

ГЛАВА 6

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И ЗВЕЗДНОЙ ЭВОЛЮЦИИ
И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

§ 22. Сферически-симметричные звезды

В подавляющем большинстве существующих эволюционных расчетов рассматриваются неврацающие, сферически-симметричные звезды. В рамках этой модели были получены эволюционные треки на диаграмме Герцшпрунга—Рессела $\lg L - \lg T_{ef}$ (см. § 6, п. б), которые хорошо объяснили наблюдательные особенности звезд: главную последовательность, как самую продолжительную стадию жизни звезды, на которой горит водород, превращая в гелий; ветвь гигантов и сверхгигантов, как звезд с плотными горячими ядрами из гелия или углерода и протяженными оболочками, богатыми водородом; белые карлики, как звезды закончившие ядерную эволюцию и излучающие за счет остывания; звезды типа Т Тельца, как молодые сжимающиеся звезды, светящиеся за счет гравитационной энергии при сжатии, и др.

Уравнения звездной эволюции в сферически-симметричном приближении имеют вид [229, 165]

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{Gm}{r^2} \quad \text{уравнение равновесия;} \quad (22.1)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2 \quad \text{уравнение неразрывности;} \quad (22.2)$$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi\rho r^2 \left(\epsilon_n - \epsilon_\nu - \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad \text{уравнение энергии;} \quad (22.3)$$

$$L_r = L_r^{\text{rad}} = -\frac{4acT^3}{3k\rho} 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} \quad \text{уравнение лучистого равновесия,}$$

$$\nabla_{\text{rad}} < \nabla_a + \nabla_\mu \quad (\text{см. (10.11)}) \quad (22.4a)$$

$$L_r = 4\pi r^2 F_{\text{conv}} + L_r^{\text{rad}} =$$

$$= 4\pi r^2 c_p \rho \left[-\frac{Gm}{\rho r^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right]^{1/2} \frac{l^2}{4} (\Delta \nabla T)^{3/2} + L_r^{\text{rad}} \quad \text{уравнение конвекции по теории пути перемешивания;} \quad (22.4б)$$

$$\frac{dT}{dr} = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_{S, \mu} \frac{dP}{dr} - \text{уравнение адиабатической конвекции}; \quad (22.4\text{в})$$

$$\frac{\partial x_H}{\partial t} = -4m_p \left(\frac{\epsilon_{\text{CNO}}}{Q_{\text{CNO}}} + \frac{\epsilon_{\text{pp}}}{Q_{\text{pp}}} \right) - \text{уравнение горения водорода}; \quad (22.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x_\alpha}{\partial t} &= 4m_p \left(\frac{\epsilon_{\text{CNO}}}{Q_{\text{CNO}}} + \frac{\epsilon_{\text{pp}}}{Q_{\text{pp}}} \right) - \\ &- \frac{3m_\alpha \epsilon_{3\alpha}}{Q_{3\alpha}} - m_\alpha \epsilon_{1^2\text{C}\alpha} / Q_{1^2\text{C}\alpha} \\ \frac{\partial x_{1^2\text{C}}}{\partial t} &= \frac{3m_\alpha \epsilon_{3\alpha}}{Q_{3\alpha}} - \frac{m_{1^2\text{C}} \epsilon_{1^2\text{C}\alpha}}{Q_{1^2\text{C}\alpha}} \end{aligned} \right\} - \text{уравнения горения гелия и углерода}; \quad (22.6)$$

$$\epsilon_n = \epsilon_{\text{pp}} + \epsilon_{\text{CNO}} + \epsilon_{3\alpha} + \epsilon_{1^2\text{C}\alpha}$$

Аналогичные уравнения можно записать для других ядерных реакций. Здесь m — масса внутри данного радиуса r , $L_r \equiv L(r)$, ϵ_n и ϵ_ν — скорости ядерного выделения энергии и нейтринных потерь. Два последних члена в (22.3) представляют собой выделение или поглощение тепла при сжатии или расширении звезды (гравитационный источник энергии). Конвективный поток из (22.4б) для смеси идеального полностью ионизованного газа с излучением приведем в (10.20). Выражения для c_p , $(\partial T/\partial P)_S = \frac{T}{P} \gamma_2$ для $\mu = \text{const}$ даны в (1.12), (1.15), (1.20); $\Delta \nabla T$ определено в (10.6).

