

В этом случае изотопы одного и того же элемента связаны равновесными соотношениями (13.14), а каждое уравнение типа (16.10) пишется для суммы всех изотопов данного элемента с оставлением в правой части только бета-процессов. Исследование  $r$ -процессов в условиях частичного равновесия проведено в работе [574]. Расчеты с учетом кинетики ( $n$ ,  $\gamma$ ), ( $\gamma$ ,  $n$ ) реакций, временных зависимостей  $n_n(t)$  и  $T(t)$ , а также запаздывающих процессов выполнены в [151]. Обзоры более ранних работ даны в [609, 396].

Основной целью расчетов  $r$ -процессов является объяснение наблюдательной распространенности  $r$ -элементов, имеющей три пика при  $A = 80, 130, 195$ . В проведенных к настоящему времени расчетах не удалось получить все три пика необходимой высоты в одном физическом явлении. Это может быть связано с плохим выбором задаваемых функций  $n_n(t)$ ,  $T(t)$ , большими ошибками в теоретически определяемых ядерных характеристиках, но это может быть следствием того, что в реальности разные наблюдаемые пики образуются в разных физических условиях.

Большие трудности возникают, если пытаться объяснять образование очень тяжелых элементов вблизи урана за счет  $r$ -процессов. Для этого требуются большие концентрации нейтронов,  $n_n \approx 10^{24} \text{ см}^{-3}$ , которые вряд ли достижимы при взрывах сверхновых. Для преодоления этих трудностей предлагалось дополнить  $r$ -процесс учетом фотоотщеплений протонов ( $\gamma, p$ ) при наличии равновесия по ( $n, \gamma$ ) и ( $\gamma, n$ ) реакциям ( $rbc$ -процесс [179]). Это сильно понижает требования к нейтронной плотности, так как она предполагается поддерживающейся равновесными процессами.

В работах [60, 61, 287] производство сверхтяжелых элементов рассматривалось при большой плотности нейтронов  $n_n \approx 10^{30} \text{ см}^{-3}$  и умеренной температуре  $T \leq 10^8 \text{ К}$ , так что все ядра оказываются вблизи границы испарения нейтронов при  $Q_n \approx 0$  ( $n$ -процесс), см. рис. 20. Такая ситуация может реализоваться в неравновесных оболочках нейтронных звезд (см. § 4), выбросы из которых приведут к появлению сверхтяжелых элементов в межзвездной среде, звездах и планетах [287, 61, 326], см. § 46. \*) В рассмотрении  $n$ - и  $rbc$ -процессов получены только первые результаты и для установления важности этих процессов для нуклеосинтеза требуются дальнейшие исследования.

## § 17. Ядерные реакции в плотном веществе

В предыдущем рассмотрении предполагалось, что в ядерной реакции участвуют только две заряженных частицы (или три в  $3\alpha$  реакции) и пренебрегалось взаимодействием с другими ядрами и электронами. Кулоновские взаимодействия в плазме уменьшают величину потенциального барьера и увеличивают вероятность его прохождения, по сравнению с (13.23). Ускорение реакции за счет экранирования существенно зависит от параметров плазмы. При низких плотностях и высоких температурах, в об-

\*) В работах [298, 299] то же название  $n$ -процесс применялось для другого явления: нейтронного захвата, промежуточного по скорости между  $s$ - и  $r$ -процессами, когда  $t_\beta \sim t_{n\gamma}$ . Для производства тяжелых элементов этот процесс работает хуже, чем  $r$ -процесс. Здесь название  $n$ -процесс применяется только в смысле [60, 61, 287].

ласти почти идеального газа ионов при  $\Gamma = Z^2 e^2 / akT \ll 1$  (см. (8.56)), средняя энергия кулоновского взаимодействия ионов  $E_{кул} \approx kT \cdot \Gamma$  много меньше кинетической и имеет место слабое экранирование (СЛЭ). С ростом плотности и уменьшением температуры средняя кулоновская энергия становится больше кинетической  $\Gamma > 1$ , но энергия частиц, вступающих в реакцию, еще превышает среднюю кулоновскую энергию и они могут рассматриваться, как свободные. В этих условиях происходит так называемое сильное экранирование (СИЭ). Оба вида экранирования рассматривались в работах [557, 488], а также в серии работ японских авторов (см. обзоры [431, 427]). При дальнейшем падении температуры и росте плотности средняя кулоновская энергия начинает превышать энергию частиц, вступающих в реакцию, и роль кулоновских взаимодействий становится определяющей. При этом зависимость скорости реакции от  $T$  пропадает, а режим экранирования называется пикноядерным (П) и рассмотрен в работах [102, 557]. Будем характеризовать плазму, где идет реакция (13.1) с  $Z_0 \geq Z_1$  безразмерными параметрами

$$\Gamma_Z = \frac{Z^2 e^2}{akT} = Z^{5/3} \frac{e^2}{kT} \left( \frac{4\pi}{3} n_e \right)^{1/3} =$$

$$= Z^{5/3} \cdot \frac{5,7562 \cdot 10^8 \text{ К}}{T} \left( \frac{\rho}{\mu_Z \cdot 1,6203 \cdot 10^{10}} \right)^{1/3}, \quad a = \left( \frac{3Z}{4\pi n_e} \right)^{1/3} \quad (17.1)$$

