

§ 18. Основы теории слабого взаимодействия

Реакции, в которых принимает участие нейтрино, называются реакциями слабого взаимодействия (см. (14.1), (14.11), (14.15), (14.18) — (14.21), (14.23)). Название связано с малостью сечения взаимодействия этих реакций, которое значительно меньше сечений электромагнитного и ядерного (сильного) взаимодействий. С малостью сечения связана высокая проникающая способность нейтрино. Они почти без поглощения выходят из центра Солнца и подобных звезд и так же свободно проходят по диаметру сквозь Землю. Наблюдения нейтрино от Солнца дали бы уникальную возможность наблюдательного определения условий в его центральных областях. Ведущиеся более 15 лет эксперименты с использованием реакции



дают результат несколько меньше теоретического [260]:

$$E\nu_{\text{obs}} = 2,1 \pm 0,9 \text{ SNU}, \quad (18.2)$$

$$E\nu_{\text{theor}} = 5,8 \pm 2,2 \text{ SNU}.$$

Здесь ошибка дана в пределах 3σ , $1(\text{SNU}) = 1(\text{solar neutrino unit}) = 1$ (солнечная нейтринная единица) = 10^{-36} событий в секунду на атом ${}^{37}\text{Cl}$. Разница между теорией и экспериментом статистически недостаточно достоверна для каких-либо радикальных выводов, поэтому сохраняется состояние неопределенности. Возможным объяснением этого различия является наличие резонансных нейтринных осцилляций в веществе, рассмотренных в [160, 274].

Частицы, которые участвуют в слабых взаимодействиях и не участвуют в сильных называются лептонами. Нейтральным лептонам (нейтрино) соответствуют заряженные лептоны, которые участвуют и в электромагнитных взаимодействиях. Все лептоны имеют спин $1/2$, подчиняются статистике Ферми с функцией распределения в ячейках фазового пространства типа (2.2). В настоящее время известно три сорта нейтрино и три заряженных лептона [172, 544a]:

$$\begin{aligned} &\text{электронное } \nu_e, e (m_e = 0,5110 \text{ МэВ} = 9,11 \cdot 10^{-28} \text{ г}, m_{\nu_e} < 35 \text{ эВ})^* \\ &\text{мюонное } \nu_\mu, \mu (m_\mu = 105,7 \text{ МэВ} = 1,88 \cdot 10^{-25} \text{ г}, m_{\nu_\mu} < 0,25 \text{ МэВ})^{**} \\ &\text{тау-нейтрино } \nu_\tau, \tau\text{-лептон } (m_\tau = 1784 \text{ МэВ}, m_{\nu_\tau} < 70 \text{ МэВ}). \end{aligned} \quad (18.3)$$

Здесь приведены экспериментальные ограничения на массы. Каждому лептону из (18.3) соответствует античастица. Электронные нейтрино излучаются звездами на стадии водородного горения, на поздних стадиях эволюции нейтринные ν_e потери энергии могут превышать фотонные [363]

*) См. сноску на с. 29.

***) Масса $m_{\nu_\mu} < 40$ эВ из космологии [88, 100].

(см. гл. 9). Излучение всех типов нейтрино очень важно при взрывах сверхновых (см. гл. 10).

Теория слабых взаимодействий (бета-процессов) развита весьма детально, почти как теория электромагнитного поля, но в отличие от последней она является чисто квантовой, не имеющей классического предела. Рассмотрим основные положения теории бета-взаимодействий, необходимые для расчета нейтринных процессов в звездах.

а) Бета-распады ядер. Основы теории слабых взаимодействий были заложены Э.Ферми [213] в 1933 г. для объяснения бета-распадов ядер в реакции

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 1) + e^- + \tilde{\nu} \quad (18.4a)$$

или

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z - 1) + e^+ + \nu. \quad (18.4b)$$

Реакции (18.4) идут, если масса исходного ядра превышает массу конечного на величину, большую, чем масса электрона:

$$\Delta_{ZZ'} = (m_{A, Z} - m_{A, Z'}) c^2 > m_e c^2, \quad Z' = Z \pm 1. \quad (18.5)$$

Знаки "+" и "-" относятся к реакциям а) и б) соответственно.

Вероятность реакции бета-распада, согласно теории возмущений [144], равна *)

$$W_\beta = \frac{2\pi}{\hbar} \int |H|_\beta^2 \delta(\sum \epsilon_\lambda) dN_e dN_{\tilde{\nu}} dN_{A, Z'}. \quad (18.6)$$

Здесь состояние исходного ядра (A, Z) считается заданным, δ -функция отражает закон сохранения энергии ϵ_λ при бета-распаде.

Суммирование ведется по четырем частицам, участвующим в реакции ($\lambda = 1, 2, 3, 4$). В теории Ферми предполагается, что бета-взаимодействие происходит, когда все четыре частицы (лептоны и нуклоны внутри ядра) находятся в одной точке пространства. Это учтено при написании (18.6), где интегрирование по области возможных взаимодействий (объем ядра) содержится в матричном элементе от Гамильтониана H_β . Дифференциалы в (18.6) указывают на интегрирование только по импульсному пространству. Если бета-распад происходит в среде, где имеются электроны e^- (или e^+) и антинейтрино $\tilde{\nu}_e$ (или ν_e) с функциями распределения в фазовом пространстве f_e и f_ν (см. (2.2)), то с учетом принципа Паули

$$dN_e = \frac{1 - f_e}{(2\pi\hbar)^3} d^3p_e, \quad dN_\nu = \frac{1 - f_\nu}{(2\pi\hbar)^3} d^3p_\nu. \quad (18.7)$$

При бета-распадах $\Delta \ll m_{A, Z} c^2$, так что можно пренебречь отдачей ядра и исключить интегрирование по $dN_{A, Z'}$, так как в силу нормировки $\int dN_{A, Z'} = 1$. Для нахождения полной вероятности бета-распада нужно учесть все возможные конечные (возбужденные) состояния ядра (A, Z') и взять по ним сумму $\sum_i W_{\beta, i}$. С ростом Δ число возможных конечных возбужденных состояний быстро растет.

*) Стрелка обозначает трехмерный вектор, латинский индекс – четырехмерный.

б) Вид матричных элементов при бета-распаде. Для вычисления матричного элемента H_β для неполяризованных ядер в (18.6) сначала составляется специальным образом выбранная линейная комбинация произведения компонентов волновых функций, определенная ниже. От этой линейной комбинации берется интеграл по объему ядра V_n , а затем производится суммирование по всем возможным спиновым состояниям конечных частиц и усреднение по спиновым состояниям исходного ядра (A, Z). Если в бета-реакции участвуют только элементарные свободные частицы, лептоны или адроны, то интегрирование ведется по всему пространству. В данном случае, когда суммирование по спиновым состояниям осуществляется в матричном элементе, статистический вес не входит в определение фазового объема в (18.7).

В релятивистской теории поля свободный электрон и другие свободные фермионы характеризуются четырехкомпонентной волновой функцией (спинором) ψ_e , удовлетворяющей уравнению Дирака

$$\left(i\gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{m_e c}{\hbar} \right) \psi_e = 0. \quad (18.8)$$

Матрицы Дирака γ_i определяются с точностью до произвольного унитарного*) преобразования. В стандартном представлении, в котором две компоненты спинора ψ_e задуляются в нерелятивистском пределе, матрицы γ_i имеют вид [69, 171]

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & & \\ \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma_5 &= i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (18.9)$$

) Преобразование в линейном пространстве называется унитарным, если матрица преобразования U такова, что обратная к ней U^{-1} равна эрмитово сопряженной U^\dagger , причем $U^\dagger = (U^)^T$, где "*" означает комплексное сопряжение, а "T" — транспонирование. При унитарном преобразовании ψ с матрицей U , изменяющим представление в фиксированной пространственно-временной системе координат по формуле $\psi' = U\psi$, представление матриц γ_i изменяется по соотношению $\gamma_i' = U\gamma_i U^{-1}$, оставляющему инвариантным уравнение Дирака (18.8).

В (18.8) использовано скалярное произведение векторов в виде

$$uv \equiv u_i v_i = u_4 v_4 - u_1 v_1 - u_2 v_2 - u_3 v_3; \quad x_4 = ct. \quad (18.10)$$

Матрица S , задающая преобразование Лоренца для биспинора

$$\psi' = S\psi \quad (18.11)$$

при неизменном представлении матриц γ_i , связана с матрицей преобразования Лоренца L_{ik} для вектора

$$x' = Lx, \quad x'_i = L_{ik} x_k \quad (18.12)$$

соотношением, определяемым из условия инвариантности уравнения Дирака [230]

$$S^{-1} \gamma_i S = L_{ik} \gamma_k, \quad S \gamma_4 S^+ = b \gamma_4. \quad (18.13)$$

Знак перед γ_4 совпадает со знаком матричного элемента L_{44} , $b = \pm 1$. Первое соотношение (18.13) эквивалентно условию

$$S \gamma_i S^{-1} = L_{ki} \gamma_k, \quad (18.14)$$

что связано с ортогональностью преобразования Лоренца

$$L_{ik}^{-1} = L_{ki}. \quad (18.15)$$

Матрица S , удовлетворяющая условиям (18.13), вообще говоря, не унитарна и имеет структуру [214]

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^* & \beta^* \\ 0 & 0 & \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (18.16)$$

Матрицы γ_i удовлетворяют условиям

$$\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = 2\delta_{ik} I; \quad i, k = 1, 2, 3, 4, 5; \quad (18.17)$$

I — единичная матрица,

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k = 4, 5 \\ -1 & \text{при } i = k = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Отметим, что в (18.9) матрицы γ_4 и γ_5 являются эрмитовыми, а $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — антиэрмитовыми*).

Из четырехкомпонентных биспиноров ψ_e и ψ_ν могут быть составлены 16 билинейных членов, которые разбиваются на пять ковариантных комбинаций. Для получения билинейных членов используется дираковский сопряженный спинор

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_4, \quad (18.18)$$

* Матрица A эрмитова, если $A^+ = A$ и антиэрмитова, если $A^+ = -A$, унитарное преобразование сохраняет свойство эрмитовости и антиэрмитовости.

с помощью которого строятся комбинации [171]*)

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi & - \text{скаляр } (S), \\ \bar{\psi}\gamma_i\psi & - \text{полярный вектор } (V), \\ \bar{\psi}\gamma_5\gamma_i\psi & - \text{аксиальный вектор } (A), \\ \bar{\psi}\gamma_5\psi & - \text{псевдоскаляр } (P), \\ \bar{\psi}\sigma_{ik}\psi & - \text{антисимметричный тензор } (T), \\ \sigma_{ik} & = \frac{1}{2i}(\gamma_i\gamma_k - \gamma_k\gamma_i). \end{aligned} \quad (18.19)$$

Из условия инвариантности матричного элемента H произведения волновых функций входят в него в виде попарных произведений членов типа (18.19). В первом варианте теории бета-распада [213] Ферми рассматривал только V взаимодействие по аналогии с электродинамикой. Анализ опытных данных показал, что реализуется вариант $V - A$ взаимодействия, рассмотренный Фейнманом и Гелл-Маном, в котором лептонные (l) волновые функции входят в виде комбинаций типа $j_{l,i}$ в матричный элемент H_β . Для реакции (18.4а) эта комбинация имеет вид [171]

$$j_{l,i} = \bar{\psi}_e\gamma_i(1 + \gamma_5)\psi_\nu. \quad (18.20)$$

Величина $j_{l,i}$ называется лептонным током**). Такой выбор тока $j_{l,i}$ благодаря свойствам матрицы γ_5 из (18.9) приводит к тому, что только две (левые) комбинации компонентов биспиноров $\bar{\psi}_e$ и ψ_ν задают скорость реакции слабого взаимодействия [171]. Это отражает свойство двухкомпонентности нейтрино, обладающего левой спиральностью, т.е. спин его направлен против импульса. Антинейтрино имеет обратную (правую) спиральность. Данное свойство приводит к несохранению пространственной (P) четности при сохранении комбинированной (CP) четности. Зарядовое сопряжение (C) означает замену частицы на античастицу. Ток, образованный с помощью оператора $O_i^L = \gamma_i(1 + \gamma_5)$ называется л е в ы м т о к о м.

Адронный ток $j_{a,i}$ имеет вид, аналогичный (18.20), однако ввиду составной природы адронов и рождению виртуальных частиц в сильных взаимодействиях появляется зависимость матричного элемента от переданного импульса $q_i = \frac{1}{c}(p'_i - p_i)$, $q^2 = |q_i q_i|$ и вид тока оказывается более

сложным, чем лептонного (18.20). Имеем [72, 469, 86]

$$j_{a,i} = \bar{\psi}_p[f_1(q^2)\gamma_i - if_2(q^2)\sigma_{ik}q_k + g_1(q^2)\gamma_i\gamma_5 + g_3(q^2)q_i\gamma_5]\psi_n. \quad (18.21)$$

Слабые форм-факторы нуклона f_α и g_α для квазиупругих реакций***) определяются из экспериментальных данных, а также гипотез сохранения век-

*) При унитарном преобразовании $\bar{\psi}' = \bar{\psi}U^{-1}$, при преобразовании Лоренца (18.11) $\bar{\psi}' = b\bar{\psi}S^{-1}$.

