В конвективных ядрах звезд, где большая плотность и эффективность переноса тепла конвекцией очень велика, величина $\Delta\nabla T$ становится столь малой, что распределение температуры можно считать адиабатическим и вместо уравнения теплопроводности использовать соотношение [229]

$$\frac{dT}{dr} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S,\mu} \frac{dP}{dr} . \tag{10.23}$$

§ 11. Нелокальное и нестационарное описание конвекции

Конвективные элементы рождаются в неустойчивой области, разгоняются под действием подъемной силы и проникают в область конвективной устойчивости (overshooting). В данной точке тепловой поток зависит не только от локального значения $\Delta\nabla T$ и других параметров, но по меньшей мере от параметров в области $r \pm l$, т.е. даже в приближении пути перемешивания естественно возникают эффекты нелокальности и проникновения конвекции. Эти эффекты могут быть важными при наличии нескольких конвективных зон, разделенных лучистыми слоями. Проникновение конвекции в эти слои с $\Delta\nabla T \leqslant 0$ может существенно повлиять на эволюцию, приводя к перемешиванию и выравниванию химического состава. При изучении нестационарных процессов в звездах (колебания, тепловые вспышки, коллапс) необходимо нестационарное описание конвекции, т.е. учет временной нелокальности наряду с пространственной.

а) **Обобщение модели пути перемешивания.** Естественное обобщение модели пути перемешивания для учета эффектов проникновения и нелокальности сделано в работах [475, 513, 576]. В [475] рассмотрена итерационная процедура, позволяющая включить эти эффекты в расчеты эволюции.

В условиях конвекции полный тепловой поток F состоит из суммы

$$F = F_{\rm rad} + F_{\rm NL} = \frac{L}{4\pi r^2} , \tag{11.1}$$

причем из (6.32) имеем

$$F_{\rm rad} = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho}\frac{dT}{dr} , \tag{11.2}$$

а $F_{\rm NL}$ – нелокальный конвективный поток. Вводим отношение

$$f = \frac{F_{\rm rad}}{F} , \tag{11.3}$$

с помощью которого можно записать

$$\frac{L(r)}{4\pi r^2} = F = -\frac{4\pi acT^3}{3\kappa\rho}\frac{1}{f}\frac{dT}{dr} . \tag{11.4}$$

Используя (11.4) в системе уравнений (22.1) – (22.7) при заданной функции $f_0(r)$ можно однозначно построить модель звезды. Имея модель, найдем конвективный поток с помощью нелокального подхода [475, 576].

Для конвективного элемента, начинающего свое движение с радиуса r_i, избыток температуры внутри элемента $\Delta T(r)$ записывается в виде

$$\Delta T(r) = \int_{r_i}^{r} \Delta\nabla T dr. \tag{11.5}$$

Аналогично избыток плотности среды есть

$$\Delta\rho(r) = \int_{r_i}^{r} \Delta\nabla\rho dr. \tag{11.6}$$

Вместо (10.14) имеем тогда уравнение для определения скорости конвективного элемента

$$\frac{v^2}{2} = (1-\nu_T)\int_{r_i}^{r} g\frac{\Delta\rho}{\rho}\, dr, \tag{11.7}$$

где ν_T – доля работы выталкивающей силы, превращающейся в тепло из-за трения. Величины $\Delta\nabla T$ и $\Delta\nabla\rho$ определены в (10.15), (10.16). Следуя гипотезе перемешивания, примем, что конвективный элемент полностью сливается со средой, проходя длину пробега l. Тогда в среднем для поднимающихся элементов интегрирование в (11.5), (11.7) нужно вести при

$$0 \leqslant r - r_i \leqslant l/2, \tag{11.8}$$

а для опускающихся – при

$$-l/2 \leqslant r - r_i \leqslant 0 \quad \text{при} \quad r \geqslant 0. \tag{11.9}$$

В последнем случае $\Delta T < 0$, $\Delta\rho < 0$, но в (11.7) всегда $v^2 > 0$. Обозначая индексами "+" и "–" величины, относящиеся к поднимающимся и опускающимся элементам, получим нелокальный конвективный тепловой поток в виде

$$F_{\text{NL}} = \frac{1}{2} c_p\rho(\Delta T_+ v_+ + |\Delta T_- v_-|). \tag{11.10}$$

Здесь предположено, что поднимающиеся и опускающиеся элементы имеют одинаковую площадь. В [475] принято $\nu_T = 0{,}5$.