(в формуле (8.56)  $a \equiv l_{WS}$ ),

$$\tau^3 = \frac{27\pi^2}{2} \frac{A m_u Z_0^2 Z_1^2 e^4}{kT \hbar^2} = \frac{A_0 A_1 Z_0^2 Z_1^2}{A_0 + A_1} \frac{7,6696 \cdot 10^{10} \text{ К}}{T}, \quad (17.2)$$

$$A = A_0 A_1 / (A_0 + A_1),$$

$$\lambda = \frac{\hbar^2}{m_u e^2} \frac{1}{2A Z_0 Z_1} \left( \frac{n_e}{2 \langle Z \rangle} \right)^{1/3} = \frac{A_0 + A_1}{2A_0 A_1 Z_0 Z_1} \times$$

$$\times \left( \frac{1}{\langle Z \rangle \mu_Z} \frac{\rho}{1,3574 \cdot 10^{11}} \right)^{1/3}. \quad (17.3)$$

Величина  $\mu_Z$  определена формулой (2.17). С учетом  $\mu_N$  из (2.16) средний заряд ядер плазмы равен

$$\langle Z \rangle = \frac{\mu_N}{\mu_Z}. \quad (17.4)$$

Параметр  $\lambda^{3/2}$  пропорционален отношению энергии собственных колебаний решетки к кулоновской энергии взаимодействия ядер на ядерных расстояниях ( $\sim \frac{\hbar^2}{m_u e^2}$ ), а  $\tau^3$  есть отношение той же кулоновской энергии к тепловой. В отсутствие экранирования величина  $\tau$  (совпадает с (13.31)) расположена в экспоненте формулы для скорости реакции (13.26) после усреднения  $\langle \sigma v \rangle$  по распределению Максвелла. При  $1 \leq \Gamma \leq \Gamma_m$  вещество находится в жидком состоянии, а при  $\Gamma \geq \Gamma_m \approx 150$  (см. (4.37), (8.56) и сноску к с. 50 § 4) ионы образуют кристаллическую решетку, в кото-

рой они могут колебаться с частотой, по порядку величины равной  $\omega_{p1}$  из (8.61) с учетом (8.52). Величина

$$\xi = \frac{\hbar\omega_{p1}}{kT} (= 0,075254\lambda^{3/2}\tau^3 \text{ при } Z_0 = Z_1 = Z) \quad (17.5)$$

характеризует степень возбуждения колебаний ионной решетки. При  $\xi \gg 1$  решетка находится в практически основном состоянии, а при  $\xi \leq 1$  возбуждено много степеней свободы. Характерная кинетическая энергия реагирующих ядер  $E_0$  из (13.30) по порядку величины есть

$$E_0 \sim kT\tau \sim E_{кул} \frac{\tau}{\Gamma}. \quad (17.6)$$

Из (17.1)–(17.5) следует  $\Gamma \sim \tau\xi^{2/3}$ , поэтому из (17.6) имеем

$$E_0/E_{кул} \sim \xi^{-2/3}. \quad (17.7)$$

Таким образом, СИЭ происходит при  $\xi \ll 1$  из (17.5) и  $\Gamma > 1$ . При этом условие  $E_0 > E_{кул}$  выполняется за счет большого  $\tau$ .

П-режим экранирования реализуется при  $\Gamma \gg 1$  и  $\xi \gg 1$ , когда проникновение через кулоновский барьер происходит благодаря нулевым колебаниям ионной решетки. Как отмечалось в § 4, п. ж, в астрофизических условиях нулевые колебания не разрушают кристаллической структуры, что соответствует  $\xi/\Gamma < 1$ , поэтому условие  $\xi \gg 1$  наступает только при выполнении неравенства  $\Gamma > \Gamma_m$ . В [557] различаются два П-режима:

$$\text{пикноядерный} - T > 0 (\Pi_{T>0}) \text{ при } 1 \ll \xi^{2/3} \ll \ln(1/\lambda) \quad (17.8)$$

и

$$\text{пикноядерный при нулевой температуре} (\Pi_{T=0}) \text{ при } \xi^{2/3} \gg \ln(1/\lambda) \gg 1. \quad (17.9)$$

В режиме  $\Pi_{T>0}$  в реакцию вступают ядра, находящиеся на высоковозбужденных колебательных уровнях, а в режиме  $\Pi_{T=0}$  даже реагирующие ядра находятся в основном колебательном состоянии.

Во всех реакциях, протекающих в звездах на спокойных стадиях эволюции, кулоновская энергия на ядерных расстояниях значительно превышает как среднюю кинетическую, так и энергию нулевых колебаний. Поэтому при всех режимах экранирования обычно выполняются неравенства

$$\tau \gg 1, \quad \lambda \ll 1 \quad (17.10)$$

и время ядерного горения в звездах очень велико по сравнению с характерными ядерными временами. Области различных режимов экранирования на диаграмме  $(\lg \rho, \lg T)$  приведены на рис. 22 для однородного вещества с  $Z_0 = Z_1 = Z$ . Горизонтальная линия  $ab$  на рис. 22 соответствует границе полной ионизации давлением и следует из (4.24) при  $\theta_{i2} = (3\pi^2)^{1/2} = 3,09367$ . Вертикальная линия  $bc$  соответствует полной температурной ионизации и определяется условие при всех плотностях  $Ze^2/a_{Z0} = 2kT$ , где  $a_{Z0}$  есть радиус ближайшей к ядру электронной орбиты, определенный в § 4. Если энергия электростатического взаи-