**) Сопряженные биспиноры указывают на рождение частицы, обычные — на ее уничтожение. В (18.20) использовано ψ_ν , так как рождение антинейтрино в (18.4а) эквивалентно уничтожению ее античастицы — нейтрино.

***) Квазиупругими считаются все реакции с образованием нуклонов без появления более тяжелых адронов, т.е. все реакции с $\epsilon_{\nu,e} < 300$ МэВ.

торного тока [87] и частичного сохранения аксиального тока [86] СВТ и ЧСАТ:

$$f_1(q^2) = \left[1 + \frac{q^2}{4m_p^2} (1 + \mu_p - \mu_n) \right] \left(1 + \frac{q^2}{m_v^2} \right)^{-2} \left(1 + \frac{q^2}{4m_p^2} \right)^{-1}, \quad (18.22)$$

$$f_2(q^2) = \frac{\mu_p - \mu_n}{2m_p} \left(1 + \frac{q^2}{m_v^2} \right)^{-2} \left(1 + \frac{q^2}{4m_p^2} \right)^{-1}, \quad (18.23)$$

$$g_1(q^2) = 1,25 \left(1 + \frac{q^2}{m_A^2} \right)^{-2}, \quad (18.24)$$

$$g_3(q^2) = \frac{2m_p}{m_\pi^2 + q^2} g_1(q^2) \approx \frac{2,5m_p}{m_\pi^2 + q^2} \left(1 + \frac{q^2}{m_A^2} \right)^{-2}. \quad (18.25)$$

Гипотеза СВТ предполагает неизменность "слабого заряда" нуклона при рождении виртуальных частиц из-за сильных взаимодействий. Она основана на аналогии с электродинамикой, где в аналогичных условиях не меняется электрический заряд протона. Поэтому принимается $f_1(0) = 1$, что согласуется с опытом. В то же время различие магнитных моментов протона μ_p и нейтрона μ_n приводит к появлению формфактора $f_2(q^2)$. В предположении СВТ слабые формфакторы считаются равными электромагнитным. Гипотеза ЧСАТ позволяет связать $g_1(q^2)$ и $g_3(q^2)$ в (18.25), но величина $g_1(0) = 1,25$ (аксиальный ток не сохраняется) определяется из экспериментов. В (18.22)–(18.25) входят следующие константы:

$$\begin{aligned} \mu_p &= 1,79, & \mu_n &= 1,91, \\ m_\pi &= 273 m_e = 139,5 \text{ МэВ}, \\ m_v^2 &= 0,71 \text{ ГэВ}^2, \\ m_A &= \begin{cases} 1,34 \pm 0,05 \text{ ГэВ} & [469], \\ 0,95 \pm 0,12 \text{ ГэВ} & [86]. \end{cases} \end{aligned} \quad (18.26)$$

Очевидно, что точность измерений m_A не лучше $\sim 30\%$, в то время как для m_v точность составляет несколько процентов [86].

С учетом (18.20), (18.21) матричный элемент H_β запишется в виде

$$H_\beta = \sum_\sigma \frac{G_W}{\sqrt{2}} \int_{V_n} j_{a,i} j_{l,i} d^3x, \quad (18.27)$$

где \sum_σ означает суммирование и усреднение по спиновым состояниям,

а интегрирование ведется по объему ядра, где локализованы волновые функции нуклонов. Из экспериментальных данных по бета-распаду нейтрона и распаду мюона константа слабой связи равна [86] (см. пп. в, г)

$$10^{49} G_W = \begin{cases} 1,4358 \text{ эрг} \cdot \text{см}^3 & (\mu\text{-распад}) [172] \\ 1,4335 \text{ эрг} \cdot \text{см}^3 & (\mu\text{-распад}) [86] \\ 1,4132 \text{ эрг} \cdot \text{см}^3 & (\beta\text{-распад}) [86]. \end{cases} \quad (18.28)$$

Нормировка волновых функций различна для свободных частиц и нуклонов, локализованных в ядрах. Для последних используется обычная единица

ная нормировка по объему ядра V_n :

$$\int_{V_n} (\psi^\dagger \psi)_{n,p} d^3x = 1. \quad (18.29)$$

Для лептонов и других свободных частиц нормировка волновых функций выбирается так, чтобы одна частица находилась в единице объема (см. пп. в, г).

Небольшое различие констант μ и β распадов в (18.28) связано с тем, что бета-распад нейтрона определяется только той частью слабого адронного тока, которая сохраняет странность. Отметим, что при рассмотрении слабых взаимодействий с участием ядер гораздо большая неопределенность результатов возникает из-за того, что волновые функции нуклонов в ядрах известны плохо ввиду отсутствия точной теории сильных взаимодействий.

в) **Вычисление квадрата матричного элемента и вероятность распада мюона.** Близость констант в (18.28) свидетельствует в пользу теории универсального слабого взаимодействия, согласно которой константа связи G_W и $(V - A)$ тип взаимодействия одинаковы для всех элементарных частиц, лептонов и кварков *) [172]. Некоторая модификация типа взаимодействия имеется в нейтральных токах, рассмотренных в п. ж). Наиболее просто рассчитываются матричные элементы с двумя лептонными токами, где формфакторы отсутствуют. К таким процессам относится распад мюона

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e. \quad (18.30)$$

Вероятность распада мюона определяется выражением

$$W_\mu = \frac{2\pi}{\hbar} \int |H_\mu|^2 \delta(\Sigma \epsilon_\lambda) dN_e dN_{\bar{\nu}_e} dN_{\nu_\mu} \quad (18.31)$$

с матричным элементом

$$\begin{aligned} H_\mu &= \sum_\alpha \frac{G_W}{\sqrt{2}} \int j_{\bar{\nu}_e, i} j_{\nu_\mu, i} d^3x = \\ &= \sum_\alpha \frac{G_W}{\sqrt{2}} \int [\bar{\psi}_e \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_e}] [\bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_\mu] d^3x \end{aligned} \quad (18.32)$$

и фазовыми объемами, аналогичными (18.7). Волновые функции свободных лептонов с данным импульсом \vec{p} в соответствии с уравнением Дирака (18.8) выбираются в виде

$$\psi(p_i, x_i) = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2\epsilon}} u(p) e^{-i \frac{p_i x_i}{\hbar}}, \quad (18.33)$$

где p_i — 4-импульс лептона, $p \equiv p_i = \left(-\vec{p}, \frac{\epsilon}{c} \right)$, $u(p)$ — биспинор, не зависящий от координат. Подставляя (18.33) в (18.8), получаем уравнение

*) Учет кварковой структуры нуклонов необходим при высоких энергиях $E \gg 1000$ МэВ, которые здесь не рассматриваются.

для $u(p)$

$$(p_i \gamma_i - mc) u(p) = 0, \quad (18.34)$$

где с учетом нормировки для свободных частиц биспинор $u(p)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \bar{u}u &= 2mc, \\ \bar{u}\gamma_i u &= 2p_i. \end{aligned}$$

В результате для электрона получаем решение (18.34) в виде

$$u = u_{e-} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\epsilon}{c} + m_e c} W_e \\ \sqrt{\frac{\epsilon}{c} - m_e c} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) W_e \end{pmatrix}, \quad (18.35)$$

где $\vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ — единичный вектор вдоль направления импульса,

$$\vec{\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (18.36)$$

— вектор, составленный из матриц Паули σ_k , W_e — произвольный двухкомпонентный спинор, удовлетворяющий условию

$$W_e^\dagger W_e = 1 \quad (18.37)$$

и характеризующий поляризацию*).

Неполяризованный электрон описывается матрицей плотности Λ_e , получаемой в результате суммирования по спиновым состояниям и являющейся квадратной 4-матрицей вида [17, 21]

$$\sum_{\sigma} u \bar{u} = \Lambda_e = (p_i \gamma_i + m_e c I). \quad (18.38)$$

При усреднении по спиновым состояниям неполяризованного мюона возникает матрица $\frac{1}{2} \Lambda_{\mu}$, где Λ_{μ} аналогична Λ_e из (18.38). При вычислении

$|H|_{\mu}^2$ используется соотношение Фирца [171], отражающее симметрию матричного элемента H из (18.32) относительно перестановок волновых функций

$$\begin{aligned} & [\bar{\psi}_e \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_e}] [\bar{\psi}_{\nu_{\mu}} \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_{\mu}] = \\ & = - [\bar{\psi}_e \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_{\mu}] [\bar{\psi}_{\nu_{\mu}} \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_e}]. \end{aligned} \quad (18.39)$$

*) Наряду с биспинором из (18.33), (18.35), соответствующим свободному электрону имеется еще одно решение уравнения (18.8), соответствующее свободному позитрону: $\psi_{e+} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2\epsilon}} \bar{u}_e + \exp\left(\frac{ip_x x_i}{\hbar}\right)$, причем $\bar{u}_e + u_{e+} = -2m_e c$, $\bar{u}_e + \gamma_i u_{e+} = 2p_i$. Биспинор $u_{e+} = u(-p)$ получается из (18.35) после перемены знака m_e и замены $W_e \Rightarrow (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) W_e + c$ с учетом $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = 1$.

Расчет $|H|_{\mu}^2$ требует выражения для комплексно сопряженного тока [171], имеющего вид для (18.20)

$$j_{i,i}^* = [\bar{\psi}_e \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_e}]^* = \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_e. \quad (18.40)$$

Введем матрицы

$$\begin{aligned} A_{ik} &= [\bar{u}_e \gamma_i (1 + \gamma_5) u_{\mu}] [\bar{u}_{\mu} \gamma_k (1 + \gamma_5) u_e], \\ B_{ik} &= [\bar{u}_{\nu_{\mu}} \gamma_i (1 + \gamma_5) u_{\nu_e}] [\bar{u}_{\nu_e} \gamma_k (1 + \gamma_5) u_{\nu_{\mu}}], \end{aligned} \quad (18.41)$$

где биспиноры u_{λ} и ψ_{λ} связаны между собой по аналогии с (18.33). Используя (18.38)–(18.41), суммирование по спинам одного из нейтрино и усреднение по спинам мюона в (18.32), получаем для неполяризованного мюона *)

$$|H|_{\mu}^2 = \frac{G_W^2 c^4 A_{ik} B_{ik}}{32 \epsilon_{\nu_{\mu}} \epsilon_{\nu_e} \epsilon_e \epsilon_{\mu}} (2\pi \hbar)^3 \delta \left(\sum_{\lambda} \vec{p}_{\lambda} \right). \quad (18.42)$$

С учетом (18.38) вычисление $|H|_{\mu}^2$ сводится к вычислению следов (сумме диагональных элементов) матриц, составленных из произведений γ -матриц Дирака. Подробности расчета приведены в [171]. В результате имеем

$$|H|_{\mu}^2 = 4G_W^2 c^4 \frac{(p_e p_{\nu_{\mu}})(p_{\mu} p_{\nu_e})}{\epsilon_e \epsilon_{\nu_{\mu}} \epsilon_{\mu} \epsilon_{\nu_e}} (2\pi \hbar)^3 \delta \left(\sum_{\lambda} \vec{p}_{\lambda} \right), \quad (18.43)$$

где скалярное произведение определено в (18.10). Подставив (18.43) в (18.31), проведем интегрирование по импульсам для распада мюона в вакууме при $f_e = f_{\nu_e} = f_{\nu_{\mu}} = 0$ в (18.7). Следуя [171], проинтегрируем сначала по импульсам нейтрино ν_{μ} и ν_e , вычисляя интеграл

$$\begin{aligned} I_{ik} &= \int \frac{p_{\nu_{\mu},i} p_{\nu_e,k}}{\epsilon_{\nu_{\mu}} \epsilon_{\nu_e}} \delta(\vec{p}_{\nu_{\mu}} + \vec{p}_{\nu_e} - \vec{q}) \delta(\epsilon_{\nu_{\mu}} + \epsilon_{\nu_e} - c q_0) \times \\ &\times d^3 p_{\nu_{\mu}} d^3 p_{\nu_e}, \quad q_j = p_{\mu,j} - p_{e,j}. \end{aligned} \quad (18.44)$$

Для частиц нулевой массы с $p_i^2 = 0$ имеет место равенство [171]

$$\int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{\epsilon_1 \epsilon_2} \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{q}) \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - c q_0) = \frac{2\pi}{c^3}. \quad (18.45)$$

Представив I_{ik} в виде

$$I_{ik} = A q^2 \delta_{ik} + B q_i q_k \quad (18.46)$$

и учтя равенства

$$I_{ik} \delta_{ik} = \pi \frac{q^2}{c^3}, \quad I_{ik} q_i q_k = \frac{\pi q^4}{2c^3}, \quad (18.47)$$

*) После интегрирования по $d^3 x$ с учетом (18.33) в (18.32) появляется сомножитель $(2\pi \hbar)^3 \delta \left(\sum_{\lambda} \vec{p}_{\lambda} \right)$, отражающий сохранение импульса. Вторая δ -функция, возникающая при возведении в квадрат, дает нормировочный объем, который сокращается в выражении для вероятности распада [172]. Здесь учтено, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx = 2\pi \delta(k)$.