По заданной модели, используя (11.2) и (11.10), находим новое значение f:

$$f_1(r) = \frac{F_{\text{rad}}}{F_{\text{NL}} + F_{\text{rad}}}. \tag{11.11}$$

Итерации производятся, пока $|f_n - f_{n-1}|$ не станет меньше заданной точности ϵ. Величина l находится из (10.22) в точке r.

Если в (11.7) подставить среднее значение $\overline{\Delta\rho} = \frac{1}{2}\Delta\nabla\rho\Delta r$, $\nu_T = 0$, то оно совпадает с (10.14). Учтя в (11.5) $\overline{\Delta T_+} = \overline{|\Delta T_-|} = \Delta\nabla T\cdot\Delta r$, получаем, что (11.10) при $\Delta r = |r - r_i| = l/2$ совпадает с локальным значением потока F_{conv} из (10.13).

В данной картине поднимающиеся элементы пересекают границу $\Delta\nabla T = 0$ при $r = r_\delta$ с конечной скоростью и проникают на расстояние $r_v < r_\delta + \frac{l}{2}$, где скорость их зануляется. При движении в области $r_\delta < r < r_v$

они постепенно теряют избыток температуры и при $r = r_\epsilon$ таком, что $r_\delta < r_\epsilon < r_v$, температуры и плотности элемента и среды сравниваются. В области $r_\epsilon < r < r_v$ архимедова сила замедляет элемент и конвективный поток является отрицательным. Расчеты в [475, 576] показывают, что конвекция проникает до расстояний $10 \div 15\,\%$ от l, причем глубина проникновения стремится к конечной величине $r_v - r_\delta \approx 0{,}06\, l$ при исчезновении конвективной зоны. Построение звездных моделей с помощью изложенной итерационной процедуры сделано в [475].

Другой вариант учета нелокальных эффектов конвекции, рассмотренный Ульрихом в 1969 г., изложен в работе [612]. В этом варианте используется усреднение по конвективным элементам, приходящим в данную точку со всех возможных уровней. Если известны локальные значения конвективного потока из (10.18), то истинное нелокальное значение $F_{\mathrm{NL}*}$ получается в виде

$$F_{\mathrm{NL}*}(z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\mathrm{conv}}(z)\psi_0(z_0, z)dz,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(z_0, z)dz = 1, \quad dz = \frac{dr}{H_p}. \tag{11.12}$$

В [612] предлагается весовая функция $\psi_0(z_0, z)$ в виде

$$\psi_0 = \frac{a_k}{2\alpha'} \exp\left(-\frac{z_0 - z}{\alpha'}\right), \quad z_0 > z,$$
$$\psi_0 = (1 - a_k)\delta(z_0 - z), \quad z_0 = z,$$
$$\psi_0 = \frac{a_k}{2\alpha''} \exp\left(-\frac{z - z_0}{\alpha''}\right), \quad z_0 < z, \tag{11.13}$$
$$\alpha' = 1{,}2\alpha_p; \quad \alpha'' = 0{,}6\alpha_p, \quad a_k < 0{,}9.$$

Здесь H_p и α_p определены в (10.22). Функция (11.13) учитывает асимметрию вклада в $F_{\mathrm{NL}*}$ от поднимающихся ($z_0 > z$) и опускающихся элементов, а также возможный конечный вес $(1 - a_k)$ локального потока в данной точке. Рассмотренная выше итерационная процедура может быть использована и при расчете нелокального потока с помощью (11.12). Расчеты моделей оболочек звезд с $M = 1{,}25\, M_\odot$ и $3\, M_\odot$ с помощью $F_{\mathrm{NL}*}$ из (11.12) проводилось в [242], а для вычисления солнечного конвективного потока в [513] использовалось как F_{NL} из (11.10), так и $F_{\mathrm{NL}*}$ из (11.12), причем различие результатов оказалось существенным.