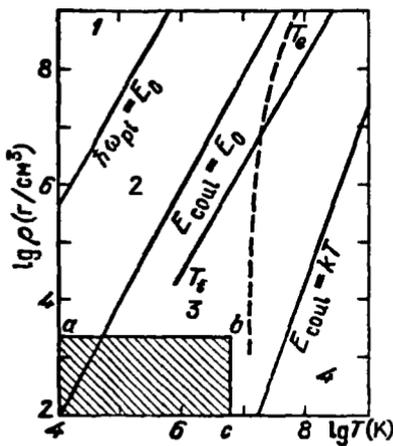


Рис. 22. Области различных режимов экранирования (из [557]); при  $T < T_e$  электронное экранирование является сильным (для  $^{12}\text{C}$ , из [248]). 1 —  $\Pi_T = 0$ ; 2 —  $\Pi_T > 0$ ; 3 — сильное экранирование, 4 — слабое экранирование. Заштрихована область неполной ионизации

модействия реагирующих частиц  $W(r)$  отлична от кулоновской энергии парного взаимодействия ( $r$  — расстояние между частицами), то вместо (13.23) для вероятности подбарьерного перехода следует использовать более общую формулу [144]

$$\sigma = \frac{S(E)}{E} \exp \left\{ -2 \frac{\sqrt{2M}}{\hbar} \int_0^{r_{tp}} dr \left[ \frac{Z_0 Z_1 e^2}{r} + H(r) - \frac{Mv^2}{2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (17.11)$$

Здесь  $M$  — приведенная масса, дана в (13.20),  $r_{tp}$  классическая точка поворота, где зануляется подынтегральное выражение,

$$H(r) = W(r) - \frac{Z_0 Z_1 e^2}{r} - \text{часть потенциальной энергии, связанной с экранированием}^* \quad (17.12)$$

При  $H(r) = 0$  из (17.11) следует формула (13.23).

а) Слабое экранирование. При  $\Gamma \ll 1$  экранирующий потенциал в плазме вычисляется по теории Дебая—Хьюккеля [176]. В электростатическом поле с потенциалом  $\Phi(r)$  распределения ядер и электронов описываются формулами [145]

$$n_i(r) = n_i \exp[-Z_i e\Phi(r)/kT],$$

$$n_e(r) = \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{kT}{c\hbar} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1 + \exp[\sqrt{\alpha^2 + x^2} - (e\Phi(r)/kT) - \beta]}, \quad (17.13)$$

где  $n_i, n_e$  — концентрация ионов и электронов, причем при  $\Phi(r) = 0$   $n_e(r) = n_e = \text{const}$ . Считая возмущения, вносимые потенциалом  $e\Phi(r)/kT \ll 1$  ма-

\*) По замечанию Д.Г. Яковлева, подход, основанный на использовании среднего потенциала при расчете вероятности туннельного эффекта, непоследователен. Более правильно было бы рассчитывать вероятность туннелирования в поле случайного потенциала, а потом проводить усреднение по ансамблю окружающих частиц. Однако этот более последовательный подход является значительно более трудоемким и до сих пор не реализован.

лыми, и используя (2.10), (2.59), после разложения получаем

$$n_i(r) = n_i [1 - Z_i e \Phi(r) / kT],$$

$$n_e(r) = n_e \left[ 1 + \frac{I_{5-} + I_{6-} e \Phi(r)}{I_{n-} kT} \right]. \quad (17.14)$$

Уравнение Пуассона для  $\Phi(r)$  с учетом квазинейтральности имеет вид вокруг ядра с зарядом  $Z_0$

$$\Delta \Phi = -4\pi Z_0 e \delta^3(r) + \frac{4\pi e^2}{m_u kT} \rho \sum_i \frac{x_i}{A_i} \left( Z_i^2 + \frac{I_{5-} + I_{6-}}{I_{n-}} Z_i \right) \Phi \quad (17.15)$$

и допускает решение

$$\Phi = \frac{eZ_0}{r} \exp(-k_0 r) \approx \frac{eZ_0}{r} - eZ_0 k_0, \quad (17.16)$$

где

$$k_0^{-1} = \left[ \frac{kT m_u}{4\pi e^2 \rho} \frac{1}{\sum_i \frac{x_i}{A_i} \left( Z_i^2 + \frac{I_{5-} + I_{6-}}{I_{n-}} Z_i \right)} \right]^{1/2} =$$

$$= 8,8924 \cdot 10^{-12} \left( \frac{\mu Z T}{\rho} \right)^{1/2} \left( \mu Z \sum_i \frac{x_i Z_i^2}{A_i} + \frac{I_{5-} + I_{6-}}{I_{n-}} \right)^{-1/2} \quad (17.17)$$

Величина  $k_0^{-1}$  имеет смысл дебаевского радиуса экранирования и совпадает с величинами, введенными в (8.47) и (8.63) в соответствующих предельных случаях. Добавка к потенциальной энергии при слабом экранировании есть

$$H(r) = -e^2 Z_0 Z_1 k_0 = \text{const}. \quad (17.18)$$

Подставляя (17.18) в (17.11) и интегрируя, получаем

$$\sigma = \frac{S(E)}{E} \exp \left\{ - \frac{2Z_0 Z_1 e}{\hbar v \sqrt{1 - \frac{2H}{Mv^2}}} \right\}. \quad (17.19)$$