получим *)

$$I_{ik} = \frac{\pi}{6c^3} (q^2 \delta_{ik} + 2q_i q_k). \quad (18.48)$$

Используя (18.48), (18.43), (18.44), получим из (18.31)

$$W_\mu = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{4G_W^2 c^4}{(2\pi\hbar)^6} \frac{\pi}{6c^3} \int \frac{p_{ei} p_{\mu k}}{\epsilon_e \epsilon_\mu} (q^2 \delta_{ik} + 2q_i q_k) d^3 p_e. \quad (18.49)$$

Пренебрегая электронной массой по сравнению с мюонной $p_e^2 \approx 0$ и рассматривая мюон в состоянии покоя ($p_\mu = (0, m_\mu c)$), получим с учетом (18.10)

$$\begin{aligned} q_i &= p_{\mu i} - p_{ei} = \left(\vec{p}_e, m_\mu c - \frac{\epsilon_e}{c} \right), \\ q^2 &= (m_\mu c)^2 - 2m_\mu \epsilon_e, \\ p_{ei} p_{\mu i} &= p_{ei} q_i = m_\mu \epsilon_e, \\ p_{\mu i} q_i &= m_\mu c \left(m_\mu c - \frac{\epsilon_e}{c} \right). \end{aligned} \quad (18.50)$$

Учтя (18.50) в (18.49), получим

$$\begin{aligned} W_\mu &= \frac{cG_W^2}{3(2\pi)^4 \hbar^7} \int [3(m_\mu c)^2 - 4m_\mu \epsilon_e] \frac{d^3 p_e}{c^2} = \\ &= \frac{G_W^2}{3(2\pi)^4 \hbar^7 c^4} 4\pi \int_0^{m_\mu c^2/2} [3(m_\mu c)^2 - 4m_\mu \epsilon_e] \epsilon_e^2 d\epsilon_e = \frac{G_W^2 m_\mu^5 c^4}{192\pi^3 \hbar^7}. \end{aligned} \quad (18.51)$$

Используя экспериментальное время жизни мюона $\frac{1}{W_\mu} = \tau_\mu \approx 2,1971 \cdot 10^{-6}$ с, получаем из (18.51) с учетом (18.3) значение слабой константы

$$G_W = \left[\frac{192\pi^3 \hbar^7}{m_\mu^5 \tau_\mu c^4} \right]^{1/2} = 1,4357 \cdot 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3, \quad (18.52)$$

приведенное в (18.28).

г) Вычисление $|H|_\beta^2$ и вероятности распада нейтрона и ядер. При бета-распадах $q \ll m_\nu$, поэтому в (18.21) можно пренебречь формфакторами f_2 и g_3 из (18.23), (18.25) и использовать значения f_1 и g_1 из (18.22), (18.24) при $q = 0$: $f_1(0) = 1$, $g_1(0) = g_A = 1,25$. Рассмотрим сначала распад нейтрона. В этом случае нейтрон и протон являются свободными частицами, их волновые функции аналогичны лептонным (18.33), (18.35).

Матричный элемент распада нейтрона запишется в виде **)

$$H_n = \sum_\sigma \frac{G_W}{\sqrt{2}} \int [\bar{\psi}_p \gamma_i (1 + g_A \gamma_5) \psi_n] [\bar{\psi}_e \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_\nu] d^3 x. \quad (18.53)$$

*) Вычисления (18.45), (18.47) ведутся в системе координат, где $\vec{p}_\nu = -\vec{p}_e$ с учетом $p_{\nu\mu} + p_{e\mu} = q$, $p_{\nu\mu}^2 = p_{e\mu}^2 = 0$.

**) Константы β и μ распадов обозначаются одной и той же буквой G_W .

С большой точностью нуклоны можно считать нерелятивистскими, тогда в соответствующих биспинорах типа (18.35), отличающихся на $\sqrt{2}$, останутся по два ненулевых компонента

$$\bar{u}_p = (\sqrt{m_p c} W_p^+, 0), \quad u_n = \begin{pmatrix} \sqrt{m_n c} W_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (18.54)$$

где W_p и W_n — спиноры, аналогичные W_e из (18.37)*. Нерелятивистские пределы элементов адронного тока $j_{a,i}$ с учетом (18.9), (18.36), (18.54) имеют вид

$$\bar{u}_p \gamma_4 u_n = c \sqrt{m_n m_p} W_p^+ W_n, \quad (18.55)$$

$$\bar{u}_p \vec{\gamma} u_n = 0,$$

$$\bar{u}_p \gamma_4 \gamma_5 u_n = 0, \quad (18.56)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_p \vec{\gamma} \gamma_5 u_n &= c \sqrt{m_p m_n} (W_p^+, 0) \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_n \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= -W_p^+ \vec{\sigma} W_n c \sqrt{m_p m_n}. \end{aligned}$$

Для квадрата матричного элемента (18.53) получаем [171]

$$\begin{aligned} |H|_n^2 &= \sum_{\sigma} \frac{G_w^2 c^2}{32 \epsilon_\nu \epsilon_e} \{ |(W_p^+ W_n) (\bar{u}_e \gamma_4 (1 + \gamma_5) u_\nu)|^2 + \\ &+ g_A^2 |(W_p^+ \vec{\sigma} W_n) (\bar{u}_e \vec{\gamma} (1 + \gamma_5) u_\nu)|^2 \} (2\pi\hbar)^3 \delta(\sum_{\lambda} \vec{p}_{\lambda}). \end{aligned} \quad (18.57)$$

Матрица плотности неполяризованного протона есть сумма по спиновым состояниям

$$\sum_{\sigma} u_p \bar{u}_p = \sum_{\sigma} m c W_p W_p^+ = \Lambda_p = m c \gamma_4 + m c I = 2m c \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (18.58)$$

а для нейтрона после усреднения по спинам имеем

$$\sum'_{\sigma} u_n \bar{u}_n = \sum'_{\sigma} m c W_n W_n^+ = \frac{1}{2} \Lambda_n = m c \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18.59)$$

Здесь Σ' означает усреднение по спиновым состояниям. Подставляя (18.38), (18.58), (18.59) в (18.57) и вычисляя следы произведений γ и σ матриц, получаем [171]**)

$$|M|_n^2 = G_w^2 \left[(1 + 3g_A^2) + \frac{c^2 \vec{p}_e \vec{p}_\nu}{\epsilon_e \epsilon_\nu} (1 - g_A^2) \right]. \quad (18.60)$$

Отметим, что после замены $p_{\mu} \Rightarrow p_n$, $p_{\nu} \Rightarrow p_p$ в нерелятивистском пределе для n и p (18.43) соответствует с (18.60) при $g_A = 1$, когда $|M|_n^2 = 4G_w^2$. Подставляя (18.60), (18.57) в (18.6), пренебрегая отдачей ядра и интегри-

*) С нормировкой $W_p^+ W_p = 2$, $W_n^+ W_n = 2$.

**) $|M|_n^2$ отличается от $|H|_n^2$ отсутствием множителя $(2\pi\hbar)^3 \delta(\sum_{\lambda} \vec{p}_{\lambda})$, см. (18.57).

руя по углам, получим

$$W_n = \frac{2\pi}{\hbar} \int |M|^2 \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} \delta(\epsilon_e + \epsilon_\nu - \Delta_{np}) p_e^2 dp_e p_\nu^2 dp_\nu. \quad (18.61)$$

Второй член из (18.60) не входит в (18.61), так как зануляется после интегрирования по углам в импульсном пространстве*). Учтя $p_\nu = \epsilon_\nu/c$, $p_e = \frac{1}{c} \sqrt{\epsilon_e^2 - m_e^2 c^4}$, имеем из (18.61)

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{G_W^2 (1 + 3g_A^2)}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} \int_{m_e c^2}^{\Delta} \sqrt{\epsilon_e^2 - m_e^2 c^4} (\Delta - \epsilon_e)^2 \epsilon_e d\epsilon_e = \\ &= \frac{G_W^2 (1 + 3g_A^2) m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \int_1^{\delta} \sqrt{u^2 - 1} (\delta - u)^2 u du, \\ u &= \epsilon_e / m_e c^2, \quad \delta = \Delta / m_e c^2 = 2,531. \end{aligned} \quad (18.62)$$

Подынтегральная функция в (18.62) определяет спектр электронов при бета-распаде нейтрона. Интеграл в (18.62) берется аналитически и называется функцией Ферми без учета кулоновского взаимодействия F_0

$$\begin{aligned} F_0(u) &= \int_1^u \sqrt{x^2 - 1} (\delta - x)^2 dx = \frac{1}{60} \sqrt{u^2 - 1} [12u^4 - 30u^3 \delta + \\ &+ 4(5\delta^2 - 1)u^2 + 15u\delta - 4(5\delta^2 + 2)] + \frac{\delta}{4} \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}), \end{aligned} \quad (18.63)$$

$$F_0(\delta) = F_0 = \frac{1}{60} \sqrt{\delta^2 - 1} (2\delta^4 - 9\delta^2 - 8) + \frac{1}{4} \delta \ln(\delta + \sqrt{\delta^2 - 1}).$$

Период полураспада нейтрона $t_{1/2}$ есть

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{W_n}. \quad (18.64)$$

Величина

$$(F t_{1/2})_n = \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{G_W^2 (1 + 3g_A^2) m_e^5 c^4} \approx 1083^{**} \quad (18.65)$$

*) Если при бета-взаимодействии барионы или массивные лептоны являются нерелятивистскими, то

$$|M|^2 = G_W^2 (\tilde{g}_V^2 + 3\tilde{g}_A^2 + \text{н.ч.}) g_\nu^2 (1 + \delta_{mm'})^2 \quad (18.60a)$$

при

$$H = \frac{G_W}{\sqrt{2}} \int [g_\nu \bar{\psi}_\nu \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_\nu] \cdot [\bar{\psi}_m \gamma_i (\tilde{g}_V + \tilde{g}_A \gamma_5) \psi_{m'}] (1 + \delta_{mm'}) d^3x,$$

где m – барионы, массивные лептоны, н.ч. – члены, обращающиеся в нуль после усреднения для неполяризованных частиц. Запись H в виде (18.60a) всегда возможна с учетом (18.39).

***) Здесь использовано бета-распадное G_W из (18.28) и значение $g_A = 1,25$, полученное усреднением результатов различных опытов. Экспериментальное значение $(F t_{1/2})_n$ для распада нейтрона, равное 1187, требует несколько меньшей постоянной $g_A = 1,18$ [232].

зависит только от физических констант и постоянной части матричного элемента взаимодействия, не зависит от фазовых соотношений и находится экспериментально измерением периода полураспада $t_{1/2}$ и вычислением функции Ферми F .

При бета-распаде нейтрона нейтрон и протон расположены в одной точке, так что происходит полное перекрытие волновых функций и достигается максимум $|H|^2$. Это соответствует равенству $\int_{V_n} \psi_n + \psi_p d^3x = 1$

в (18.27). Если происходит бета-распад ядер, где нуклоны нельзя считать свободными, то волновые функции нейтрона и протона перекрываются не полностью и $(Ft_{1/2})_{A,Z}$ обычно больше $(Ft_{1/2})_n$. Иногда $(Ft_{1/2})_{A,Z}$ оказывается меньше $(Ft_{1/2})_n$ (табл. 20). Это объясняется тем, что в бета-распаде ядра может принимать участие несколько нейтронов, поэтому, например, $(Ft_{1/2})_{\text{He}} < (Ft_{1/2})_n$ несмотря на неполное перекрытие n и p волновых функций; здесь участие в бета-распаде принимают два нейтрона ядра ${}^6\text{He}$, расположенных на второй нейтронной оболочке. Измерения $(Ft_{1/2})_{A,Z}$ служат источником информации о волновых функциях нуклонов внутри ядер.

д) Классификация бета-распадов, правила отбора. Степень перекрытия волновых функций ядра до и после бета-распада определяется в основном соотношением между спинами и четностями этих ядер. Подробное объяснение причин такой зависимости можно найти в специальной литературе [213, 171, 69, 230, 86, 84], мы ограничимся здесь изложением результатов и их качественной интерпретацией.

