10.3) был дополнен в [147, 554] учетом изменения молекулярного веса μ (см. (1.6), (1.7)). Дополнение связано с поправкой к подъемной силе, вызванной переменностью μ. В этом случае

$$\Delta\rho_m = \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_{S,\mu}\frac{dP}{dr}\,dr + \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_{P,\mu}\frac{dS}{dr}\,dr + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right)_{S,P}\frac{d\mu}{dr}\,dr. \tag{10.7}$$

Условия (10.2) с использованием (10.1), (10.7) сведутся к соотношению

$$\frac{dS}{dr} - \left(\frac{\partial S}{\partial \mu}\right)_{\rho,P} \frac{d\mu}{dr} < 0. \tag{10.8}$$

Учтя, что $(\partial S/\partial \mu)_{\rho,P} > 0$ [145], получим, что уменьшение молекулярного веса наружу стабилизирует конвективную неустойчивость, так что она наступает при конечном отрицательном значении dS/dr. Подобная стабилизация наступает при горении водорода в ядрах массивных звезд [165].

Перепишем критерий (10.8) в более удобном виде через градиенты ∇T и ∇P, непосредственно определяемые из уравнений звездной структуры (см. гл. 6). Учтя, что вдоль звезды

$$\frac{dP}{dr} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\rho,\mu} \frac{dT}{dr} + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{T,\mu} \frac{d\rho}{dr} + \left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_{\rho,T} \frac{d\mu}{dr},$$

получаем

$$\frac{d\rho}{dr} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_{T,\mu} \left[\frac{dP}{dr} - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\rho,\mu} \frac{dT}{dr} - \left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_{\rho,T} \frac{d\mu}{dr}\right]. \tag{10.9}$$

Условие конвективной неустойчивости (10.2) с учетом выражения $\Delta\rho_e$ из (10.1) запишется в виде *)

$$\frac{\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_{S,\mu}}{(\partial\rho/\partial P)_{T,\mu}} \frac{dP}{dr} < \frac{dP}{dr} - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\rho,\mu} \frac{dT}{dr} - \left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_{\rho,T} \frac{d\mu}{dr}. \tag{10.10}$$

Используя преобразования якобианов (1.10) и следующее из них равенство

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{\rho,\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{S,\mu} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{S,\mu} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_{P,\mu} = 1,$$

имеем из (10.10)

$$\frac{d\ln T}{d\ln P} > \left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_{S,\mu} + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \mu}\right)_{P,\rho} \frac{d\ln \mu}{d\ln P}. \tag{10.11}$$

Условие конвективной неустойчивости в виде (10.11) получено в работах [147, 554]. Для смеси идеального газа с излучением

$$\left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \mu}\right)_{P,\rho} = \frac{\beta}{4 - 3\beta_g}, \quad \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_{S,\mu} = \gamma_2 \quad \text{из (1.12).}$$

в) Перенос тепла конвекцией в приближении пути перемешивания. У самой границы устойчивости конвективные движения являются топологически сложными, но вполне регулярными. При удалении от границы в область конвективной неустойчивости скорости конвективных движений воз-

---

*) В этом параграфе величина μ считается не зависящей от T и ρ. В равновесии, когда $\mu = \mu(\rho_1 T)$, например при ионизации, переменность μ учитывается в производных от T и ρ, а член с $d\mu/dr$ выпадает.