Учитывая (17.19) в (13.19), используя малость  $H/Mv^2 \ll 1$  и проводя интегрирование с помощью метода перевала, получаем, что слабое экранирование (СЛЭ) сводится к умножению  $\langle \sigma v \rangle$  на множитель

$$e^{U_W} = e^{-\frac{H}{kT}} = e^{-\frac{e^2 Z_0 Z_1 k_0}{kT}}. \quad (17.20)$$

С учетом (17.1) получаем [557]

$$U_W = \sqrt{3} \frac{Z_1}{Z_0} \left( \frac{\mu Z}{Z_0} \right)^{1/2} \eta \Gamma_{Z_0}^{3/2}, \quad \eta^2 = \sum_i x_i \frac{Z_i^2}{A_i} + \frac{I_{5-} + I_{6-}}{I_{n-}} \frac{1}{\mu Z}, \quad (17.21)$$

$$\frac{I_{5-} + I_{6-}}{I_{n-}} \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{(НВ)} \\ \frac{3\mu_{te} kT}{\mu_{te}^2 - m_e^2 c^4} \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0 & \text{(В)} \end{cases}$$

При этом учтено разложение (2.24).

б) Сильное экранирование. В режиме СИЭ при  $\Gamma > 1$  и  $\xi \ll 1$  из (17.7) классической радиус поворота  $r_{tp} \ll a$ . Поэтому при расчете экранирования приближенно принимается  $H(r) \approx H(0)$  [557]. В приближении Вигнера-Зейца величина  $H(0)$  по физическому смыслу есть разность электростатических энергий двух ячеек после и до слияния. С учетом (4.26), (17.1) имеем

$$H(0) = 0,9kT(\Gamma Z_1 + \Gamma Z_2 - \Gamma Z_1 + Z_2). \quad (17.22)$$

По аналогии с (17.20) получаем, что учет СИЭ сводится к умножению  $\langle \sigma_U \rangle$  на множитель

$$e^{U_{S0}} = e^{-H/kT} = e^{0,9(\Gamma Z_1 + Z_2 - \Gamma Z_1 - \Gamma Z_2)} = e^{\beta \tau}. \quad (17.23)$$

Величина  $\tau$  определена в (13.31) и (17.2), а для  $\beta$  из (17.23) с учетом (17.1) имеем [557]

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1,8}{3(3\pi)^{1/3}} \frac{(Z_0 + Z_1)^{5/3} - Z_0^{5/3} - Z_1^{5/3}}{(AZ_0^2 Z_1^2)^{1/3}} \left(\frac{\rho}{\mu Z}\right)^{1/3} \frac{1}{(kT)^{2/3}} \left(\frac{\hbar e}{m_u}\right)^{2/3} = \\ &= \frac{(Z_0 + Z_1)^{5/3} - Z_0^{5/3} - Z_1^{5/3}}{(AZ_0^2 Z_1^2)^{1/3}} \left(\frac{4,2579 \cdot 10^7 \text{ K}}{T}\right)^{2/3} \left(\frac{\rho/\mu Z}{1,6203 \cdot 10^{10}}\right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (17.24)$$

По порядку величины  $\beta \sim \xi^{2/3} \ll 1$ . Во всей области СЛЭ и СИЭ можно воспользоваться с точностью  $\leq 30\%$  интерполяционной формулой

$$U_{SW} = \frac{U_{S0} U_W}{\sqrt{U_{S0}^2 + U_W^2}}. \quad (17.25)$$

Поправки к (17.23) в области  $\beta \leq 1$  рассчитаны в [557] на основе использования выражения для потенциальной энергии  $H(r)$  при произвольном расстоянии между ионами в приближении кристаллической решетки для движения ядер по направлению к ближайшему соседу

$$\begin{aligned} H(r) &= \frac{Z^2 e^2}{b} [-1,1547 - 1,1602(1 - \eta) + 1,0394(1 - \eta)^2 - \\ &- 2,5690(1 - \eta)^3 + 1,6971(1 - \eta)^4]. \end{aligned} \quad (17.26)$$

Здесь  $b = \left(\frac{8\pi}{3}\right)^{1/3} a = 2,0310a = (N/2)^{-1/3}$  — постоянная объемно центри-

рованной решетки (см. (4.4), (17.1)),  $\eta = r/d$ ,  $d = \frac{\sqrt{3}}{2} b = 0,866b$  — расстоя-

ние между ближайшими соседями в той же решетке. Численное интегрирование в (17.11) и (13.19) с учетом (17.26) приводит [557] к фактору СИЭ  $e^{U_{Sp}}$  с

$$U_{Sp} = \tau \left[ \beta - \frac{(0,84Z_0 + 3,46Z_1)\beta^3 + 95,6Z_1\beta^9}{(Z_0 + Z_1) + (1,45Z_0 + 32,8Z_1)\beta^3} \right] \quad (17.27)$$

$$Z_1 \leq Z_0, \quad \beta \leq 0,5.$$

Приведем также выражение для потенциальной энергии из [431, 427] с учетом членов до  $\eta^5$ :

$$H(r) = - \frac{Z^2 e^2}{b} [1,1547 + 1,1547(1 - \eta) - 0,9935(1 - \eta)^2 + 4,3385(1 - \eta)^3 - 5,3868(1 - \eta)^4 + 1,8728(1 - \eta)^5]. \quad (17.28)$$

При определении  $H(r)$  в (17.26) и (17.28) предполагалось, что распределение окружающих зарядов успевает подстроиться под мгновенное расположение реагирующих ядер. В действительности из-за наличия инерции всегда имеется запаздывание и фактор СИЭ будет несколько ниже. Как показано в [557] статическое приближение дает  $H(0)$  в 1,337 раз меньше, чем (17.22) (см. (17.36)).