Если экспоненциальные множители в волновых функциях лептонов заменяются единицей, то это означает, что лептонная пара не уносит орбитальный угловой момент. При этом унесенный ею суммарный спин

Таблица 20

Данные о некоторых сверхразрешенных переходах

Переход	Спин	$t_{1/2}$, с	E_{max} , кэВ	$Ft_{1/2}$, с
${}^1_0n \rightarrow {}^1_1\text{H}$	1/2	11,7 мин	782	1187
${}^3_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He}$	1/2	$3,87 \cdot 10^8$	18,65	1132
${}^{11}_6\text{C} \rightarrow {}^{11}_5\text{B}$	3/2	1224	968	4030
${}^{13}_7\text{N} \rightarrow {}^{13}_6\text{C}$	1/2	603	1202	4700
${}^{15}_8\text{O} \rightarrow {}^{15}_7\text{N}$	1/2	124	1739	4475
${}^{17}_9\text{F} \rightarrow {}^{17}_8\text{O}$	5/2	66	1748	2380
${}^{23}_{12}\text{Mg} \rightarrow {}^{23}_{11}\text{Na}$	3/2	12	3056	4480
${}^{25}_{13}\text{Al} \rightarrow {}^{25}_{12}\text{Mg}$	5/2	7,23	3239	4280
${}^{27}_{14}\text{Si} \rightarrow {}^{27}_{13}\text{Al}$	5/2	4,19	3793	4500
${}^{35}_{16}\text{Ar} \rightarrow {}^{35}_{15}\text{Cl}$	3/2	1,804	4448	5680
${}^{41}_{21}\text{Sc} \rightarrow {}^{41}_{20}\text{Ca}$	7/2	0,87	4940	2560
${}^6_2\text{He} \rightarrow {}^6_3\text{Li}$	0 → 1	0,813	3500	808
${}^{10}_6\text{C} \rightarrow {}^{10}_5\text{B}^*$	0 → 1	19,1	2100	1700
${}^{18}_{10}\text{Ne} \rightarrow {}^{18}_9\text{F}$	0 → 1	1,6	3200	794,4
${}^{50}_{25}\text{Mn} \rightarrow {}^{50}_{24}\text{Cr}$	1 → 0	0,2857	6609	3082
${}^{54}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^{54}_{26}\text{Fe}$	1 → 0	0,1937	7229	2966

$$E_{\text{max}} = \Delta - m_e c^2$$

равен либо нулю, либо единице со знаком "+" или "-"*)). Векторный член (V) в токе $j_{l,l}$ из (18.20) не равен нулю, если входящие в него лептоны имеют одинаковые спины, для бета-распада это соответствует суммарному нулевому спину электрона и антинейтрино. Таким образом V -взаимодействие, введенное Ферми, требует неизменности ядерного спина I , а также четности ядра. Таким образом, правило отбора Ферми имеет вид

$$|\Delta I| = 0, |\Delta I| = 1, \text{ четность сохраняется.} \quad (18.66)$$

Псевдовекторное A -взаимодействие в (18.20), введенное Гамовым и Теллером (1936 г.), меняет спины ядер, т.е. сумма спинов лептонов при бета-распаде равна единице. При этом величина спина ядра может измениться на единицу, но может остаться постоянной по модулю, изменив лишь направление, с тем чтобы единице равнялась их векторная разность. Последнее возможно только в случае ненулевого спина исходного ядра. Таким образом, правила отбора Гамова-Теллера имеют вид

$$\left. \begin{aligned} |\Delta I| = \pm 1, \quad |\Delta I| = 1, \\ |\Delta I| = 0, \text{ если } I \neq 0 \end{aligned} \right\} \text{ четность сохраняется.} \quad (18.67)$$

При выполнении правил отбора (18.66), (18.67) величина $Ft_{1/2}$ определяется степенью перекрытия волновых функций. Если перекрытие велико, как при распаде нейтрона, то такой переход называется *сверхразрешенным*. Ему соответствуют значения $\lg(Ft_{1/2}) = 3.5 \pm 0.7$ [84], см. табл. 19. Эти переходы встречаются только в сравнительно легких ядрах. К ним относятся зеркальные переходы в нечетно-четных ядрах, где число нейтронов-протонов исходного ядра равно числу протонов-нейтронов ядра конечного, например, позитронный распад ${}^1_9\text{F}_8 \rightarrow {}^1_7\text{O}_9$. Другой тип сверхразрешенных переходов встречается в четных ядрах с $A = 4n + 2$, где в распадах участвуют два нейтрона на внешней оболочке. К ним относится рассмотренный выше переход ${}^6_2\text{H}_4 \rightarrow {}^6_3\text{Li}_3$. Позитронные распады в зеркальных ядрах связаны с энергией кулоновского отталкивания протонов в ядре.

Переходы с существенно большими $\lg(Ft_{1/2}) = 5.7 \pm 2$, для которых выполняются указанные выше правила отбора, называются *разрешенными*. Разрешенные и сверхразрешенные переходы характеризуются формой спектра электронов, определяемой подынтегральным выражением в (18.62) (о влиянии кулоновских поправок см. ниже).

Если правила отбора (18.66), (18.67) не выполняются, то бета-распады ядер происходят только за счет отклонения внутри ядра экспоненты волновых функций лептонов от единицы, что эквивалентно уносу орбитального момента лептонной парой. При этом в выражении для вероятности перехода возникает малый множитель

$$(R_n/\lambda_l)^2 \approx 10^{-3} \div 10^{-4}, \quad (18.68)$$

где R_n — размер ядра, $\lambda_l = \frac{\hbar}{p_l}$ — характерный размер периода лептонной

*) В единицах \hbar .

волновой функции. Переходы, связанные с первым членом разложения экспоненты, называются однократно запрещенными с $\lg (Ft_{1/2}) = 7,5 \pm 2$. Лептонная пара здесь уносит помимо спинов, единственный орбитальный угловой момент. Правила отбора для этих переходов таковы:

$$\Delta |I| = 0, \pm 1, \text{ четность меняется,} \quad (\Phi) \quad (18.69)$$

$$|\Delta I| = 1, \text{ переходы } 0 \rightarrow 0 \text{ запрещены.}$$

$$\Delta |I| = 0, \pm 1, \pm 2, \text{ четность меняется,} \quad (\Gamma-T) \quad (18.70)$$

$$|\Delta I| = 0, 2, \text{ переходы с } |I_1| + |I_2| < 2 \text{ запрещены для } |\Delta I| = 2.$$

Если изменение спина превышает на единицу степень запрещения, то такой переход называется уникальным. Для перехода с $\Delta I = \pm 2$ в (18.70) имеет место $\lg (Ft_{1/2}) = 8,5 \pm 1$. Спектры электронов в однократно запрещенных переходах определяются произведением подынтегрального выражения в (18.62) на множитель [23]

$$(p_e + p_\nu)^2 \sim p_e^2 + p_\nu^2 \sim (u^2 - 1) + (\delta - u)^2. \quad (18.71)$$

Релятивистские эффекты и кулоновское поле приводят к смешению состояний $p_{1/2}$ и $s_{1/2}$ с $j = 1/2$ на величину $\sim \alpha Z$. Это приводит к тому, что наряду со вторым членом разложения экспоненты $\sim \frac{1}{\hbar} p_e R_n$ вклад в матричный элемент дает постоянное значение лептонной волновой функции с малостью $\sim \alpha Z$. При этом вероятность распада приобретает малость $\sim \alpha^2 Z^2$, а спектр электронов при $|\Delta I| = 0, \pm 1$ остается близким к разрешенному.

Матричные элементы n -кратно запрещенных переходов определяются n -м членом разложения лептонной экспоненты со следующими правилами отбора:

$$\Delta |I| = 0, \pm 1, \dots \pm n \quad (\Phi);$$

$$|\Delta I| = n, \text{ переходы с } |I_1| + |I_2| < n \text{ запрещены;}$$

$$\Delta |I| = 0, \pm 1, \dots \pm n, \pm(n+1) \quad (\Gamma-T); \quad (18.72)$$

$$|\Delta I| = n \pm 1, \text{ где переходы с } |I_1| + |I_2| < n \pm 1 \text{ запрещены,}$$

$$\text{четность } \pi_2 = (-1)^n \pi_1.$$

Здесь при $\pi_2 = \pi_1$ четность сохраняется, $\pi_2 = -\pi_1$ — изменяется. Каждая степень запрещения увеличивает $Ft_{1/2}$ на 3–4 порядка. Данные об известных бета-переходах ядер приведены в [99].

е) Кулоновские поправки. Кулоновское взаимодействие между ядрами и заряженными лептонами приводит к отклонениям волновой функции распределения от свободной, что увеличивает вероятность электронного распада ядер за счет увеличения волновой функции электрона в ядре и, соответственно, уменьшает вероятность позитронного распада. Поправочный множитель кулоновского взаимодействия $\Phi(Z, \epsilon)$ находится аналогично кулоновскому подбарьерному множителю в ядерных реакци-

ях (см. гл. 4). Для нерелятивистских электронов и позитронов e^\mp имеем

$$\Phi_{\mp}(Z, \epsilon) = \frac{|\psi_e(0)|^2}{|\psi_e(0)|_{\text{своб}}^2} = \frac{2\pi\eta}{|\exp(\mp 2\pi\eta) - 1|},$$

$$\eta = \frac{Ze^2}{\hbar v} = \alpha Z \frac{c}{v}. \quad (18.73)$$

Здесь Z заряд конечного ядра, для релятивистских e^\mp функций $\frac{v}{c} \Phi_{\mp} = \frac{pc}{\epsilon} \Phi_{\mp} = 2\pi\alpha Z (\Phi_{\mp}/2\pi\eta)$ затабулированы (см. [363]). Учет кулоновского

взаимодействия в бета-распаде ядра сводится к умножению подынтегрального выражения на $\Phi_{\mp}(Z, \epsilon)$ при вычислении функции Ферми F , что дает для разрешенных переходов

$$F_{\mp} = 2\pi\alpha Z \left\langle \frac{\Phi_{\mp}}{2\pi\eta} \right\rangle \left(\frac{\delta^5}{30} - \frac{\delta^2}{3} + \frac{\delta}{2} - \frac{1}{5} \right). \quad (18.74)$$

Интегрирование с учетом таблиц для $Z = 26$ дает $\langle \Phi_{-}/2\pi\eta \rangle = 1,6$, $\langle \Phi_{+}/2\pi\eta \rangle = 0,5$, причем в таблицах электронный сомножитель меняется на $\sim 10\%$, а позитронный — на $\sim 50\%$ в интервале энергий e^\mp , дающих основной вклад в скорость бета-распада [93]. Отметим, что кулоновские поправки существенно меняют спектр бета-электронов при малых энергиях, но их влияние на скорость бета-распада не столь велико, поэтому в астрофизических расчетах этой поправкой часто пренебрегают и используют функцию Ферми F_0 .

ж) **Нейтральные токи.** В лептонных токах типа (18.20), описывающих распады лептонов и ядер, а также в адронном токе (18.21), входящем в вероятность бета-распада, заряды начальной и конечной частицы различны, поэтому такие токи называются заряженными. Возможность существования нейтральных токов с одинаковыми зарядами начальной и конечной частиц была высказана Бладманом в 1958 г., однако лишь после создания теории Вайнберга—Салама в 1967 г., объединяющей слабые и электромагнитные взаимодействия, и экспериментального открытия рассеяния мюонного нейтрино на электроны в 1973 г. существование нейтральных токов стало общепризнанным [231]. Ввиду того что электрон, мюон и тау-лептон с соответствующими нейтрино обладают различными сохраняющимися лептонными зарядами, нейтральные токи могут лишь переводить частицы самих в себя. Например, сечение реакции рассеяния

$$\nu_e + \nu_{\mu} \rightarrow \nu_e + \nu_{\mu} \quad (18.75)$$

определяется только произведением токов $(\bar{\psi}_{\nu_e} O_i \psi_{\nu_e})(\bar{\psi}_{\nu_{\mu}} O_i \psi_{\nu_{\mu}})$, а токи вида $(\bar{\psi}_{\nu_e} O_i \psi_{\nu_{\mu}})$ отсутствуют. В некоторые процессы, например рассеяние

$$\nu_e + e \rightarrow \nu_e + e, \quad (18.76)$$

дают вклад как заряженные токи $(\bar{\psi}_{\nu_e} O_i \psi_e)(\bar{\psi}_e O_i \psi_{\nu_e})$, так и нейтральные $(\bar{\psi}_{\nu_e} O_i \psi_{\nu_e})(\bar{\psi}_e O_i \psi_e)$. В то же время сечение рассеяния

$$\nu_{\mu} + e \rightarrow \nu_{\mu} + e \quad (18.77)$$

определяется только нейтральными токами $(\bar{\psi}_{\nu\mu} O_i \psi_{\nu\mu})(\bar{\psi}_e O_i \psi_e)$, так как заряженные токи $(\bar{\psi}_{\nu\mu} O_i \psi_e)$ или $(\bar{\psi}_e O_i \psi_{\nu\mu})$ отсутствуют ввиду различных лептонных зарядов мюонного нейтрино и электрона.