Уравнения (22.1)–(22.4) служат для расчета структуры каждой эволюционной модели. Уравнения (22.5)–(22.6) нужны для нахождения химического состава при переходе к последующей по времени эволюционной модели. В конвективных областях, где химический состав постоянен из-за перемешивания, вместо (22.6), (22.5) следует использовать уравнения, усредненные по конвективной области с добавлением членов, учитывающих поступление нового вещества при расширении конвективной зоны по массе.

Для смеси идеального газа с излучением при полной ионизации (1.1)–(1.3), (1.7) логарифмические градиенты в (22.4) имеют вид

$$\nabla_{\text{ад}} = \gamma_2 = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_S = \frac{2(4 - 3\beta_g)}{32 - 24\beta_g - 3\beta_g} \quad (\text{см. (1.20)}), \quad (22.7)$$

$$\nabla_\mu = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \mu} \right)_{P, S} \frac{d \ln \mu}{d \ln P} = \frac{\beta_g}{4 - 3\beta_g} \frac{d \ln \mu}{d \ln P} \quad (\text{см. (10.11)}), \quad (22.8)$$

$$\nabla_{\text{рад}} = \frac{d \ln T}{d \ln P} = \frac{\kappa L_r}{16\pi c G m (1 - \beta_g)} \quad (\text{см. (22.1), (22.4а)}). \quad (22.9)$$

Скорости энерговыделения ϵ_{pp} , ϵ_{CNO} , $\epsilon_{3\alpha}$, $\epsilon_{1^2\text{C}\alpha}$ и выходы энергии Q_{pp} , Q_{CNO} , $Q_{3\alpha}$, $Q_{1^2\text{C}\alpha}$ на одну реакцию приведены в (14.4)–(14.6),

(14.12)–(14.14), (14.38)–(14.41). Термодинамические функции вещества $P(\rho, T, x_i)$, $E(\rho, T, x_i)$ даны в гл. 1, вычисление непрозрачности k приведено в § 7, скорости нейтринных потерь даны в § 19.

Эволюционный расчет начинается обычно с однородной модели постоянного химического состава. Если рассматривается стадия эволюции до главной последовательности, то начальное распределение массы берется из расчетов коллапса газовых облаков. Если расчет начинается с главной последовательности, то в качестве начальной рассматривается химически однородная модель, находящаяся в тепловом равновесии без источников гравитационного сжатия. При расчете модели требуется задание граничных условий. В центре, очевидно, имеем

$$L_r = 0, \quad m = 0, \quad \text{при } r = 0. \quad (22.10)$$

Внешнее граничное условие задается на радиусе фотосферы, который отождествляется с радиусом звезды R

$$L = \pi a c R^2 T_{\text{ef}}^4, \quad T = T_{\text{ef}} \quad \text{при } m = M. \quad (22.11)$$

Второе условие на внешней границе следует из приближенного решения уравнения равновесия в области, почти прозрачной для излучения. Для смеси идеального газа с излучением при $L_r = L = \text{const}$ и $m = M$ из (22.1), (22.4а), (6.17) получаем уравнение равновесия в виде

$$\frac{dP_g}{dr} = \frac{GM}{\kappa R^2} \cdot \left(1 - \frac{L}{L_{\text{cr}}}\right), \quad L_{\text{cr}} = \frac{4\pi c GM}{\kappa}, \quad \tau = \int_r^\infty \kappa \rho dr. \quad (22.12)$$

Здесь L_{cr} – критическая эддингтоновская светимость. Из (22.12) видно, что при $L > L_{\text{cr}}$ отсутствует статическое равновесие*). Подставляя приближенное

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_0 P_g \quad (22.13)$$

получаем решение (22.12) в виде

$$P_g = g \frac{\tau_0}{\kappa} \frac{L}{L_{\text{cr}}} \left(\frac{L_{\text{cr}}}{L} \frac{\kappa}{\kappa - \kappa_1} \ln \left(\frac{1 - \frac{L}{L_{\text{cr}}} \frac{\kappa_1}{\kappa}}{1 - \frac{L}{L_{\text{cr}}}} \right) - 1 \right)^{-1}, \quad P = \frac{P_g}{\beta_g}, \quad (22.14)$$

где $g = GM/R^2$, $\tau_0 = 2/3$ (6.21) или $\tau_0 = 0,756$ (6.23). При $L \ll L_{\text{cr}}$ выражение в скобках (22.14) равно $\frac{\kappa + \kappa_1}{2\kappa} \frac{L}{L_{\text{cr}}}$, что приводит к граничному условию

$$P_g = \frac{2g\tau_0}{\kappa + \kappa_1}, \quad P = P_g/\beta_g, \quad (22.15a)$$

полученному в [165]. При $(\kappa - \kappa_1)/\kappa \ll 1 - L/L_{\text{cr}}$ выражение в скобках

*) При $\kappa = \text{const}$.