в) Расчет СИЭ на основе моделей конденсированных тел. В работах [433, 434] был сделан более точный по сравнению с [557] расчет фактора СИЭ. Была учтена зависимость экранирующего потенциала от  $r$  в (17.11), а также учтено, что туннельный переход между  $r = r_{tp}$  и  $r = 0$  происходит столь быстро, что в его процессе сохраняется распределение зарядов, соответствующее  $r = r_{tp}$  \*). Анализ расчетов кулоновских жидкостей методом Монте-Карло привел [434] к следующему выражению для добавки к потенциальной энергии  $H(r)$  за счет взаимодействия

$$H(r) = kT \left( 1,25 \Gamma_{01} - 0,39 \frac{2r}{a_0 + a_1} \right),$$

$$0,5 \leq 2r/(a_0 + a_1) \leq 1,6, \quad (17.29)$$

где

$$\Gamma_{01} = \frac{2Z_0 Z_1 e^2}{(a_0 + a_1) kT}, \quad (17.30)$$

$$a_0 = \left[ \frac{3Z_0}{4\pi(Z_0 n_0 + Z_1 n_1)} \right]^{1/3} = \left( \frac{3Z_0}{4\pi n_e} \right)^{1/3}, \quad (17.31)$$

$$a_1 = (3Z_1/4\pi n_e)^{1/3}.$$

При  $Z_0 = Z_1 = Z$  соотношение (17.30) сводится к (17.1). Как отмечалось в [433, 434], при учете зависимости экранирующего потенциала от  $r$  в (17.11) нужно вместо  $H(r)$  использовать величину  $\psi(r, (r_{tp} + r)/2)$ , которая для  $r < r_{tp}$  равна СИЭ поправке к энергии взаимодействия, соответствующей расположению экранирующих зарядов при  $r = r_{tp}$ . Функция  $\psi(r, r')$  приближенно выражается через  $H(r)$  с использованием методов статистической физики [433]

$$\psi(r, r') - \psi(r', r') = r' \frac{dH(r')}{dr'} \frac{r}{r'} \left( 1 - \frac{r}{r'} \right). \quad (17.32)$$

После подстановки в (17.11) вместо  $H(r)$  выражения  $\psi(r, r') \Big|_{r' = \frac{r+r_{tp}}{2}}$

\*) См. сноску на с. 90.

из (17.32) и взятия интеграла (13.19) получается аппроксимационная формула для  $U_S$  в виде

$$U_S = 1,25 \Gamma_{01} - 0,095 \tau \left( \frac{3 \Gamma_{01}}{\tau} \right)^2 \quad (17.33)$$

В формулах (17.22) и (17.33) используются различные определения параметра  $\Gamma$  (см. (17.1) и (17.31)), которые сводятся к одному при  $Z_1 = Z_2 = Z$ :  $\Gamma_{01} = \Gamma_{Z_1} = \Gamma_{Z_2} = \Gamma$ ,  $\Gamma_{Z_1 + Z_2} = 2^{5/3} \Gamma$ . Тогда из (17.23) следует

$$U_{S0} \approx 0,9 (2^{5/3} - 2) \Gamma = 1,0573 \Gamma, \quad (17.34)$$

что на  $\sim 18\%$  меньше первого линейного члена в (17.33). Формула (17.33) применима, пока межядерные расстояния больше радиуса поворота  $r_{tp}$  для ядер, соответствующих минимуму показателя экспоненты в (13.25) и имеющих энергию  $E = E_0 \approx \tau k T / 3$ . Принимая  $r_{tp} = \frac{Z^2 e^2}{E_0} = \frac{3Z^2 e^2}{\tau k T}$ , получим  $r_{tp}/a = 3\Gamma/\tau$ , что дает условие применимости (17.33)

$$3\Gamma_{01}/\tau \leq 1. \quad (17.35)$$

Яковлев и Шалыбков [248] приводят формулу, справедливую для случаев сильного и умеренного экранирования, полученную с использованием монтекарловских расчетов [578] и справедливую для  $\Gamma \geq 1$ ,

$$U_S = f(\Gamma_{Z_1 + Z_2}) - f(\Gamma_{Z_1}) - f(\Gamma_{Z_2}), \quad (17.35a)$$

$$f(\Gamma) = 0,897744\Gamma - 3,80172\Gamma^{1/4} + 0,75824\Gamma^{-1/4} + 0,81487 \ln \Gamma + 2,5820.$$

Для умеренного экранирования  $\Gamma \leq 1$  функция  $f(\Gamma)$  дана в (17.47).

г) Пикноядерное экранирование. При  $\beta \gg 1$  ( $3\Gamma/\tau \gg 1$ ) энергия  $E_0$  ядер, вступающих в реакцию, много меньше, чем средняя кулоновская  $E_{\text{coul}}$ .