Из теории Вайнберга—Салама, подтвержденной экспериментами, следует, что нейтральные токи создаются не только левым оператором $O_i^L = \gamma_i (1 + \gamma_5)$, соответствующим $(V - A)$ -взаимодействию, но и правым оператором $O_i^R = \gamma_i (1 - \gamma_5)$, отражающим вклад $(V + A)$ -взаимодействия. Другой особенностью нейтральных токов является их зависимость от зарядов элементарных частиц, поэтому универсальность слабого взаимодействия следует понимать здесь в обобщенном смысле. Нейтральные токи для лептонов и кварков имеют вид [172]

$$j_i^{(n)} = \sum_{\lambda} [g_L^{\lambda} \bar{\psi}_{\lambda} \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_{\lambda} + g_R^{\lambda} \bar{\psi}_{\lambda} \gamma_i (1 - \gamma_5) \psi_{\lambda}],$$

$$g_L^{\lambda} = 1/2, \quad g_R^{\lambda} = 0 \text{ для } \lambda = \nu_e, \nu_{\mu}, \nu_{\tau}; \quad g_L^{\lambda} = -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W,$$

$$g_R^{\lambda} = \sin^2 \theta_W \text{ для } \lambda = e, \mu, \tau; \quad g_L^{\lambda} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W, \quad (18.78)$$

$$g_R^{\lambda} = -\frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \text{ для } \lambda = u, c, t \text{ (кварки)}; \quad g_L^{\lambda} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W,$$

$$g_R^{\lambda} = \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \text{ для } \lambda = d, s, b \text{ (кварки)}.$$

Здесь θ_W — угол Вайнберга, отражающий перемешивание слабых и электромагнитных взаимодействий. Член с $\sin^2 \theta_W$ в $j_i^{(n)}$ является чисто векторным, как j_i^{em} в электродинамике. Из экспериментов следует [120]

$$\sin^2 \theta_W = 0,224 \pm 0,020. \quad (18.79)$$

Нейтральные токи нуклонов*) получают суммированием кварковых токов и учетом формфакторов типа (18.22)–(18.25). Для малых переданных импульсов имеем (см., например [73])

$$j_{p,i}^{(n)} = \bar{\psi}_p \left[\frac{1}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta_W) \gamma_i + \frac{1}{2} g_A \gamma_i \gamma_5 \right] \psi_p =$$

$$= \bar{\psi}_p \left[\frac{1}{2} \gamma_i (1 + g_A \gamma_5) - 2 \sin^2 \theta_W \gamma_i \right] \psi_p, \quad (18.80)$$

$$j_{n,i}^{(n)} = -\frac{1}{2} \bar{\psi}_n \gamma_i (1 + g_A \gamma_5) \psi_n.$$

При написании матричного элемента следует учесть, что прямой и обратный переходы реакций, описываемых нейтральными токами (18.75)–(18.77) тождественны. Вследствие этого произведение неодинаковых токов входят в матричный элемент с коэффициентом 2 [172, 231]. Произведение одинаковых токов входит единожды, так как тождественность

*) Кварковая структура нуклонов имеет вид

$p = uud, \quad n = udd, \quad Q_u = Q_c = Q_t = 2/3,$

$Q_d = Q_s = Q_b = -1/3$ в единицах e .

прямой и обратной реакции компенсируется коэффициентом $1/2$ из-за тождественности вступающих в реакцию частиц, например, при рассеянии $\nu_e + \nu_e \rightarrow \nu_e + \nu_e$. Отметим, что произведение заряженных токов реакции (18.76) входит в матричный элемент также единожды, так как снова возникает коэффициент $1/2$ из-за тождественности токов в этом произведении [172]. В итоге, матричный элемент, соответствующий бета-реакции, связанной с нейтральными токами, записывается в виде

$$H^{(n)} = \sum_{\sigma} \int \frac{G_W}{\sqrt{2}} \frac{2}{1 + \delta_{\lambda 0}} j_{\lambda, i}^{(n)} j_{0, i}^{(n)} d^3 x. \quad (18.81)$$

Если в реакцию с нейтральными токами вступают ядра, то необходимо интегрирование по объему ядра, аналогично (18.27).

В реакциях рассеяния вместо вероятности W удобнее использовать сечение σ . Дифференциальные величины связаны соотношением $dW = j d\sigma$, где j — плотность потока частиц. В лабораторной системе, где частица 0 покоится, а частица 1 налетает со скоростью v_1 , имеет место, в силу выбранной нормировки волновых функций, $j = v_1$. Если выразить величины в лабораторной системе через инвариантные

$$\begin{aligned} m_0 c^2 \epsilon_1 v_1 &= m_0 c^4 |\vec{p}_1| = c^3 \sqrt{(p_0 p_1)^2 - p_0^2 p_1^2} = \\ &= c^3 \sqrt{(p_0 p_1)^2 - m_0^2 m_1^2 c^4}, \end{aligned}$$

то с учетом выражения для W типа (18.6), (18.31) или (18.61) получим [172] сечение рассеяния частиц 0 и 1 (2 и 3 — частицы после рассеяния)

$$\sigma_{\beta} = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 |H|_{01}^2 d\phi}{c^3 \sqrt{(p_0 p_1)^2 - m_0^2 m_1^2 c^4}}, \quad (18.82)$$

$$d\phi = \frac{d^3 p_2 d^3 p_3}{(2\pi\hbar)^6} \delta\left(\sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda}\right) (1 - f_2)(1 - f_3).$$

Здесь $d\phi$ — элемент фазового объема рассеянных частиц с включением δ -функций от энергии. Сечение поглощения записывается аналогично (18.82) при соответствующем выборе $d\phi$. Отметим, что статстические веса здесь, так же как в (18.7), не входят в определение $d\phi$ ввиду суммирования по спинам в матричном элементе.

Рассмотрим сечения некоторых процессов. Для рассеяния нейтрино на лептонах квадрат матричного элемента заряженного тока получается из (18.43) простой заменой переменных. Интегрирование в (18.82) при $f_2 = f_3 = 0$ приводит к следующим выражениям для инвариантных сечений, связанных с заряженными токами [172]:

$$\sigma_{\nu_e}^{(ch)} = \sigma_{s0} \frac{s_{\nu_e}^2}{s_{\nu_e} + 1/2} = \begin{cases} \sigma_{s0} s_{\nu_e} & \text{при } s_{\nu_e} \gg 1 \\ 2 \sigma_{s0} s_{\nu_e}^2 & \text{при } s_{\nu_e} \ll 1, \end{cases} \quad (18.83)$$

$$\sigma_{\bar{\nu}_e}^{(ch)} = \frac{1}{3} \sigma_{s0} s_{\nu_e}^{-1} [1 - (1 + 2s_{\nu_e}^{-1})^{-3}] \approx \begin{cases} \frac{1}{3} \sigma_{s0} s_{\nu_e}^{-1} & \text{при } s_{\nu_e} \gg 1 \\ 2 \sigma_{s0} s_{\nu_e}^2 & \text{при } s_{\nu_e} \ll 1. \end{cases} \quad (18.84)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} \sigma_{s_0} &= \frac{2G_W^2 m_e^2}{\pi \hbar^4} = 0,876 \cdot 10^{-44} \text{ см}^2 \\ s_{\nu_e} &= u_e u_{\nu_e} - \vec{\pi}_e \vec{\pi}_{\nu_e}, \quad s_{\tilde{\nu}_e} = u_e u_{\tilde{\nu}_e} - \vec{\pi}_e \vec{\pi}_{\tilde{\nu}_e}, \\ u_e &= \epsilon_e / m_e c^2, \quad u_{\nu_e} = \epsilon_{\nu_e} / m_e c^2, \quad u_{\tilde{\nu}_e} = \epsilon_{\tilde{\nu}_e} / m_e c^2, \\ \vec{\pi}_e &= \vec{p}_e / m_e c, \quad \vec{\pi}_{\nu_e} = \vec{p}_{\nu_e} / m_e c, \quad \vec{\pi}_{\tilde{\nu}_e} = \vec{p}_{\tilde{\nu}_e} / m_e c. \end{aligned} \quad (18.85)$$

В системе покоя электрона ($u_e = 1, \vec{\pi}_e = 0$) имеем

$$s_{\nu_e} = u_{\nu_e}, \quad s_{\tilde{\nu}_e} = u_{\tilde{\nu}_e}. \quad (18.86)$$

Отметим, что при малых энергиях $\sigma_{e^-\nu_e}^{(\text{ch})} = \sigma_{e^-\tilde{\nu}_e}^{(\text{ch})}$, а при больших $\sigma_{e^-\nu_e}^{(\text{ch})} = 3\sigma_{e^-\tilde{\nu}_e}^{(\text{ch})}$

Вычисления, аналогичные тем, что проведены в п. в, с использованием (18.78)–(18.81) дают значение матричного элемента, соответствующего нейтральным токам. Полное сечение рассеяния согласно [172, 86] равно

$$\sigma_{ev}^{\text{tot}} \sim |H^{(\text{ch})} + H^{(n)}|^2, \quad (18.87)$$

$$\sigma_{e^-\nu_e}^{\text{tot}} = d_{\nu_e} \sigma_{e^-\nu_e}^{(\text{ch})}, \quad \sigma_{e^-\tilde{\nu}_e}^{\text{tot}} = d_{\tilde{\nu}_e} \sigma_{e^-\tilde{\nu}_e}^{(\text{ch})},$$

$$\left. \begin{aligned} d_{\nu_e} &= \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \right)^2 + \frac{1}{3} \sin^4 \theta_W \approx 0,541 \\ d_{\tilde{\nu}_e} &= \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \right)^2 + 3 \sin^4 \theta_W \approx 0,675 \end{aligned} \right\} \text{при } s_{\nu_e}, s_{\tilde{\nu}_e} \gg 1, \quad (18.88)$$

$$d_{\nu_e} = d_{\tilde{\nu}_e} = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W \right)^2 \right] \approx 0,412 \text{ при } s_{\nu_e}, s_{\tilde{\nu}_e} \ll 1.$$

Здесь учтено (18.79), учет нейтральных токов уменьшает сечение рассеяния, ввиду их отрицательного вклада в матричный элемент. Рассеяние ($e^-\nu_\mu$) в реакции (18.77) связано только с нейтральными токами и имеет сечение [172, 86]

$$\begin{aligned} \sigma_{e^-\nu_\mu} &= d_{\nu_\mu} \sigma_{e^-\nu_\mu}^{(\text{ch})}, \quad \sigma_{e^-\tilde{\nu}_\mu} = d_{\tilde{\nu}_\mu} \sigma_{e^-\tilde{\nu}_\mu}^{(\text{ch})}, \\ d_{\nu_\mu} &= \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \right)^2 + \frac{1}{3} \sin^4 \theta_W \approx 0,093 \\ d_{\tilde{\nu}_\mu} &= \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \right)^2 + 3 \sin^4 \theta_W \approx 0,227 \end{aligned} \left\} \text{при } s_{\nu_\mu}, s_{\tilde{\nu}_\mu} \gg 1, \quad (18.89)$$

$$d_{\nu_\mu} = d_{\tilde{\nu}_\mu} = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W \right)^2 \right] \approx 0,188 \text{ при } s_{\nu_\mu}, s_{\tilde{\nu}_\mu} \ll 1.$$

В (18.89) $\sigma_{e^-\nu_\mu}^{(\text{ch})}$ зависит от u_{ν_μ} вместо u_{ν_e} (см. (18.85)). Как видно из (18.89), сечение ($e^-\nu_\mu$)-рассеяния примерно в пять раз меньше, чем ($e^-\nu_e$)-рассеяния.

Интересным эффектом, связанным с нейтральными токами, является когерентное упругое рассеяние нейтрино на ядрах, амплитуда которого растет линейно, а сечение квадратично с массой ядра. Проведенный в [73] расчет дает для полного сечения рассеяния (с учетом аксиального тока, см. (18.60a) и (18.80))*

$$\sigma_{N\nu} = \frac{1}{2} \sigma_{s0} u_V^2 \left\{ \left[A \sin^2 \theta_W + \frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 \theta_W)(N - Z) \right]^2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} g_A^2 (N - Z)^2 \xi_J \right\} \approx \sigma_{s0} u_V^2 \left[0,025 \left(A + \frac{N - Z}{0,81 A} \right)^2 + \xi_J \cdot 0,586 (N - Z)^2 \right]. \quad (18.90)$$

Здесь учтено (18.79), $g_A = 1,25$, $\xi_J \approx 0,1$ при $J = 1/2$, $\xi_J \ll 1$ при $J \neq 1/2$, $\xi_J = 1$ для нуклонов. Для нерелятивистских ядер $\sigma_{N\nu} = \sigma_{N\nu}^{\sim}$, как для электронов в (18.83), (18.84). Отметим, что для векторного тока рассеяние определяется s -волной, поэтому интеграл в (18.27) имеет максимальное значение, как при распаде нейтрона. При $J \neq 1/2$ в аксиальном переходе вклад в упругое рассеяние начинается с p -волны и всегда $\xi_0 \ll 1$. При $J = 1/2$ и наличии одиночного (без пары) нуклона на внешней ядерной оболочке возможно рассеяние s -волной с поворотом спина нуклона, когда $\xi_J \sim 0,1$.

3) О теории Вайнберга–Салама. Теория универсального слабого взаимодействия (УСВ), несмотря на хорошее согласие с экспериментами по бета-распаду ядер и распадам многих элементарных частиц, встречается с принципиальными трудностями при переходе к высоким энергиям. Все расчеты в этой теории делаются в первом порядке по теории возмущений. При высоких энергиях сечение слабого взаимодействия растет (см. (18.83)) и при $E \gtrsim 100$ ГэВ в системе центра масс становится необходимым учет более высоких порядков. При этом появляются расходимости, которые не удастся обойти, как в квантовой электродинамике, с помощью перенормировок. Преодоление данной трудности и построение перенормируемой теории слабых взаимодействий было сделано С. Вайнбергом и А. Саламом в 1967 г. Их теория объединила электромагнитные и слабые взаимодействия и потому называется электрослабой.