(22.14) равно $\left(\frac{\kappa + \kappa_1}{2\kappa} - L/L_{\text{cr}}\right) \frac{L/L_{\text{cr}}}{(1 - L/L_{\text{cr}})^2}$, что дает граничное условие

$$P_g = g \frac{\tau_0}{\kappa} \frac{(1 - L/L_{\text{cr}})^2}{\frac{\kappa + \kappa_1}{2\kappa} - L/L_{\text{cr}}}, \quad P = \frac{P_g}{\beta_g}. \quad (22.156)$$

При $\kappa = \kappa_1 = \text{const}$; $\beta = 1$ и $L/L_{\text{cr}} \ll 1$ из (22.15а, б) следует граничное условие $P = g\tau_0/\kappa$, приведенное в [229].

На стадии красных гигантов звезды имеют протяженные оболочки, где нужно учитывать эффекты сферичности. В этом случае граничное условие задается

$$T = T_0, \quad \rho = \rho_0 (\approx 0) \quad \text{при} \quad \tau = 0, \quad (22.16)$$

а при $\tau > 0$ решается уравнение (6.34). При $\tau \geq 2/3$ уравнение (6.34) плавно переходит в уравнение лучистой теплопроводности (22.4а). В [520] вместо (6.33) на внешней границе принималось

$$T_0 = \left(\frac{L}{2\pi a c R^2}\right)^{1/4}, \quad (22.17)$$

аналогично в плоской атмосфере (6.16)–(6.21). Граничное условие для P_g также задается при $\tau = 0$, а при $\tau > 0$ интегрируется уравнение

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{Gm}{\kappa r^2} \left(1 + f \frac{2aT^3 r^{1/2} T_0 R^{1/2}}{3Gm\rho}\right), \quad (22.18)$$

$\rho(\tau = 0)$ задается.

Это уравнение применимо в прозрачных областях $\tau < 2/3$ при выполнении (22.12), (6.34) и учитывает изменение массы $m(\tau)$ при $\tau > 0$. Уравнения (6.34), (22.18) решаются совместно с (22.2) и соотношением для τ из (22.12) при $\tau \leq 2/3$. При $\tau > 2/3$ они совпадают с равновесными уравнениями (22.1)–(22.4). Плотность на внешней границе задается отличной от нуля для удобства расчетов. В [520] принималось $\rho(\tau = 0) = 10^{-12} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Радиус звезды R и светимость L являются собственными числами задачи и определяются в результате построения модели. Учет конвекции по теории пути перемешивания (22.4б) требует решения кубического уравнения для явной записи дифференциального уравнения относительно dT/dr . Это приближение применяется в конвективных оболочках. В конвективных ядрах обычно используется приближение адиабатической конвекции (22.4б). При проведении эволюционных вычислений методом Хеньи (см. ниже) модели оболочек часто рассчитываются заранее для широкого набора L и R вплоть до заданных значений m или τ (см. напр. [241]), что сдвигает внешнюю границу рассчитываемой модели ядра в область более высоких температур и плотностей.

Для решения сферически-симметричных уравнений звездной эволюции используются методы Шварцшильда [229] и Хеньи [194]. В методе Шварцшильда дифференциальные уравнения (22.1)–(22.4) интегрируются из центра и с поверхности навстречу друг другу и из условия сшивки функций находятся параметры модели R и L , а также центральные значения T_c и P_c .

Метод Хеньи основан на замене дифференциальных уравнений разностными и решением полученной алгебраической системы методом итераций. Последний метод легче позволяет автоматизировать эволюционные расчеты на ЭВМ и используется чаще. На критических стадиях эволюции (формирование плотных ядер, горение нескольких слоевых источников) использование метода Хеньи иногда затрудняется из-за малого радиуса сходимости итераций и метод Шварцшильда может стать более эффективным.

а) **Метод Шварцшильда.** Этот метод основан на решении системы дифференциальных уравнений (22.1)–(22.4) стандартными методами при построении каждой эволюционной модели. Интегрирование из центра требует задания, помимо (20.10), центральных значений P_c и T_c . Интегрирование от поверхности внутрь с использованием граничных условий (22.11), (22.15) (или (22.16)), (22.17) для уравнений (6.34), (22.18)) требует задания радиуса R и светимости L . В качестве независимой переменной вместо радиуса r обычно выбирается внутренняя масса m .