Тогда ядра не могут считаться свободными, как в случаях СЛЭ и СИЭ. Вместо  $Mv^2/2$  в формулу для подбарьерного перехода (17.11) нужно подставлять энергию колебаний в решетке. П-экранирование неудобно описывать множителем, учитывающим увеличение скорости реакции, так как получающиеся выражения для скоростей реакций существенно отличаются от стандартного вида формул § 13. При исследовании экранирования в П-режиме, наряду с потенциалом (17.26) в [557] использовался потенциал

$$H_S(r) = \frac{Z^2 e^2}{b} [-1,1547 - 1,1602(1 - \eta) + 1,0394(1 - \eta)^2 - 0,4001(1 - \eta)^3 + 0,0692(1 - \eta)^4], \quad (17.36)$$

соответствующий статическому приближению, при котором окружающие ядра и центр масс реагирующих ядер считаются фиксированными в процессе реакции.

В режиме  $\Pi_{T=0}$  ионы находятся на нижних колебательных уровнях с энергией  $E_0 \sim \hbar \omega_{pi} \ll E_{\text{coul}}$ , поэтому отклонения положения ядер от

равновесия малы. Скорость  $P_{T=0}$  реакции в ВКБ приближении есть [557]

$$P_0 = \frac{2x_0 x_1}{1 + \delta_{01}} 10^{46} \lambda^{7/4} \frac{\rho}{\mu_N} (2A)^2 Z_0^2 Z_1^2 S(E) \times \\ \times \left( \begin{matrix} 3,90 \\ 4,76 \end{matrix} \right) \exp \left[ -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left( \begin{matrix} 2,638 \\ 2,516 \end{matrix} \right) \right] \text{ (реакций} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}). \quad (17.37)$$

Здесь  $S$  имеет размерность МэВ·барн (см. (13.23), (13.24)). Величины  $A$ ,  $\mu_N$ ,  $\lambda$  даются формулами (13.20), (2.16), (17.3) соответственно, верхние числа относятся к статическому приближению с потенциалом (17.36), а нижние — к приближению полной релаксации с потенциалом (17.26).

При  $T \neq 0$  следует учесть, что ядра в решетке могут находиться на возбужденных уровнях, соответствующих энергии возбуждения  $(E - E_0)$ , с вероятностью  $\exp[-(E - E_0)/kT]$ . После суммирования по возбужденным состояниям для величины  $P$  — скорости  $P_{T>0}$ -реакции, в [557] получено выражение

$$\frac{P}{P_1} - 1 = \left( \begin{matrix} 0,0430 \\ 0,0485 \end{matrix} \right) \lambda^{-1/2} \left[ 1 + \left( \begin{matrix} 1,2624 \\ 2,9314 \end{matrix} \right) e^{-8,7833 \beta^{3/2}} \right]^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -7,272 \beta^{3/2} + \lambda^{-1/2} \left( \begin{matrix} 1,2231 \\ 1,4331 \end{matrix} \right) e^{-8,7833 \beta^{3/2}} \right\} \times \\ \times \left[ 1 - \left( \begin{matrix} 0,6310 \\ 1,4654 \end{matrix} \right) e^{-8,7833 \beta^{3/2}} \right], \quad (17.38)$$

где снова верхние значения относятся к статическому приближению, а нижние — к приближению полной релаксации.

д) Учет электронов в СИЭ. Электронное экранирование связано с влиянием неоднородности распределения плотности электронов на энергию взаимодействия между реагирующими ядрами. Для случая СЛЭ такой учет содержится в формуле (17.21), в пп. б, в, г рассматривалось только экранирование ионами. Для СИЭ учет электронного экранирования сделан в работах [177, 181, 428, 247]. Расчеты электронного экранирования, проведенные в [247, 248] для случая, когда движение ионов в плазме можно считать классическим, привели к следующему фактору экранирования:

$$U_{Se} = f_e(\Gamma_{Z_1 + Z_2}, Z_{12}, \beta) - f_e(\Gamma_{Z_1}, Z_1, \beta) - f_e(\Gamma_{Z_2}, Z_2, \beta), \\ f_e(\Gamma, Z, \beta) = \eta Z^{2/3} [A(Z, \beta) \Gamma + B(Z, \beta) \Gamma^{1/4} + C(Z, \beta)]. \quad (17.39)$$

Здесь

$$\eta = \kappa^2 I_e^2 = 3 \left( \frac{12}{\pi} \right)^{1/3} \frac{e^2}{\hbar v_{Fe}} \approx \frac{0,03422}{\beta}, \quad \beta = \frac{v_{Fe}}{c} = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}, \quad (17.40)$$

$y = \frac{P_{Fe}}{m_e c}$  из (2.21),  $I_e = \left( \frac{3}{4\pi n_e} \right)^{1/3}$ ,  $\kappa = \left( \frac{4\pi n_e e^2}{kT} \right)^{1/2}$  — дебаевский радиус классических электронов из (8.46),  $Z_{12} = Z_1 + Z_2$ . Функции  $A(Z, \beta)$ ,  $B(Z, \beta)$ ,

$C(Z, \beta)$  аппроксимируются выражениями

$$\begin{aligned} A(Z, \beta) &= A_0(Z) + A_1(Z) \ln [1 + (1 - \beta^2) A_2(Z)], \\ B(Z, \beta) &= B_0(Z) + B_1(Z) \ln [1 + (1 - \beta^2) B_2(Z)], \\ C(Z, \beta) &= C_0(Z) + C_1(Z) \ln [1 + (1 - \beta^2) C_2(Z)]. \end{aligned} \quad (17.41)$$