В теории УСВ рассматривается четырехфермионное точечное взаимодействие, для которого перенормируемость отсутствует. По аналогии с электродинамикой было предположено, что носителем слабого взаимодействия является векторный бозон W , который в силу малого радиуса слабого взаимодействия должен быть массивным с $M_W > 10$ ГэВ [172]. Однако теории взаимодействия с массивными бозонами также являются перенормируемыми.

Для преодоления этой трудности было предположено, что векторные бозоны – носители взаимодействия, изначально являются безмассовыми. Та видимая масса, которой они должны сейчас обладать, приобретена ими в результате спонтанного нарушения симметрии при взаимодействии поля векторных бозонов с существующим независимо скалярным полем φ . Потенциал скалярного поля симметричен, но имеет минимумы при ненуле-

* Используется (18.60a) для суммы вкладов от Z протонов и $N = A - Z$ нейтронов.

вых значениях $\varphi = \pm \varphi_0$. Симметрия спонтанно нарушается, когда поле переходит в один из минимумов с ненулевым вакуумным средним $\varphi = \varphi_0$. Член взаимодействия бозонного векторного поля D_i с полем φ , имеющий вид $d\varphi D_i D_i$ (d – константа взаимодействия), вблизи $\varphi = \varphi_0$ ведет себя так, как будто бозоны обладают массой m_D , т.е. $m_D^2 = \frac{1}{2} d\varphi_0$. Эта масса интер-

претируется, как масса покоя бозонов D_i . Такой механизм спонтанного нарушения симметрии и приобретения массы был предложен П. Хиггсом в 1964 г. Если масса приобретается механизмом Хиггса, то становится возможным построение перенормируемой теории с тяжелыми бозонами на основе взаимодействий, обладающих локальной калибровочной инвариантностью и рассмотренных Ц. Янгом и Р. Миллсом в 1954 г. Данный тип взаимодействия и рассматривается в теории Вайнберга–Салама. Теми же свойствами обладает квантовая хромодинамика – создаваемая сейчас теория сильных взаимодействий, а также различные варианты единых теорий, объединяющих три или четыре (включая гравитацию) взаимодействия. Помимо векторных бозонов, массу при спонтанном нарушении симметрии приобретают также скалярные бозоны хиггсовского поля.

Условие калибровочной инвариантности, связанное с необходимостью перенормируемости теории, требует наличия четырех промежуточных бозонов, т.е. помимо фотона, W^\pm -бозонов необходимо предположить существование нейтрального бозона Z , который будет ответственным за слабые нейтральные токи.

Рассмотрим, как строится лагранжиан электрослабой теории [86]. Помимо обычного пространства, вводится слабое изоспиновое пространство, в котором матрицы $\vec{\tau}$, тождественно равные матрицам Паули $\vec{\sigma}$ из (18.36), являются матрицами вращений в изоспиновом пространстве. Вместо спинов ν_e и e рассматривается изотопический дублет

$$L = \frac{1 + \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \quad (18.91)$$

и изотопический синглет *)

$$R = \frac{1 - \gamma_5}{2} e, \quad (18.92)$$

изотопические компоненты которых взаимодействуют с матрицами $\vec{\tau}$ как обычные спиноры и скаляры с матрицами Паули $\vec{\sigma}$. Слабый ток j_I и чисто векторный электромагнитный ток j_{em} выражаются через $L, R, \vec{\tau}$ в виде

$$j_I^- = \bar{e} \gamma_i (1 + \gamma_5) \nu_e = 2\bar{L} \gamma_i \tau_- L, \\ j_I^+ = \bar{\nu}_e \gamma_i (1 + \gamma_5) e = 2\bar{L} \gamma_i \tau_+ L, \quad (18.93)$$

$$j_{em} = \bar{e} \gamma_i e = \frac{1}{2} (\bar{L} \gamma_i L - \bar{L} \gamma_i \tau_3 L) + \bar{R} \gamma_i R.$$

Здесь

$$\bar{L} = \frac{1}{2} (\bar{\nu}_e \bar{e}) (1 - \gamma_5), \quad \bar{R} = \frac{1}{2} \bar{e} (1 + \gamma_5) \quad (18.94)$$

*) В этом разделе e и ν_e означают соответствующие биспинорные волновые функции и используется система единиц $\hbar = c = 1$.

означают величины, дираковски сопряженные относительно обычных спиноров аналогично (18.18), матрицы τ_{\pm} равны

$$2\tau_{-} = \tau_1 - i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2\tau_{+} = \tau_1 + i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18.95)$$

Компоненты токов в (18.93) объединяются в изовектор $\bar{L} \gamma_i \vec{\tau} L$

и

$$\text{изоскаляр } \frac{1}{2} (\bar{L} \gamma_i L) + \bar{R} \gamma_i R. \quad (18.96)$$

Четыре векторных бозона также образуют в изоспиновом пространстве изовектор \vec{C}_i и изоскаляр B_i , где i – векторный индекс. Лагранжиан взаимодействия лептонов с векторными бозонами, инвариантный относительно вращений в изоспиновом пространстве, имеет вид (калибровочно инвариантный)*)

$$\mathcal{L}_1 = \frac{g}{2} \bar{L} \gamma_i \vec{\tau} L \vec{C}_i + g' \left(\frac{1}{2} \bar{L} \gamma_i L + \bar{R} \gamma_i R \right) B_i, \quad (18.97)$$

где g и g' – независимые константы связи. В обычной записи (без изопространства) \mathcal{L}_1 должен содержать члены типа $j_{l,i}^{\pm} W_{i}^{\pm}, j_{l,i}^n Z_i$ и $j_{em,i} A_i$, где A_i – вектор электромагнитного поля (фотон). Из сопоставления (18.93) и (18.97) видно, что W^{\pm}, Z и A_i представляют собой следующие линейные комбинации \vec{C}_i и B_i :

$$W_i^{\mp} = \frac{1}{\sqrt{2}} (C_i^{(1)} \pm i C_i^{(2)}). \quad (18.98)$$

$$C_i^{(3)} = \cos \theta_W Z_i - \sin \theta_W A_i, \quad B_i = \sin \theta_W Z_i + \cos \theta_W A_i.$$

Учтя (18.93) и (18.98) в (18.97), получим \mathcal{L}_1 в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & \frac{g}{2\sqrt{2}} (j_{l,i}^{-} W_i^{-} + j_{l,i}^{+} W_i^{+}) + \\ & + \left[\cos \theta_W \frac{g}{2} \bar{L} \gamma_i \tau_3 L + \sin \theta_W g' \left(\frac{1}{2} \bar{L} \gamma_i L + \bar{R} \gamma_i R \right) \right] Z_i + \\ & + \left[\cos \theta_W g' \left(\frac{1}{2} \bar{L} \gamma_i L + \bar{R} \gamma_i R \right) - \sin \theta_W \frac{g}{2} \bar{L} \gamma_i \tau_3 L \right] A_i. \end{aligned} \quad (18.99)$$

Для того чтобы коэффициент при A_i был электромагнитным током j_{em} из (18.93) и входил в лагранжиан с константой связи e (заряд электрона), нужно, чтобы

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e \sqrt{4\pi}. \quad (18.100)$$

* В теории возмущений вероятности слабых распадов и сечения слабых процессов определяются матричным элементом перехода от одного из слагаемых лагранжиана [144].

С учетом (18.100) коэффициент перед Z_i , пропорциональный слабым нейтральным токам, примет вид

$$\frac{g}{4 \cos \theta_W} [\bar{\nu} \gamma_i (1 + \gamma_5) \nu - \bar{e} \gamma_i (1 - 4 \sin^2 \theta_W + \gamma_5) e]. \quad (18.101)$$

Очевидно, что из (18.101) следует структура лептонных нейтральных токов, приведенная в (18.78).

Для построения калибровочно инвариантного лагранжиана хиггсовского поля его волновая функция φ должна представлять собой скалярный изодублет, одна компонента которого может быть взята нулем:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\varphi}^0 \end{pmatrix}. \quad (18.102)$$

Простейший потенциал $V(\varphi)$, приводящий к спонтанному нарушению симметрии, и соответствующий вклад в лагранжиан имеют вид

$$\mathcal{L}_2 = -V(\varphi) = \mu^2 |\varphi|^2 - h |\varphi|^4, \quad |\varphi|^2 = |\varphi^+|^2 + |\varphi^0|^2. \quad (18.103)$$

Минимум потенциала находится в точке

$$|\varphi|_{\min} = \lambda \sqrt{2} = \sqrt{\mu^2 / 2h}. \quad (18.104)$$

Представив

$$\tilde{\varphi}^0 = \lambda + \chi, \quad (18.105)$$

получаем \mathcal{L}_2 , опуская постоянные члены, в виде

$$\mathcal{L}_2 = -h\lambda^2 \chi^2 - h\lambda \chi^3 - \frac{h}{4} \chi^4. \quad (18.106)$$

Для массивных скаляров вклад массового члена в лагранжиан равен $-m^2 \chi^2 / 2$. Сопоставляя это с (18.106), получаем, что в результате спонтанного нарушения симметрии частицы хиггсовского поля приобретают массу

$$m_\chi = \lambda \sqrt{2h}. \quad (18.107)$$

Взаимодействию хиггсовского поля с векторными бозонами отвечает лагранжиан \mathcal{L}_3 , который в калибровочно инвариантной форме имеет вид

$$\mathcal{L}_3 = \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - i \frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{C}_i + i \frac{g'}{2} B_i \right) \varphi \right|^2 \quad (18.108)$$

Учтя здесь (18.98), (18.102)–(18.105), получаем, что в \mathcal{L}_3 отсутствует фотон A_i :

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{g^2}{4} \left(W_i^\dagger W_i + \frac{1}{2 \cos^2 \theta_W} Z_i Z_i \right) (\lambda^2 + 2\lambda\chi + \chi^2). \quad (18.109)$$

Для векторных массивных изосинглета Z_i и изодублета W_i^\pm вклад массовых членов в лагранжиан равен $\frac{1}{2} m_Z^2 Z_i Z_i + m_W^2 W_i^\dagger W_i$. Сопоставляя с (18.109), получаем, что эффективные массы бозонов равны

$$m_W = \frac{g\lambda}{2}, \quad m_Z = \frac{g\lambda}{2 \cos \theta_W} = \frac{m_W}{\cos \theta_W}. \quad (18.110)$$

Для того чтобы масса электрона также приобреталась из-за спонтанного нарушения симметрии, в лагранжиан вводится инвариантный член*)

$$\mathcal{L}_4 = \frac{f}{\sqrt{2}} (\bar{R} \varphi^\dagger L + \bar{L} \varphi R), \quad (18.111)$$

который, с учетом (18.91) – (18.94), (18.102), принимает вид

$$\mathcal{L}_4 = \frac{f\lambda}{2} \left(1 + \frac{\chi}{\lambda}\right) \bar{e} e. \quad (18.112)$$

Массовый член электрона, как компонента спинорного изодублета в лагранжиане равен $m_e \bar{e} e$, что из сопоставления с (18.112) дает

$$m_e = \frac{f\lambda}{2}. \quad (18.113)$$

При малых энергиях $\epsilon \ll m_W$ лагранжиан взаимодействия (18.99) может привести к виду теории УСВ [86]. При этом константа слабого взаимодействия выражается через константы лагранжиана (18.99) в виде

$$\frac{G_W}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2} \quad (18.114)$$

с учетом (18.100) и (18.110) имеем

$$\frac{G_W}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\lambda^2} = \frac{4\pi e^2}{8m_W^2 \sin^2 \theta_W}. \quad (18.115)$$

Из (18.115) и (18.110) с учетом (18.79) следуют оценки массы

$$m_W = \left(\frac{4\pi e^2}{4\sqrt{2} G_W \sin^2 \theta_W} \right)^{1/2} \approx 78,8 \text{ ГэВ},$$

$$m_Z = \left(\frac{4\pi e^2}{4\sqrt{2} G_W \sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W} \right)^{1/2} \approx 89,5 \text{ ГэВ}. \quad (18.116)$$

Фотоны A_1 в силу (18.109) и нейтрино в силу (18.102) в данном варианте теории оказываются безмассовыми, но масса нейтрино может быть приобретена, если в теорию добавить правый нейтринный синглет $R_\nu = \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu$

аналогично (18.92), и лагранжиан его взаимодействия с хиггсовским полем (18.102) аналогично (18.111) (см. [172]). Полный лагранжиан электро-слабых взаимодействий лептонов с учетом (18.97), (18.103), (18.108), (18.111) или в другой записи (18.99), (18.106), (18.109), (18.112) имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0^{(b)} + \sum_l (\mathcal{L}_0^{(l)} + \mathcal{L}_1^{(l)} + \mathcal{L}_2^{(l)} + \mathcal{L}_3^{(l)} + \mathcal{L}_4^{(l)}), \quad (18.117)$$

*) Здесь † означает эрмитовски сопряженный дублет в пространстве слабого изоспина.