Наиболее простая процедура построения модели состояла бы в задании P_c , T_c , проведении пробных интегрирований от центра и нахождения единственных P_c и T_c , которые позволили бы удовлетворить граничным условиям на поверхности. Аналогичное интегрирование от поверхности к центру позволило бы найти R и L при удовлетворении граничных условий в центре. К сожалению, эти простые процедуры неприемлемы вследствие расходимости в центре в уравнении (22.1) и на поверхности в уравнении (22.4) из-за нулевого r и малого T , соответственно. Шварцшильдом была использована процедура нахождения решений после задания пробных значений

$$P_c, T_c, L, R \quad (22.19)$$

с помощью встречных интегрирований до некоторой промежуточной массы m_f . В этой точке требуется непрерывность функций P , T , L и r

$$P_{if} = P_{ef}, \quad T_{if} = T_{ef}, \quad L_{if} = L_{ef}, \quad r_{if} = r_{ef}. \quad (22.20)$$

где индексы i и e относятся к внутренним и внешним величинам соответственно. После шести пробных интегрирований, трех из центра и трех от поверхности до точки сшивки, находятся частные производные от невязок по параметрам

$$\frac{\partial \Delta_q}{\partial P_c}, \quad \frac{\partial \Delta_q}{\partial T_c}, \quad \frac{\partial \Delta_q}{\partial R}, \quad \frac{\partial \Delta_q}{\partial L}, \quad q = P, T, L, r, \quad (22.21)$$

$$\Delta_P = P_{if} - P_{ef}, \quad \Delta_T = T_{if} - T_{ef}, \quad \Delta_L = L_{if} - L_{ef}, \quad \Delta_r = r_{if} - r_{ef}.$$

Поправки к параметрам (22.19)

$$\Delta P_c, \Delta T_c, \Delta L, \Delta R \quad (22.22)$$

находятся методом Ньютона из условия равенства нулю невязок

$$\Delta_q + \frac{\partial \Delta_q}{\partial P_c} \Delta P_c + \frac{\partial \Delta_q}{\partial T_c} \Delta T_c + \frac{\partial \Delta_q}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial \Delta_q}{\partial L} \Delta L = 0, \quad (22.23)$$

$$q = P, T, L, r.$$

Решение линейной неоднородной системы (22.23) позволяет найти поправ-

ки к предыдущим значениям (22.19) и приступить к следующей итерации. Итерации прекращаются после достижения заданной точности ϵ , когда

$$\delta = \sqrt{\sum \left(\frac{\Delta q}{\bar{q}} \right)^2} < \epsilon, \quad q = P, T, L, r, \quad \bar{q} = \frac{1}{2}(q_i + q_e). \quad (22.24)$$

Данная процедура изложена в работе [154] и приспособлена для счета на ЭВМ, введением безразмерных переменных.

Шварцшильдом [229] первоначально рассматривались степенные функции ϵ_n , κ , $P(\rho, T)$ и $\epsilon_\nu = 0$. Это позволяло с помощью преобразования подобия уменьшить число искомых параметров от четырех в (22.19) до двух^{*)}, что давало большие преимущества при интегрировании уравнений вручную. Однако при этом в оболочке и ядре используются различные переменные и процедура сшивки усложняется. Как отмечалось в [229], усложнение сшивки сводит на нет преимущества данной схемы при расчетах на ЭВМ. Для реальных функций ϵ_n , κ , $P(\rho, T)$, ϵ_ν , которые не являются степенными, преобразование подобия отсутствует и уменьшить число искомых функций не удастся.

Важным средством улучшения сходимости итераций является использование логарифмических переменных вместо обычных, которые изменяются в звезде на много порядков. Шварцшильдом [229] рассматривались переменные

$$l_P = \lg P, \quad l_T = \lg T, \quad l_L = \lg L, \quad l_r = \lg r, \quad l_m = \lg m. \quad (22.25)$$

В работе [80] использовались четыре логарифмических переменных из (22.25) (кроме l_m) в описанном выше методе [154]. Это позволило продвинуть расчеты вплоть до начала горения гелия, что существенно дальше, чем удавалось сделать в простых переменных. Отметим, что при интегрировании из центра первый шаг делается по разложению [229]

$$\begin{aligned} m &= \frac{4}{3} \pi \rho_c r^3, \\ P &= P_c - \frac{2}{3} \pi G \rho_c^2 r^2, \\ L_r &= \frac{4}{3} \pi \rho_c \left(\epsilon_{nc} - \epsilon_{\nu c} - \frac{\partial E_c}{\partial t} + \frac{P_c}{\rho_c^2} \frac{\partial \rho_c}{\partial t} \right) r^3, \\ T &= T_c - \frac{2}{3} \gamma_{2c} \pi G \frac{T_c \rho_c^2}{P_c} r^2 \quad (\text{адиабатическая конвекция}), \\ T &= T_c - \frac{\kappa_c \epsilon_c \rho_c^2}{8acT_c^3} r^2 \quad (\text{лучистый перенос}), \\ \epsilon_c &= \epsilon_{nc} - \epsilon_{\nu c} - \partial E_c / \partial t + P_c / \rho_c^2 \cdot \partial \rho_c / \partial t. \end{aligned} \quad (22.26)$$