растают (см. (10.14)). Характер движений в жидкости или газе определяется безразмерным числом Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{vL_d}{\nu}, \qquad (10.12)$$

где L_d – характерный масштаб порядка шкалы высот по давлению $H_p = \frac{P}{|\nabla P|}$ (см.(10.22)). При малых значениях Re движение является регулярным, ламинарным, а при больших – хаотическим, запутанным, турбулентным. Критическое число Рейнольдса Re_{cr} меняется в зависимости от геометрии и граничных условий и лежит в пределах [235] $\mathrm{Re}_{cr} = 400 \div 10^4$. В звездах характерные масштабы столь велики, что конвекция уже вблизи границы становится турбулентной. Например, в атмосфере Солнца в области оптической толщи $\tau \approx 1$ имеем [312] $L_d \approx 5 \cdot 10^7$ см, $\nu \approx 2 \cdot 10^3$ см$^2 \cdot$ с$^{-1}$, $v \approx 2 \cdot 10^4$ см $\cdot$ с$^{-1}$, $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^8 \gg \mathrm{Re}_{cr}$. Рост параметра Re сопровождается усложнением регулярной картины конвективных движений, которые становятся хаотическими при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr}$.

Количественное описание турбулентной конвекции, как и обычной гидродинамической турбулентности, сталкивается с принципиальными трудностями, связанными с недостаточностью наших знаний о природе хаотических или стохастических явлений. Прогресс в этой области связан с исследованием природы стохастичности в динамических системах с конечным небольшим числом степеней свободы. Это привело к качественному пересмотру картины развития турбулентности [198], открытию замечательных количественных закономерностей, описывающих развитие стохастических движений [211]. Однако до применения этих достижений к описанию турбулентной конвекции в звездах еще далеко.

До сих пор наиболее распространенным при изучении внутреннего строения звезд является простое количественное описание конвекции, основанное на модели пути перемешивания [306]. Предполагается, что конвективные элементы двигаются вверх и вниз, поднимаясь и опускаясь на длину l, которая называется средним путем перемешивания. Пройдя длину l, конвективный элемент полностью сольется с окружающей средой. Поднявшись на расстояние dr, конвективный элемент обладает избытком температуры $\Delta\nabla T dr$, который соответствует избытку энергии на единицу объема, $\rho c_p \Delta\nabla T dr$ так как обмен энергией происходит при постоянном давлении. Умножая на скорость конвективного элемента v, получаем поток конвективной энергии в виде

$$F_{\mathrm{conv}} = \Delta\nabla T dr c_p \rho v \quad (\text{эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}). \qquad (10.13)$$

Величина v определяется из условия, что работа подъемной силы на расстоянии dr переходит в кинетическую энергию элемента. Средняя подъемная сила на единицу объема есть $\frac{1}{2} \Delta\nabla\rho dr \cdot g$ и на расстоянии dr имеем

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}\Delta\nabla\rho dr^2 g. \qquad (10.14)$$

Величина $\Delta\nabla\rho$ находится с помощью выкладок, аналогичных выводу (10.6), (10.11). Получаем

$$\Delta\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{S,\mu} - \frac{dT}{dr} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S,\mu} \frac{dP}{dr} - \frac{dT}{dr}, \tag{10.15}$$

$$\Delta\nabla\rho = \frac{d\rho}{dr} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)_{S,\mu} = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{P,\mu}\left[\Delta\nabla T + \left(\frac{\partial T}{\partial \mu}\right)_{P,\rho}\frac{d\mu}{dr}\right]. \tag{10.16}$$

Приняв, что среднее значение теплового потока соответствует сдвигу элемента на расстояние, равное половине длины перемешивания

$$\overline{dr} = \frac{1}{2}\,l, \tag{10.17}$$

получаем

$$F_{\text{conv}} = c_p\rho\left[-\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{P,\mu}\frac{g}{\rho}\right]^{1/2} \times$$

$$\times\,\frac{l^2}{4}\left[(\Delta\nabla T)^3 + (\Delta\nabla T)^2\left(\frac{\partial T}{\partial\mu}\right)_{P,\rho}\frac{d\mu}{dr}\right]^{1/2}. \tag{10.18}$$

Обычно принимается, что конвекция выравнивает химический состав, поэтому в (10.18) можно принять $d\mu/dr = 0$. Для смеси полностью ионизованного газа с излучением c_p дано в (1.20), а