б) Нестационарная конвекция. В [364] были получены уравнения, описывающие конвективный перенос энергии и импульса в нестационарных условиях. Для вывода проводилось усреднение гидродинамических уравнений по флуктуирующим переменным и использовалось условие пути перемешивания. В сферически-симметричном случае вводятся величины, характеризующие конвекцию:

$$F_{\mathrm{conv}} = \overline{\rho E w_r} \quad (\text{эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}) \text{ — конвективный поток энергии,} \tag{11.14}$$
$$E_{\mathrm{conv}} = 3\overline{\rho w_r^2}/2\bar{\rho} \quad (\text{эрг} \cdot \text{г}^{-1}) \text{ — средняя удельная конвективная энергия.}$$

Средний модуль радиальной конвективной скорости выражается в виде [364]

$$\overline{w}_r = -F_{\text{conv}} \Big/ \left(\frac{\partial \overline{E}}{\partial \overline{\rho}}\right)_{\overline{P}} \overline{\rho}^2. \tag{11.15}$$

Введем также обычный путь перемешивания l из (10.22). Если расстояние до центра r или толщина конвективной зоны h меньше пути перемешивания из (10.22), то l выбирается минимальной из этих трех величин. Уравнения для F_{conv} и E_{conv} для изотропной конвекции имеют вид [364]

$$\frac{1}{r^2}\frac{D}{Dt}(r^2 F_{\text{conv}}) = -\frac{2}{3}\overline{\rho} E_{\text{conv}}\left(\frac{\partial \overline{E}}{\partial r} + \overline{P}\frac{\partial(1/\overline{\rho})}{\partial r}\right) +$$

$$+ F_{\text{conv}}\left[\left(\frac{\partial \epsilon_n}{\partial \overline{E}}\right)_{\overline{P}} - 2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\overline{|w_r|}}{l} - \frac{16ac\overline{T}^3(\partial \overline{T}/\partial \overline{\rho})_{\overline{P}}}{3\overline{\kappa}\,\overline{\rho}^2(\partial \overline{E}/\partial \overline{\rho})_{\overline{P}}\, l^2}\right], \tag{11.16}$$

$$\frac{DE_{\text{conv}}}{Dt} = \left[\frac{F_{\text{conv}}}{\overline{\rho}^3} \Big/ \left(\frac{\partial \overline{E}}{\partial \overline{\rho}}\right)_{\overline{P}}\right]\frac{\partial \overline{P}}{\partial r} - \frac{\overline{|w_r|^3}}{l} -$$

$$-\frac{2}{3}\overline{\rho} E_{\text{conv}}\frac{D(1/\overline{\rho})}{Dt}. \tag{11.17}$$

Здесь $D/Dt = \partial/\partial t + v_r \partial/\partial r$; $\overline{\rho}, \overline{T}, \overline{E}, \overline{P}, v_r$ – средние значения величин, входящие в уравнения гидродинамики (35.1)–(35.3), где черта сверху обычно опускается, ϵ_n (эрг $\cdot$ г$^{-1}$ $\cdot$ с$^{-1}$) – объемная скорость выделения или потерь энергии (ядерные реакции, нейтринное излучение) $\overline{\kappa}$ – непрозрачность. Поправки к гидродинамическим уравнениям (35.1)–(35.3) за счет конвекции состоят в заменах

$$P \Rightarrow \overline{P} + \frac{2}{3}\overline{\rho} E_{\text{conv}},$$
$$E \Rightarrow \overline{E} + E_{\text{conv}}, \tag{11.18}$$
$$F_{\text{rad}} \Rightarrow F_{\text{rad}} + F_{\text{conv}}\left[1 - \frac{\overline{P}}{\overline{\rho}^2} \Big/ \left(\frac{\partial \overline{E}}{\partial \overline{\rho}}\right)_{\overline{P}}\right] \approx F_{\text{rad}} + \overline{(\rho E + P) w_r}.$$