^{*)} Сшивка проводится по безразмерным величинам [229]

$$U = \frac{r}{m} \frac{dm}{dr} = \frac{4\pi r^2}{m}, \quad V = -\frac{r}{P} \frac{dP}{dr} = \frac{\rho}{P} \frac{Gm}{r} \quad \text{и} \quad n+1 = \frac{T}{P} \frac{dP}{dT}.$$

Значение производных $\partial E/\partial t$, $\partial \rho/\partial t$, а также химический состав данной эволюционной модели находятся с помощью предыдущей модели после временного шага Δt . В (22.3) используется

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{E(m, t) - E(m, t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho(m, t) - \rho(m, t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad (22.27)$$

а химический состав в момент времени t в каждой точке звезды есть

$$x_i(m, t) = x_i(m, t - \Delta t) + \frac{\partial x_i}{\partial t} \Delta t, \quad i = \text{H}, \alpha, {}^{12}\text{C}. \quad (22.28)$$

Здесь функции $f(m, t - \Delta t)$ считаются известными, а $f(m, t)$ искомыми. Производные $\partial x_i/\partial t$ находятся из (22.5), (22.6). В явной схеме счета эти производные берутся в момент времени $t - \Delta t$ и считаются известными. В неявной схеме их значения берутся в момент времени t или в промежуточный момент (см. (22.41), (22.42)). Это делает численную схему более устойчивой, но несколько усложняет решение. Значения $E(m)$, $P(m)$, $x_{\text{H}}(m)$, $x_{\alpha}(m)$, $x_{{}^{12}\text{C}}(m)$, $r(m)$ с предыдущего временного шага $t - \Delta t$ должны запоминаться в таком наборе точек m_i , чтобы можно было провести достаточно точную интерполяцию между ними. Отметим, что необходимость запоминания значений с предыдущего эволюционного шага является общим для всех методов. В методе Хеньи точки, где необходимы значения с предыдущего шага определяются самой структурой метода.

Метод Шварцшильда применим для эволюционных расчетов, если детерминант системы (22.23) отличен от нуля. Обращение его в нуль указывает на неустойчивость модели и требует специального исследования [527].

б) Метод Хеньи. Предложенный Хеньи [393] метод решения уравнений звездной эволюции основан на разбиении звезды на J счетных интервалов и замене дифференциальных уравнений (22.1)–(22.4) разностными. Для решения системы линеаризованных разностных уравнений используется разработанный советскими математиками метод прогонки (см., например, [92]), который позволяет экономичным образом найти решение. Варианты данного метода, используемые различными авторами [112, 406, 522], близки друг другу.

Масса выбирается в качестве независимой переменной и интервал масс от 0 до M (масса звезды) разбивается на J , вообще говоря не равных интервалов. Масса задается в целых точках M_j , причем $M \equiv M_J$. Разности масс определяются как в целых, так и полужелтых точках:

$$\begin{aligned} \Delta M_{j+1/2} &= M_{j+1} - M_j, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, \\ \Delta M_j &= \frac{1}{2}(\Delta M_{j+1/2} + \Delta M_{j-1/2}) = \frac{1}{2}(M_{j+1} - M_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, J-1, \\ \Delta M_J &= \frac{1}{2} \Delta M_{J-1/2}. \end{aligned} \quad (22.29)$$

Уравнения (22.1)–(22.4) в разностном представлении записываются в виде [112]

$$P_{j+1/2} - P_{j-1/2} + \frac{GM_j \Delta M_j}{4\pi r_j^3} = 0, \quad j = 1, 2 \dots J; \quad (22.30)$$

$$\rho_{j+1/2} - \frac{\Delta M_{j+1/2}}{\pi (r_{j+1} - r_j)(r_{j+1} + r_j)^2} = 0, \quad j = 0, 1 \dots J-1; \quad (22.31)$$

$$L_{j+1} - L_j - \Delta M_{j+1/2} \cdot \epsilon_{j+1/2} = 0, \quad j = 0, 1 \dots J-1; \quad (22.32)$$

$$T_{j+1/2} - T_{j-1/2} + \frac{G}{4\pi} \frac{\Delta M_j M_j \cdot T_j}{r_j^3 P_j} (\nabla_{\text{ad}})_j = 0, \quad (22.33a)$$