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{P,\mu} = -\frac{\rho}{T}\left(1 + 4\frac{P_r}{P_g}\right) = -\frac{\rho}{T}\left(\frac{4}{\beta_g} - 3\right). \tag{10.19}$$

В сферически симметричной звезде $g = Gm/r^2$, m – масса внутри радиуса r. Подставляя это в (10.18), получаем

$$F_{\text{conv}} = c_p\rho\left[\frac{Gm}{Tr^2}\left(\frac{4}{\beta_g} - 3\right)\right]^{1/2}\frac{l^2}{4}(\Delta\nabla T)^{3/2}. \tag{10.20}$$

Соотношение, аналогичное (10.20), использовалось в [277, 295]. Для идеального газа получаем выражение ($\beta_g = 1$)

$$F_{\text{conv}} = c_p\rho\left(\frac{Gm}{Tr^2}\right)^{1/2}\frac{l^2}{4}(\Delta\nabla T)^{3/2}, \tag{10.21}$$

приведенное в книге [229].

В теорию пути перемешивания входит свободный параметр l, который обычно принимается порядка шкалы высот по давлению

$$l = \alpha_p H_p = \alpha_p\frac{P}{|dP/dr|}, \tag{10.22}$$

где $\alpha_p \sim 1$ – численный коэффициент, выбираемый из условия наилучшего согласия с наблюдениями. Обычно $\alpha_p = 0{,}5 \div 2$.

В конвективных ядрах звезд, где большая плотность и эффективность переноса тепла конвекцией очень велика, величина $\Delta\nabla T$ становится столь малой, что распределение температуры можно считать адиабатическим и вместо уравнения теплопроводности использовать соотношение [229]

$$\frac{dT}{dr} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S,\mu} \frac{dP}{dr} . \tag{10.23}$$

§ 11. Нелокальное и нестационарное описание конвекции

Конвективные элементы рождаются в неустойчивой области, разгоняются под действием подъемной силы и проникают в область конвективной устойчивости (overshooting). В данной точке тепловой поток зависит не только от локального значения $\Delta\nabla T$ и других параметров, но по меньшей мере от параметров в области $r \pm l$, т.е. даже в приближении пути перемешивания естественно возникают эффекты нелокальности и проникновения конвекции. Эти эффекты могут быть важными при наличии нескольких конвективных зон, разделенных лучистыми слоями. Проникновение конвекции в эти слои с $\Delta\nabla T \leqslant 0$ может существенно повлиять на эволюцию, приводя к перемешиванию и выравниванию химического состава. При изучении нестационарных процессов в звездах (колебания, тепловые вспышки, коллапс) необходимо нестационарное описание конвекции, т.е. учет временной нелокальности наряду с пространственной.

а) **Обобщение модели пути перемешивания.** Естественное обобщение модели пути перемешивания для учета эффектов проникновения и нелокальности сделано в работах [475, 513, 576]. В [475] рассмотрена итерационная процедура, позволяющая включить эти эффекты в расчеты эволюции.

В условиях конвекции полный тепловой поток F состоит из суммы

$$F = F_{\rm rad} + F_{\rm NL} = \frac{L}{4\pi r^2} , \tag{11.1}$$

причем из (6.32) имеем

$$F_{\rm rad} = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho}\frac{dT}{dr} , \tag{11.2}$$

а $F_{\rm NL}$ – нелокальный конвективный поток. Вводим отношение

$$f = \frac{F_{\rm rad}}{F} , \tag{11.3}$$

с помощью которого можно записать

$$\frac{L(r)}{4\pi r^2} = F = -\frac{4\pi acT^3}{3\kappa\rho}\frac{1}{f}\frac{dT}{dr} . \tag{11.4}$$

Используя (11.4) в системе уравнений (22.1) – (22.7) при заданной функции $f_0(r)$ можно однозначно построить модель звезды. Имея модель, найдем конвективный поток с помощью нелокального подхода [475, 576].