Уравнения (11.16), (11.17) содержат в себе условие конвективной неустойчивости в виде $dS/dr < 0$, т.е. изменение химического состава не учитывается. При $dS/dr > 0$ возмущения не растут, а колебательно затухают. Очевидно, что конвективный поток здесь описывается нелокально, так как определяется решением дифференциального уравнения. В [364] уравнения (11.16), (11.17) использовались для расчетов коллапса и взрыва массивных звезд после потери устойчивости.

Еще один вариант описания нестационарной и нелокальной конвекции путем добавления дифференциальных уравнений для F_{conv} и E_{conv} рассматривался в [345], однако полученные там уравнения не применялись для расчета звездных моделей.

Менее универсальные, но более детальные модели описания конвекции с учетом нестационарности, анизотропии, малой оптической толщи часто используются в связи с построением моделей атмосфер у пульсирующих звезд (см., например, [261, 378]). Теории нелокальной конвекции почти не применяются при проведении эволюционных расчетов, так как существенные математические усложнения не сопровождаются заметным увеличением точности результатов по сравнению с локальной теорией [306]. Во всех случаях остается произвол, связанный с выбором параметров теории типа l в (11.8) или функций типа ψ_0 в (11.12).

§ 12. Численное моделирование конвекции

При изучении таких астрофизических проблем, как аномалии химического состава, определяемые по спектрам звезд, солнечная грануляция, генерация нетеплового потока конвекцией приближение пути перемешивания в различных его модификациях оказывается недостаточным и используется численное моделирование конвекции. Решаемые при этом задачи очень сложны и требуют трудоемких двух- и трехмерных нестационарных расчетов [207]. Задачи подобного типа рассматриваются в гидродинамике для моделирования движения газов и жидкостей с потоками тепла, важной областью применения которых является моделирование движений в атмосфере Земли и планет.

Теория внутреннего строения звезд имеет лишь некоторые точки соприкосновения с такими расчетами: с их помощью объясняются отдельные наблюдательные особенности звезд на разных эволюционных стадиях. Как правило, каждая задача по численному моделированию предполагается для применения к какой-либо конкретной астрофизической задаче. Отсутствие универсальности, а также большие вычислительные сложности объясняют то, что численные модели конвекции не применяются и вряд ли будут в ближайшее время использоваться при расчетах звездной эволюции. Приведем качественное описание различных приближений при численном моделирования конвекции.

Основой для такого моделирования является система гидродинамических уравнений Навье-Стокса [150], в которой содержатся эффекты вязкости и теплопроводности. При исследовании л а м и н а р н о й конвекции свойства переноса определяются излучением или газом. Численное исследование ламинарной конвекции на двумерных моделях горизонтального слоя с твердыми границами ("валиковая конвекция") обнаружило ячеистую структуру [83]. Отметим, что картина трехмерной конвекции является более сложной [312], топологически эквивалентной наматыванию линий тока на тор – "торовая конвекция" (рис. 19).

Как отмечалось в § 10, п. в, конвекция в звездах, как правило, является т у р б у л е н т н о й. Численное моделирование турбулентной конвекции проводится в приближении, когда мелкомасштабные конвективные движения рассматриваются усредненно в виде турбулентных коэффициентов вязкости и теплопроводности. Движения максимального масштаба $\sim H_p$ и больше, даже в условиях турбулентной конвекции образуют регулярные структуры, проявляющиеся в наблюдениях солнечной грануляции [312]. Исследование турбулентной конвекции в постановке, аналогичной [83], но с турбулентными коэффициентами переноса проводилось в работах [324, 581].