$j = 1, 2 \dots J$ (адиабатическая конвекция);

$$T_{j+1/2} - T_{j-1/2} + \frac{3}{64\pi^2 ac} \frac{\Delta M_j \kappa_j L_j}{r_j^3 T_j^3} = 0$$

$$j = 1, 2, \dots J \quad (\text{лучистое равновесие}). \quad (22.33b)$$

Здесь

$$\epsilon = \epsilon_n - \epsilon_\nu - \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (22.34)$$

Уравнение состояния, непрозрачность и скорость энерговыделения записываются в виде

$$P_{j+1/2}, \epsilon_{j+1/2} = P, \epsilon(T_{j+1/2}, \rho_{j+1/2}, x_{k,j+1/2}),$$

$$j = 0, 1 \dots J-1; \quad k = \text{H}, \alpha, \text{C}^{12}; \quad (22.35)$$

$$\kappa_j, P_j = \kappa, P(T_j, \rho_j, x_{k,j}), \quad j = 1, 2 \dots J,$$

причем

$$(T_j, \rho_j, x_{k,j}) = \left[\frac{1}{2} (T_{j+1/2} + T_{j-1/2}), \dots, \frac{1}{2} (x_{k,j+1/2} + x_{k,j-1/2}) \right],$$

$$j = 1, 2 \dots J; \quad (22.36)$$

$$(\nabla_{\text{ad}})_j = \nabla_{\text{ad}}(\beta_{gj}), \quad \beta_{gj} = \frac{(P_g)_j}{P_j}. \quad (22.37)$$

Центральные граничные условия в точке $j = 0$: $r_0 = 0$, $L_0 = 0$ – следует учесть в (22.31) и (22.32). Внешние граничные условия в точке $J + 1/2$ записываются в виде

$$\frac{L_J}{4\pi \left(\frac{3}{2} r_J - \frac{1}{2} r_{J-1} \right)^2} = \sigma T_{J+1/2}^4 \quad (\text{из (22.11)}), \quad (22.38)$$

$$P_{J+1/2} = \frac{2/3 GM_J}{\beta_{J+1/2} \left(\frac{3}{2} r_J - \frac{1}{2} r_{J-1} \right)^2 \kappa_{J+1/2}}. \quad (22.39)$$

Здесь принято $k + k_1 = 2k$, $\tau_0 = 2/3$ в (22.15а), внешний радиус находится линейной экстраполяцией $r_{J+1/2} = \frac{3}{2} r_J - \frac{1}{2} r_{J-1}$ и $L_J = L_{J+1/2}$.

Соотношение (22.38) служит для определения $T_{J+1/2} = T_{\text{ef}}$, а (22.39) — для $P_{J+1/2}$; $\rho_{J+1/2}$ определяется как неявная функция из уравнения состояния. Значения $T_{J+1/2}$ и $P_{J+1/2}$ используются в (22.30), (22.33). После учета граничных условий (22.38), (22.39) и задания таблиц M_j , ΔM_j и $\Delta M_{j+1/2}$ система (22.30)–(22.33) из $4J$ уравнений содержит $4J$ неизвестных $\rho_{j+1/2}$, $T_{j+1/2}$ ($j = 0, 1 \dots J-1$) и r_j, L_j ($j = 1, 2 \dots J$). Для решения этой системы проводится ее линеаризация и используется итеративный процесс по методу Ньютона, аналогично (22.23). Для решения системы $4J$ линейных уравнений на каждом шаге итерации используется метод прогонки [92]. Эволюционные изменения химического состава и выделение гравитационной энергии рассчитываются в каждой полудельной точке, параметры в которой запоминаются после каждого эволюционного шага. Для хорошей точности расчетов и сходимости итераций изменение функций от точки к точке не должно быть большим, предельное относительное изменение определяется числом счетных интервалов. В [112] при $J = 150$ налагалось требование

$$\frac{L_{j+1} - L_{j-1}}{L_j} \leq 0,05, \quad \frac{P_{j+3/2} - P_{j-1/2}}{P_{j+1/2}} \leq 0,2. \quad (22.40)$$