Коэффициенты  $A_i(Z)$ ,  $B_i(Z)$ ,  $C_i(Z)$  даны в табл. 19 из [248]. Фактор электронного экранирования складывается с фактором ионного экранирования  $U_S$  в показателе экспоненты экранирующего множителя  $\exp(U_S + U_{Se})$ . На рис. 22 приведена линия  $T_e$ , на которой  $\exp(U_{Se}) = 2$  для горения углерода  $^{12}\text{C}$ , так что электронное экранирование становится сильным при  $T < T_e$ . Слева от линии  $T_i$  нарушается условие применимости расчетов [247, 248].

е) Экранирование резонансных реакций. Для резонансных реакций наибольший вклад в среднее значение  $\langle \sigma v \rangle$  дает область энергии вблизи резонанса  $E = E_r$ , вместо энергий в области  $E = E_0$ . С учетом сдвига уровней в поле экранирующего потенциала, в (17.11) вместо  $Mv^2/2$  следует подставить величину  $E_r + H(0)$ . Интегрирование в (17.11) с учетом  $H(r)$  и затем в (13.19) приводит к соотношению для экранирующего фактора в СИЭ режиме в виде [557]

$$U_{Sr} = \tau\beta - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda\epsilon_r}} \left[ \frac{1,30Z_0 + 1,14Z_1}{(Z_0 + Z_1)\epsilon_r^3} + \frac{28,2Z_0 - 34,4Z_1}{(Z_0 + Z_1)\epsilon_r^6} + \frac{150Z_1}{(Z_0 + Z_1)\epsilon_r^9} \right], \quad (17.42)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= E_r \left/ \left( \frac{Z_0 Z_1 e^2}{b} \right) \right. = \frac{1}{Z_0 Z_1} \left( \frac{Z_0 \mu_Z \cdot 1,3574 \cdot 10^{11}}{\rho} \right)^{1/3} \frac{E_r}{49,600 \text{ кэВ}}, \\ Z_0 &\geq Z_1. \end{aligned} \quad (17.43)$$

Величины  $\lambda$ ,  $\tau$ ,  $\beta$ ,  $b$  определены в (17.2), (17.3), (17.24), (4.4). Если частичная ширина данной реакции много меньше полной ширины резонанса, то фактор СИЭ сводится к виду

$$U_{Sr} = \tau\beta = U_{S0}.$$

Приведем также фактор СИЭ для реакции  $3\alpha \rightarrow ^{12}\text{C}$ , который должен учи-

Таблица 19

Значения параметров, входящих в формулу (17.41), для электронного экранирования ядерных реакций из [248]

Z	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$B_0$	$B_1$	$B_2$	$C_0$	$C_1$	$C_2$
1	7,924-3	2,613-2	0,5280	0,2020	0,1069	1,616	-2,935-2	-8,771-2	1,343
2	1,518-2	4,045-2	0,6262	0,2356	2,122-2	7,022	-5,274-2	-1,206-2	7,006
6	3,105-2	2,810-2	1,179	0,2602	1,160-2	10,96	-6,682-2	-7,733-3	9,321
8	3,528-2	2,563-2	1,330	0,2654	9,349-3	13,20	-7,014-2	-6,200-3	11,27
12	4,115-2	2,270-2	1,536	0,2715	6,283-3	19,22	-7,388-2	-3,926-3	17,65
18	4,683-2	1,994-2	1,753	0,2761	4,662-3	24,45	-7,668-2	-2,894-3	22,92

ываться в (14.38),

$$U_{S3\alpha} = 2,916\Gamma_2 - 3 \ln(1 + 0,3\Gamma_2 + 0,266\Gamma_2^{3/2}) + \ln(1 + 1,87\Gamma_2 + 4,15\Gamma_2^{3/2}), \quad (17.44)$$

где  $\Gamma_2$  ( $Z = 2$ ) определено в (17.1). Выражения (17.42), (17.44) справедливы при

$$\epsilon_r > \frac{3,04Z_0 + 1,26Z_1}{Z_0 + Z_1}, \quad (17.45)$$

что для (17.44) на стадии образования  ${}^8\text{Be}$  сводится к неравенству  $\rho < 5,5 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$  для  $E_r = 92 \text{ кэВ}$  из (14.37). В работе [248] для  $U_{S3\alpha}$  приведено выражение, полученное с учетом монтекарловских расчетов [578] и применимое при  $\Gamma \geq 1$ ,

$$U_{S3\alpha} = f(\Gamma_{123}) - 3f(\Gamma_2) = 2,90892\Gamma_2 + 5,3965\Gamma_2^{1/4} - 1,7950\Gamma_2^{-1/4} - 1,62974 \ln \Gamma_2 - 3,67196, \quad (17.46)$$

где  $\Gamma_{123} = 3^{5/3}\Gamma_2$ , а  $f(\Gamma)$  определено в (17.35а). В случае умеренного экранирования  $\Gamma \leq 1$  в (17.46) используется [248] функция

$$f(\Gamma) = \frac{\Gamma^{3/2}}{\sqrt{3}} - 0,14554 \cdot \Gamma^{2,016}, \quad (17.47)$$

приводящая к интерполяционной формуле

$$U_{WS3\alpha} = 2,11\Gamma_2^{3/2} - 1,35\Gamma_2^{2,016}. \quad (17.47a)$$

Функция (17.47) плавно сшивается с  $f(\Gamma)$  из (17.35а) при  $\Gamma = 1$  и может быть использована в  $U_S$  из (17.35а) для определения  $U_{WS}$  умеренного экранирования двухчастичной реакции.