где $\mathcal{L}_0^{(b)}$ соответствует свободным векторным бозонам [86]

$$\mathcal{L}_0^{(b)} = \frac{1}{4} \vec{C}_{ik} \vec{C}_{ik} + \frac{1}{4} B_{ik} B_{ik},$$

$$\vec{C}_{ik} = \frac{\partial \vec{C}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \vec{C}_k}{\partial x_i} + g [\vec{C}_i \times \vec{C}_k],$$

$$\vec{B}_{ik} = \frac{\partial B_i}{\partial x_k} - \frac{\partial B_k}{\partial x_i},$$
(18.118)

$\mathcal{L}_0^{(l)}$ — свободным лептоном [86]

$$\mathcal{L}_0^{(l)} = i\bar{R} \gamma_i \frac{\partial R}{\partial x_i} + i\bar{L} \gamma_i \frac{\partial L}{\partial x_i}.$$
(18.119)

Суммирование в (18.117) осуществляется по трем сортам лептонов.

Слабое взаимодействие с адронами включается в теорию Вайнберга—Салама через кварки. Шесть кварков разделяются на три левых дублета,

например $\frac{1+\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$, типа (18.91) и каждому кварку соответствует правый синглет типа (18.92), например $\frac{1-\gamma_5}{2} u$ и $\frac{1-\gamma_5}{2} d$, так как все

кварки являются заряженными и массивными. Лагранжиан взаимодействия \mathcal{L}_6 слабого кваркового тока с векторными бозонами \vec{C}_i и B_i строится аналогично \mathcal{L}_1 из (18.99) инвариантным в изотопическом пространстве и также разделяется на заряженный и нейтральный слабые токи и электромагнитный ток. Усложнение по сравнению с лептонными токами состоит в том, что нужно учесть возможность слабых переходов между кварками не только внутри каждого дублета, но и между дублетами. Это достигается введением двух углов смешивания, первый из которых, определяющий переходы с изменением странности, называется углом Кабибо (см. конец п. б). Введение смешивания не нарушает перенормируемости теории и не вносит принципиальных трудностей. Смешивание, приводящее к превращению различных типов нейтрино друг в друга, также может быть введено в теорию [544а]. Структура кварковых и адронных слабых нейтральных токов (18.78) и (18.80) определяется структурой лагранжиана \mathcal{L}_6 , аналогично лагранжиану \mathcal{L}_1 для лептонов.

Требования калибровочной инвариантности, накладываемые на лагранжиан, в сочетании с экспериментальными ограничениями привели к предсказанию в 1970 г. существования четвертого кварка, который был открыт в 1974 г., и шестого кварка, который не наблюдался до сих пор.

Отметим, что для условий, реализующихся в звездах с $\epsilon \leq 100$ МэВ дополнительный вклад теории Вайнберга—Салама, по сравнению с теорией УСВ состоит в установлении существования и вида нейтральных токов, играющих существенную роль на поздних стадиях эволюции и, особенно, при взрывах сверхновых.

Задача 1. Доказать, что V_i из (18.19) является вектором.

Решение. Согласно [17, 230], преобразование Лоренца для дираковски сопряженного спинора $\bar{\psi}$ из (18.18) есть

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi} S^{-1}.$$

Тогда преобразование V_i с учетом (18.11), (18.14) имеет вид

$$\begin{aligned} V'_i &= (\bar{\psi} \gamma_i \psi)' = \bar{\psi} S^{-1} \gamma_i S \psi = \bar{\psi} L_{ik} \gamma_k \psi = \\ &= L_{ik} \bar{\psi} \gamma_k \psi = L_{ik} V_k. \end{aligned}$$

Таким образом матрица преобразований V_i совпадает с лоренцевской для вектора (18.12), что доказывает его векторную природу.

Задача 2. Найти сечение захвата стабильным ядром (A, Z) электрона с энергией ϵ_e , считая $(Ft_{1/2})_{Z-1}$ известным, а переход разрешенным.

Решение. Вероятность распада ядра $(A, Z-1)$, согласно (18.61) равна

$$\begin{aligned} W_{Z-1}^{\text{расп}} &= \frac{2\pi}{\hbar} \int |M|_{Z-1}^2 \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} \delta(\epsilon_e + \epsilon_\nu - \Delta_{Z-1, Z}) p_e^2 dp_e p_\nu^2 dp_\nu = \\ &= \frac{|M|_{Z-1}^2}{2\pi^3 \hbar^7} m_e^5 c^4 F_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $|M|_{Z-1}^2 = \text{const}$, F_0 определено в (18.63). Вероятность захвата ядром (A, Z) электрона $W_Z^{\text{захв}}$ с энергией ϵ_e при концентрации n_e по аналогии с (1) равна

$$\begin{aligned} W_Z^{\text{захв}} &= \frac{2\pi}{\hbar} n_e \int |M|_Z^2 \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \delta(\epsilon_e - \epsilon_\nu - \Delta_{Z-1, Z}) p_\nu^2 dp_\nu = \\ &= \frac{n_e |M|_Z^2}{\pi \hbar^4 c^3} (\epsilon_e - \Delta_{Z-1, Z})^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $|M|_Z^2 = \frac{1}{2} |M|_{Z-1}^2 g_{Z-1}/g_Z$ ввиду усреднения по спинам электронов в (2) вместо суммирования в (1) и возможной разницы статистических весов начального и конечного ядра. Находя $(Ft_{1/2})_{Z-1}$ из (1) с учетом (18.64) и подставляя в (2), получаем

$$W_Z^{\text{захв}} = \frac{g_{Z-1}}{g_Z} \pi^2 \left(\frac{\hbar}{m_e c} \right)^3 \frac{n_e \ln 2}{(Ft_{1/2})_{Z-1}} \frac{(\epsilon_e - \Delta_{Z-1, Z})^2}{(m_e c^2)^2}. \quad (3)$$

Сечение захвата электрона ядром, согласно (18.82) с учетом (18.62) равно

$$\begin{aligned} \sigma_e^{\text{захв}} &= \frac{W_Z^{\text{захв}}}{n_e v_e} = \frac{g_{Z-1}}{g_Z} \frac{\pi^2}{c} \left(\frac{\hbar}{m_e c} \right)^3 \frac{\ln 2}{(Ft_{1/2})_{Z-1}} \frac{(\epsilon_e - \Delta_{Z-1, Z})^2}{(m_e c^2)^2 \sqrt{1 - (m_e c^2/\epsilon_e)^2}} = \\ &= \frac{g_{Z-1}}{g_Z} \frac{1,313 \cdot 10^{-41}}{(Ft_{1/2})_{Z-1}} \frac{(u_e - \delta)^2}{\sqrt{1 - u_e^{-2}}} \quad (\text{см}^2), \end{aligned} \quad (4)$$

$$u_e = \epsilon_e/m_e c^2, \quad \delta = \Delta_{Z-1, Z}/m_e c^2, \quad u_e > \delta > 1.$$

При $0 \leq \delta \leq 1$ ядро $(A, Z - 1)$ стабильно относительно излучения e^- , но ядро (A, Z) может захватить покоящийся электрон (К-захват) [212]. Для этого случая (3), (4) неприменимы, так как бета-распад ядра $(A, Z - 1)$ отсутствует.

Задача 3. Найти вероятность захвата электрона ядром с атомной К-орбиты.

Решение. Размер К-оболочки атома равен $\frac{a_0}{Z} = \frac{\hbar^2}{m_e e^2 Z}$ (см. § 4, п. ж), а средняя плотность электронов внутри заполненной К-оболочки с двумя электронами есть $\bar{n}_e = \frac{3}{2\pi} \frac{Z^3}{a_0^3}$. При расчете вероятности К-захвата нужно учесть $n_e(0) = \frac{4}{3} \bar{n}_e = \frac{2}{\pi} \frac{Z^3}{a_0^3}$ [84]. Используя это в (2) задачи 2 получим

$$W_Z^K = \frac{2 |M|_Z^2}{\pi^2} (\alpha Z)^3 \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 \frac{m_e^2 c}{\hbar^4} (u_e - \delta)^2 =$$

$$= 2 \frac{|M|_Z^2}{|M|_n^2} \frac{G_W^2 (1 + 3g_A^2)}{\pi^2} (\alpha Z)^3 \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 \frac{m_e^2 c}{\hbar^4} (u_e - \delta)^2 (c^{-1}),$$

$\delta < u_e \lesssim 1$ для связанного электрона.

Задача 4. Найти вероятность захвата электрона ядром (A, Z) в вырожденном веществе с плотностью ρ .

Решение (Франк-Каменецкий, 1962 [216]). В вырожденном веществе при $f_e = 1$ при $\epsilon_e < \epsilon_{Fe} + m_e c^2$ (см. (2.2)) вероятность захвата электрона определяется аналогично (2) задачи 2 формулой

$$W_Z^B = \frac{g_{Z-1}}{g_Z} \frac{2\pi}{\hbar} \int |M|_{Z-1}^2 \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} \delta(\epsilon_e - \epsilon_\nu - \Delta_{Z-1, Z}) p_\nu^2 dp_\nu p_e^2 dp_e =$$

$$= \frac{g_{Z-1}}{g_Z} \frac{|M|_{Z-1}^2}{2\pi^3 \hbar^7} m_e^5 c^4 [F_0(u_{Fe}) - F_0(\delta)] =$$

$$= \frac{g_{Z-1}}{g_Z} \ln 2 \frac{F_0(u_{Fe}) - F_0(\delta)}{(Ft_{1/2})_{Z-1}}, \quad u_{Fe} = (\epsilon_{Fe}/m_e c^2) + 1. \quad (1)$$

Здесь $F_0(u)$ определено в (18.68). При $u_{Fe} \gg \delta$ приближенно получаем

$$W_Z \approx \frac{g_{Z-1}}{g_Z} \frac{\ln 2}{(Ft_{1/2})_{Z-1}} (u_{Fe}^5 - \delta^5). \quad (2)$$

Задача 5. Найти полную вероятность захвата вырожденных электронов ядром в газовой модели с учетом возбужденных уровней конечного ядра.

Решение [54]. Ядро представляется в виде однородной сферы радиуса

$$R = \frac{e^2}{2 m_e c^2} A^{1/3} = 1,4 A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (1)$$

Граничные значения импульса Ферми протонов p_0 и нейтронов q_0 в ядре равны

$$p_0 = 3 \left(\frac{\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{\hbar c}{e^2} \left(\frac{2Z}{A} \right)^{1/3} m_e c \approx 417 \left(\frac{2Z}{A} \right)^{1/3} m_e c, \quad *$$

$$q_0 \approx 417 \left(\frac{2N}{A} \right)^{1/3} m_e c, \quad N = A - Z. \quad (2)$$

Вероятность захвата электрона в вырожденной плазме, после интегрирования по объему ядра V_n и фазовому объему dN_n равна

$$W_e = \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2 V_n \int dN_\nu dN_p dN_e \delta(E_e + E_p - E_\nu - E_n),$$

$$E_n = E_p + \frac{p_{e\nu}^2}{2m} + \frac{p_p p_{e\nu} z_p}{m}, \quad p_{e\nu} = |\vec{p}_e - \vec{p}_\nu|, \quad (3)$$

$$z_p = \cos(\vec{p}_{e\nu}, \vec{p}_p), \quad V_n = \frac{3Z}{8\pi} \left(\frac{2\pi\hbar}{p_0} \right)^3 = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Здесь $m \approx m_p/2$ – эффективная масса нуклона в ядре, V_n – объем ядра, $|M|^2 = \text{const} < |M|_n^2$ из (18.60) – средний квадрат матричного элемента (рп) – перехода, просуммированный по спинам e, ν и p и усредненный по спидам p . Учитывая

$$dN_e = \frac{d^3 p_e}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2\pi p_e^2 dp_e dz_e}{(2\pi\hbar)^3}, \quad dN_\nu = \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2\pi p_\nu^2 dp_\nu dz_\nu}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (4)$$

$$dN_p = 2 \frac{d^3 p_p}{(2\pi\hbar)^2} = \frac{4\pi p_p^2 dp_p dz_p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad dN_n = \frac{d^3 p_n}{(2\pi\hbar)^3}$$

и интегрируя по азимутальным углам, получаем

$$W_e = \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2 2 \frac{(2\pi)^3}{(2\pi\hbar)^9} V_n \int p_e^2 dp_e dz_e p_\nu^2 dp_\nu dz_\nu p_p^2 \times$$

$$\times dp_p dz_p \delta\left(E_e - E_\nu - \frac{p_{e\nu}^2}{2m} - \frac{p_p p_{e\nu} z_p}{m}\right). \quad (5)$$

Найдем пределы интегрирования в (5). Очевидно, что

$$p_e \leq p_{Fe}, \quad p_p \leq p_0, \quad p_n \geq q_0. \quad (6)$$

Приближенно примем нуклоны нерелятивистскими, а электроны – ультра-релятивистскими. Для нахождения нижнего предела интегрирования

по dp_p запишем закон сохранения энергии в четырехфермионном процессе в виде

$$p_p^2 = p_n^2 - 2mc(p_e - p_\nu). \quad (7)$$

В силу условия $p_n > q_0$ получаем

$$p_p^2 > q_0^2 - 2mc(p_e - p_\nu) = p_1^2. \quad (8)$$

С другой стороны, из δ -функции в (5), связанной с законом сохранения энергии, следует

$$p_p = \frac{mc(p_e - p_\nu)}{p_{e\nu} z_p} - \frac{1}{2} \frac{p_{e\nu}}{z_p}. \quad (9)$$