Условия (22.40) проверялись после каждого эволюционного шага и при их нарушении производилась перестановка точек, чтобы они снова выполнялись. С ростом J условия (22.40) могут быть выбраны более жесткими. Так же как в методе Шварцшильда, эволюционное изменение химического состава может быть вычислено явным или неявным способом. В [522, 112] использовалась явная по времени схема счета. В [406] химический состав в момент времени t_{n+1} в каждой точке лучистой зоны вычислялся по формуле

$$x_i^{(n+1)}(j+1/2) = x_i^{(n)}(j+1/2) + \dot{x}_i^{(n+1/2)}(j+1/2) \Delta t, \quad (22.41)$$

где

$$\dot{x}_i^{(n+1/2)}(j+1/2) = \frac{1}{2} [\dot{x}_i^{(n)}(j+1/2) + \dot{x}_i^{(n+1)}(j+1/2)]. \quad (22.42)$$

Точка означает производную по времени (22.5), (22.6). При счете конвективной зоны ее граница считается фиксированной и уточняется после окончания итераций.

в) **Метод Хенли с пришивкой оболочки.** Опыт расчетов показал, что сходимость и точность метода улучшаются, если внешнюю оболочку звезды, содержащую $(3 \div 10)\%$ массы с постоянной светимостью L рассчитывать отдельно путем решения дифференциальных уравнений [446, 522, 52]. Рассмотрим модификацию метода Хенли с учетом пришивки оболочки [52]. Интегрирование уравнений равновесия оболочки (22.1)–(22.4) с $L = \text{const}$, $\epsilon = 0$ и с граничными условиями (22.11), (22.15) на $\tau = \tau_0$ или (22.17), (22.18) на $\tau = 0$ для уравнений (22.18),

(6.34) позволяет найти зависимости (R – внешний радиус)

$$T = f_1(m, L, R), \quad (22.43)$$

$$P = f_2(m, L, R), \quad (22.44)$$

$$r = f_3(m, L, R). \quad (22.45)$$

В точке $m = M_1 < M$, $M_1 = M_{J+1/2}$, выбранной в качестве границы между ядром и оболочкой, должны выполняться три условия:

$$\begin{aligned} S_1 &= T_{J+1/2} - f_1(M_1, L_{J+1/2}, R) = 0, \\ S_2 &= P_{J+1/2} - f_2(M_1, L_{J+1/2}, R) = 0, \\ S_3 &= r_{J+1/2} - f_3(M_1, L_{J+1/2}, R) = 0. \end{aligned} \quad (22.46)$$

Здесь индексом $J + 1/2$ обозначена точка сшивки, в которой нужно выразить светимость $L_{J+1/2}$ и радиус $R_{J+1/2}$ через их значения в целой точке J . В силу постоянства L имеем

$$L_{J+1/2} = L_J = L. \quad (22.47)$$

Запишем закон сохранения массы в виде

$$4\pi \frac{r_{J+1/2}^3 - r_J^3}{3\Delta M_{J+1/2}} = \frac{1}{\rho_{J+1/4}}, \quad (22.48)$$

где $\Delta M_{J+1/2}$ – масса в полуинтервале $[J, J + 1/2]$. Для малых $r_{J+1/2} - r_J$ можно записать

$$r_{J+1/2}^3 = r_J^3 + 3r_J^2(r_{J+1/2} - r_J). \quad (22.49)$$

Определяя $\rho_{J+1/4}$ линейной интерполяцией по массе, получим окончательно для радиуса сшивки

$$\begin{aligned} r_{J+1/2} &= \\ &= r_J + \frac{\Delta M_{J+1/2}}{4\pi r_J^2} \frac{1}{\rho_{J+1/2} + \frac{\Delta M_{J+1/2}}{\Delta M_{J-1/2} + 2\Delta M_{J+1/2}} (\rho_{J-1/2} - \rho_{J+1/2})}. \end{aligned} \quad (22.50)$$

После подстановки (22.47), (22.50) в (22.46) получаем три соотношения, содержащих шесть неизвестных

$$T_{J+1/2}, \quad \rho_{J+1/2}, \quad r_J, \quad L_J, \quad \rho_{J-1/2}, \quad R.$$

Все эти неизвестные, кроме R , входят также в $4J$ разностных уравнения для внутренней части звезды (22.30)–(22.33), содержащие $4J + 2$ неизвестных (см. п. б). Вместе с уравнениями (22.46) получается $4J + 3$ уравнения с тем же числом неизвестных, т.е. замкнутая система. Решение этой системы проводится итеративным методом Ньютона с решением линейризованных уравнений [52] методом прогонки. Большая часть машинного времени тратится при этом на решение уравнений в оболочке. Для экономии машинного времени модели оболочек могут быть рассчитаны заранее и соотношения (22.46) заданы в виде таблиц.