**Задача.** Найти скорость  $\Pi_{T=0}$  реакции, если пространственный потенциал аппроксимировать выражением

$$W(r) = Z_0 Z_1 \left( \frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{2r_0 - r} - \frac{2e^2}{r_0} \right). \quad (1)$$

**Решение.** [102, 227]. Классическое равновесное состояние в потенциале (1) соответствует  $r = r_0$ . Для малых колебаний ( $|r - r_0| \ll r_0$ )

$$\text{частота } \omega = 2\sqrt{Z_0 Z_1 e^2 / \sqrt{M} r_0^3},$$

$$\text{энергия нулевых колебаний } E_0 = \frac{\hbar \omega}{2} = \hbar \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{M r_0^3}}, \quad (2)$$

$$\text{классический радиус поворота } r_{tp} = r_0 - \left( \frac{\hbar^2 r_0^3}{4Z_0 Z_1 e^2 M} \right)^{1/4}.$$

Экспонента подбарьерного перехода из (17.11) с учетом  $\frac{Mv^2}{2} = E_0$  для малых  $\epsilon$  равна

$$D = \exp\left(-\frac{4}{\epsilon} + \ln \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}\right), \quad \epsilon = 2 \left(1 - \frac{r_{tp}}{r_0}\right)^2 = (\hbar^2 / Z_0 Z_1 e^2 M r_0)^{1/2}. \quad (3)$$

Величина  $D$  определяет отношение потока после барьера к потоку до барьера:

$$D = \frac{(v|\psi^2|)_{\text{после}}}{(v|\psi^2|)_{\text{до}}} \quad (4)$$

Будем рассматривать усредненные по угловым переменным значения  $|\psi^2|$ . Вероятность реакции между двумя данными ядрами есть [227]

$$p = (v|\psi^2|)_{\text{после}} \cdot R_n^2 P_n = (v|\psi^2|)_{\text{до}} \cdot DR_n^2 P_n (c^{-1}) \quad (5)$$

$P_n$  — вероятность ядерной реакции для частиц, сблизившихся на расстояние радиуса ядра  $R_n$ . Величина  $S(E) = ER_n^2 P_n$ , имеющая тот же смысл, что и в (13.23), зависит только от свойств конкретных ядер. С использованием  $S(E)$  вероятность реакции  $p$  примет вид

$$p = (v|\psi^2|)_{\text{до}} \cdot D \frac{S(E)}{E} (c^{-1}). \quad (6)$$

Волновая функция  $\psi$  в пространственной потенциальной яме (1) в квазиклассическом приближении есть [144].

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(r_0 - r)\sqrt{r_0 - r_{tp}}} \sqrt{\frac{v_0}{v}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_r^{r_0} \sqrt{2m(E_0 - W)} dx + \frac{\pi}{4}\right), \quad (7)$$

где  $v_0 = \sqrt{2E_0/M}$  — относительная скорость ядер в точке равновесия  $r = r_0$ . Плотность потока сталкивающихся ядер в точке поворота  $r = r_{tp}$  при замене  $\sin^2 F$  из (7) его средним значением  $1/2$  есть

$$(v|\psi^2|)_{\text{до}} = \frac{1}{\pi} \frac{v_0}{(r_0 - r_{tp})^3}. \quad (8)$$

Учитывая, что в объемноцентрированной решетке число реакций в секунду в  $\text{см}^3$  есть [360, 557]

$$P = \frac{8\rho N_A}{1 + \delta_{01}} \frac{x_0 x_1}{\mu_N} p \quad (\text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}) \quad (9)$$

и используя (3), (6), (8) при  $E = E_0$ , получаем

$$P = \frac{8\rho N_A}{1 + \delta_{01}} \frac{x_0 x_1}{\mu_N} \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{Z_0^3 Z_1^3 e^6 M^3}{\hbar^{10} r_0^5}\right)^{1/4} \times \\ \times \exp\left(-\frac{4\sqrt{Mr_0 Z_0 Z_1 e^2}}{\hbar}\right) S(E_0). \quad (10)$$

Вводя параметр  $\lambda$  из (17.3) и учитывая  $r_0 = 2\langle a \rangle = \left(\frac{6\langle Z \rangle}{\pi n_e}\right)^{1/3}$ ,  $\langle a \rangle$  — средний радиус  $W - S$  ячейки, получаем

$$\lambda = \frac{\hbar^2}{2m_u AZ_0 Z_1 e^2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{1}{r_0}, \quad (11)$$

$$P = \frac{2\rho x_0 x_1}{(1 + \delta_{01}) \mu_N} \cdot 4,8 \cdot 10^{44} (2A)^2 Z_0^2 Z_1^2 \lambda^{5/4} S \exp\left(-\frac{2,85}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (12)$$

Здесь, как и в (17.37),  $S$  имеет размерность МэВ · барн. Приближенная формула (12) дает меньшее значение  $P$ , чем более точная формула (17.37).