Очевидно, что минимум p_p достигается при $z_p = 1$,

$$p_p > \frac{mc(p_e - p_\nu)}{p_{e\nu}} - \frac{p_{e\nu}}{2} = p_2. \quad (10)$$

При интегрировании по dp_p выбирается $\max(p_1, p_2)$. Интегрируя в (5) по $dz_p dp_p$ с учетом полученных пределов, имеем

$$W_e = \frac{4\pi}{\hbar} |M|^2 \frac{(2\pi)^3}{(2\pi\hbar)^9} V_n \int p_e^2 dp_e dz_e p_\nu^2 dp_\nu dz_\nu \frac{m}{2p_{e\nu}} \times$$

$$\times \begin{cases} (p_0^2 - p_1^2) & \text{при } p_1 > p_2 \\ (p_0^2 - p_2^2) & \text{при } p_1 < p_2 \end{cases} \quad (11)$$

Найдем теперь пределы интегрирования по $dz_\nu dp_\nu dp_e$. Из (8), (10) следуют условия

$$p_1 < p_0 \quad \text{при } p_\nu < p_{\nu 2}, \quad (12)$$

$$p_2 < p_0 \quad \text{при } z_\nu < z_{\nu 0}, \quad (13)$$

где

$$z_\nu = \cos(\widehat{p_e p_\nu}),$$

$$p_{\nu 2} = p_e - (q_0^2 - p_0^2)/2mc,$$

$$z_{\nu 0} = (p_e^2 + p_\nu^2 - x_0^2)/2p_e p_\nu, \quad (14)$$

$$x_0 = \sqrt{p_0^2 + 2mc(p_e - p_\nu)} - p_0.$$

Найдем условия использования верхнего выражения в (11):

$$p_1 > p_2 \quad \text{при } z_\nu < z_{\nu 1}, \quad (15)$$

где

$$z_{\nu 1} = (p_0^2 + p_\nu^2 - x_1^2)/2p_e p_\nu,$$

$$x_1 = q_0 - \sqrt{q_0^2 - 2mc(p_e - p_\nu)}. \quad (16)$$

Из (13), (15) следует неравенство

$$z_{\nu 1} < z_{\nu 0} \quad \text{при} \quad p_{\nu} < p_{\nu 2}, \quad (17)$$

выполняющееся при том же условии, что и (12). Очевидное условие $z_{\nu 1} > -1$ дает

$$z_{\nu 1} > -1 \quad \text{при} \quad p_{\nu} > p_{\nu 1}, \quad (18)$$

где

$$p_{\nu 1} = q_0 - p_e + mc - \sqrt{(q_0 + mc)^2 - 4mcp_e}. \quad (19)$$

Сопоставление (12), (17), (18) дает

$$p_{\nu 1} < p_{\nu 2} \quad \text{при} \quad p_e < p_{e1}, \quad (20)$$

где

$$p_{e1} = \frac{q_0 + p_0}{2} + \frac{q_0^2 - p_0^2}{4mc}. \quad (21)$$

Условие $z_{\nu 0} > -1$ дает

$$z_{\nu 0} > -1 \quad \text{при} \quad p_{\nu} > p_{\nu 0}, \quad (22)$$

где

$$p_{\nu 0} = [(mc + p_0)^2 + 4mcp_e]^{1/2} - p_e - p_0 - mc. \quad (23)$$

Из (17), (18), (22) следует

$$p_{\nu 1} > p_{\nu 0} \quad \text{при} \quad p_e > p_{e0}, \quad (24)$$

где

$$p_{e0} = \frac{q_0 - p_0}{2} + \frac{q_0^2 - p_0^2}{4mc}. \quad (25)$$

Верхнее соотношение (11) дает вклад в W_e при следующих пределах интегрирования:

$$p_{e0} < p_e < p_{e1}, \quad p_{\nu 1} < p_{\nu} < p_{\nu 2}, \quad -1 < z_{\nu} < z_{\nu 1} \quad (26)$$

Использование нижнего соотношения (11) требует

$$p_1 < p_2 \quad \text{при} \quad z_{\nu} > z_{\nu 1} \quad (27)$$

наряду с неравенствами (12) и (13). Следует различать два случая:

$$z_{\nu 1} > -1 \quad \text{при} \quad p_{\nu} > p_{\nu 1}, \quad \text{тогда} \quad z_{\nu} > z_{\nu 1} \quad (28)$$

$$\text{и} \quad z_{\nu 1} < -1 \quad \text{при} \quad p_{\nu} < p_{\nu 1}, \quad \text{тогда} \quad z_{\nu} > -1. \quad (29)$$

Из (28) и (13) следуют условия (17) и (20), остается справедливым также условие (24). Тогда при выполнении (28) используются следующие пределы интегрирования:

$$p_{e0} < p_e < p_{e1}, \quad p_{\nu 1} < p_{\nu} < p_{\nu 2}, \quad z_{\nu 1} < z_{\nu} < z_{\nu 0}. \quad (30)$$

Условие (29) при выполнении (12) приводит к двум вариантам:

$$p_{\nu 1} < p_{\nu 2} \quad \text{при} \quad p_e < p_{e1}, \quad \text{тогда} \quad p_{\nu} < p_{\nu 1}; \quad (31)$$

$$p_{\nu 1} > p_{\nu 2} \quad \text{при} \quad p_e > p_{e1}, \quad \text{тогда} \quad p_{\nu} < p_{\nu 2}. \quad (32)$$

При условии (31) справедливы неравенства (137), (22), (24), (29), из которых следуют пределы интегрирования

$$p_{e0} < p_e < p_{e1}, \quad p_{\nu 0} < p_\nu < p_{\nu 1}, \quad -1 < z_\nu < z_{\nu 0}. \quad (33)$$

Из условия (32) совместно с (22) следует неравенство

$$p_{\nu 2} > p_{\nu 0} \quad \text{при} \quad p_e > p_{e1}, \quad (34)$$

совпадающее с условием $p_{\nu 2} < p_{\nu 1}$. Условия (29), (32), (13), (22), (34), (6) приводят к следующим пределам интегрирования:

$$p_{e1} < p_e < p_{Fe}, \quad p_{\nu 0} < p_\nu < p_{\nu 2}, \quad -1 < z_\nu < z_{\nu 0}. \quad (35)$$

Очевидно, что $-1 < z_e < 1$. При $p_{Fe} > p_{e1}$ вероятность захвата (11) состоит из четырех интегралов: одного с верхним членом в (11) и пределами интегрирования (26) и трех с нижним членом в (11) и пределами интегрирования (30), (33), (35). При $p_{Fe} < p_{e1}$ интеграл с (35) выпадает, а в (26), (30), (33) нужно взять $p_e < p_{Fe}$ вместо $p_e < p_{e1}$. В общем виде W_e приведено в [54]. Для практически интересного случая

$$p_{\nu e}^2 \ll mc(p_e - p_\nu) \ll p_0^2, \quad q_0^2 \quad (36)$$

получаем

$$W_e = \frac{4\pi}{\hbar} \frac{(2\pi)^3}{(2\pi\hbar)^9} |M|^2 V_n m^2 c \frac{8mcq_0^2}{3(mc + q_0)^3} p_{K,e}^4 \varphi_e, \quad p_{K,e} = p_{Fe} - p_{e0}, \quad (37)$$

$$\varphi_e = \frac{1}{6} p_{K,e}^2 + \frac{1}{5} p_{e0} p_{K,e} \left(2 - \frac{q_0}{mc}\right) + \frac{1}{4} p_{e0}^2 \left(1 - \frac{q_0}{mc}\right),$$

$$p_{e0} = \frac{q_0^2 - p_0^2}{4} \left(\frac{1}{mc} + \frac{1}{q_0}\right).$$

Выражая $|M|^2$ через вероятность захвата мюона из K -оболочки, вычисленную в той же газовой модели ядра, получаем

$$W_e = W_\mu \frac{1}{2\pi} \left(\frac{137}{Z_e m_\mu c}\right)^3 \frac{Z}{Z_e} \frac{8mcq_0^2}{3(mc + q_0)^3} \frac{p_{K,e}^4}{p_{K,\mu}} \frac{\varphi_e}{\varphi_\mu}, \quad (38)$$

где

$$Z_e = Z [1 + (Z/42)^{1,47}]^{-1/1,47},$$

$$\varphi_\mu = \frac{1}{3} p_{K,\mu}^2 + p_{\nu 1\mu} p_{K,\mu} + \frac{1}{2} (p_0^2 - m^2 c^2 + m m_\mu c^2) \frac{p_{\nu 1\mu}^2 - p_{\nu 0\mu}^2}{m c p_{K,\mu}} +$$

$$+ 2m m_\mu c^2 \frac{p_{\nu 1\mu} - p_{\nu 0\mu}}{p_{K,\mu}} - \frac{p_{\nu 1\mu}^3 - p_{\nu 0\mu}^3}{3 p_{K,\mu}} - \frac{p_{\nu 1\mu}^4 - p_{\nu 0\mu}^4}{16 m c p_{K,\mu}} -$$

$$- \frac{m m_\mu^2 c^3}{p_{K,\mu}} \ln \frac{p_{\nu 1\mu}}{p_{\nu 0\mu}}, \quad (39)$$

$$p_{K,\mu} = m_\mu c - (q_0^2 - p_0^2)/2mc - p_{\nu 1\mu},$$

$$p_{\nu 1\mu} = mc + q_0 - [(mc + q_0)^2 - 2m m_\mu c^2]^{1/2},$$

$$p_{\nu 0\mu} = -mc - p_0 + [(mc + p_0)^2 + 2m m_\mu c^2]^{1/2}.$$

Из (37) следует, что учет возбужденных состояний повышает степень зависимости W_e от p_{Fe} : $\sim p_{Fe}^6$ в (37) вместо $\sim p_{Fe}^5$ в задаче 4, при $p_{Fe} \gg \gg (\delta m_{e\nu}, p_{e0})$. Экспериментальные величины W_μ для различных ядер даны в [74]. Сравнение с расчетами по более сложной оболочечной модели ядра [73] показывает удовлетворительную точность формулы (38).

§ 19. Нейтринное охлаждение звезд

На всех стадиях эволюции вплоть до образования плотного ядра при коллапсе, нейтрино свободно уходят из звезды и являются источником охлаждения. Рассмотрим наиболее важные процессы образования нейтрино в звездах.

а) Аннигиляция пар $e^+ e^-$. При высоких температурах и небольших плотностях идет процесс рождения нейтрино при аннигиляции пар

$$e^+ + e^- \rightarrow \nu + \bar{\nu}. \quad (19.1)$$

Сечение реакции (19.1) определяется произведением заряженных токов $(\bar{\nu}^- O_i^L e^-) (\bar{\nu}^+ O_i^L e^+)$ и нейтральных $(\bar{e}^- O_i^{n,e} e^-) (\bar{\nu} O_i^{n,\nu} \nu)$. Здесь O_i^L — левый оператор из (18.20), а $O_i^{n,e}$ и $O_i^{n,\nu}$ приведены в (18.78). Последнее произведение дает вклад в сечение реакции (19.1) ввиду того, что рождение \bar{e}^- эквивалентно уничтожению e^+ , а уничтожение ν — рождению $\bar{\nu}$. Сечение (19.1) за счет заряженных токов рассчитано в [268]. В [336] были учтены нейтральные токи типа $\bar{\nu}_e O_i \nu_e$, а в [496] сделан учет нейтральных токов, связанных со всеми типами нейтрино. Выражение для сечения, полученное в [496], с учетом (18.82) имеет вид

$$\sigma = \frac{G_W^2 c (m_e c / \hbar)^4}{6 \pi v \epsilon \epsilon'} \left\{ \frac{r_+ + r'_+}{2} \left[1 + 3 \frac{p_i p'_i}{m_e^2 c^2} + 2 \frac{(p_i p'_i)^2}{m_e^4 c^4} \right] + 3 \frac{r_- + r'_-}{2} \left(1 + \frac{p_i p'_i}{m_e^2 c^2} \right) \right\} \text{см}^2, \quad (19.2)$$

Здесь $p_i, p'_i, \epsilon, \epsilon'$ — 4-импульсы и энергия электронов и позитронов, соответственно, v — относительная скорость e^+, e^- .

$$r_\pm = \frac{c_V^2 \pm c_A^2}{2}, \quad r'_\pm = n \frac{c_V'^2 \pm c_A'^2}{2},$$

$$c_V = \frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W, \quad c_A = 1/2, \quad (19.3)$$

$$c_V' = -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W, \quad c_A' = -1/2.$$

Величины c_V и c_A соответствуют сумме заряженного и нейтрального токов, связанных с ν_e , а c_V' и c_A' , отражают вклады нейтральных токов других сортов нейтрино, n — число сортов нейтрино, отличных от ν_e , сейчас известно $n = 2$ (см. (18.3)). Для заряженного тока [268] сечение получается из (19.2) при $r_+ = 1, r_- = 0$ и $n = 0$. Скорость потери энергии за счет реакции (19.1) есть

$$Q_{\text{pair}} = \int (\epsilon + \epsilon') \sigma v dn_{e^-} - dn_{e^+}. \quad (19.4)$$