г) Особенности пришивки атмосферы при построении самосогласованных моделей с потерей массы [52]. Описанный выше метод точной пришивки может быть применен для стационарно истекающей оболочки (атмосферы). Истекающую атмосферу удобно характеризовать значением плотности в критической точке ρ_{cr} вместо радиуса фотосферы R . Вторым параметром служит полный (с учетом кинетической) поток энергии от звезды L_r . Переход к истекающей атмосфере в формулах (22.43)–(22.50) осуществляется заменой R и L на ρ_{cr} и L_r . После завершения итераций и нахождения точных значений L_r и ρ_{cr} уравнения истекающей атмосферы могут быть проинтегрированы от критической точки с $r = r_{cr}$ наружу до радиуса фотосферы для определения положения звезды на диаграмме Герцшпрунга–Рессела. Данная схема расчетов применима, для оптически толстой истекающей атмосферы с $R > r_{cr}$ и использовалась в [290]. Система уравнений для истекающей атмосферы и алгоритм ее решения даны в [52] и изложены в § 32.

Методика самосогласованного расчета эволюции звезды с оптически тонкой истекающей атмосферой при $R < r_{cr}$ не разработана.

д) Метод счета эволюции, устойчивый при наличии различных характерных времен. На некоторых стадиях эволюции (красные гиганты с плотным ядром и протяженной оболочкой, фазы неустойчивого ядерного горения в вырожденных ядрах и слоевых источниках (см. гл. 9), предсверхновые с переходом от статической к динамической эволюции (см. гл. 10), звезды, аккрецирующие или теряющие массу, и т.д.) изложенные выше методы оказываются неустойчивыми и счет эволюции становится невозможным. Неустойчивость связана с большим различием характерных времен, связанных с переносом тепла,

$$\tau_h(Z) = \frac{3c_p k \rho^2 Z^2}{4acT^3} \quad (Z - \text{характерный размер}) \quad (22.51)$$

в различных частях звезды (ядре и оболочке). Для устойчивости неявной по времени разностной схемы в методе Шварцшильда и Хенли необходимо достаточно большой шаг по времени

$$\Delta t > \tau_h(r). \quad (22.52)$$

При быстрой эволюции с характерным временем τ_n в ядре, определяемым ядерным горением или быстрым сжатием, неравенство (22.52) может нарушиться из-за $\tau_n < \tau_h(r)$ в оболочке и расчет эволюции данными методами оказывается невозможным. В [592] предложен метод, который остается устойчивым при временном шаге $\Delta t < \tau_h$ и позволяет проводить расчет при большой разнице характерных времен $\tau_h(r)$ по звезде. Запишем уравнения равновесия (22.1)–(22.4) в виде

$$\frac{d \ln P}{d \ln m} = - \frac{Gm^2}{4\pi r^4 P}, \quad (22.53)$$

$$\frac{d \ln r}{d \ln m} = \frac{m}{4\pi r^3 \rho}, \quad (22.54)$$

$$\frac{dL_r}{d \ln m} = m \left(-T \frac{\partial S}{\partial t} + \epsilon_n - \epsilon_\nu \right), \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{S(t) - S(t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad (22.55)$$

$$\frac{d \ln T}{d \ln m} = - \frac{3\kappa L_r m}{64\pi^2 acT^4 r^4} \quad (\text{лучистое равновесие}), \quad (22.56a)$$

$$\frac{d \ln T}{d \ln m} = \gamma_2 \frac{d \ln P}{d \ln m} \quad (\text{конвективное ядро}). \quad (22.56b)$$

Если ввести четырехкомпонентный вектор $y_j = (\ln P, \ln r, L_r, \ln T)$, независимую переменную $x = \ln m$ и соответствующий вектор правых частей $\Phi_i(x, y_i)$, то система (22.53)–(22.56) запишется в виде

$$\frac{dy_i}{dx} = \Phi_i(x, y_i). \quad (22.57)$$

Сделаем разбиение звезды на J счетных интервалов и будем рассматривать значения всех функций только в целых счетных точках. Рассмотрим следующее [592] разностное представление системы (22.57):

$$y_i^{(j+1)} - y_i^{(j)} = \Delta x^{(j)} [\beta_i \Phi_i(x^{(j)}, y_i^{(j)}) + (1 - \beta_i) \Phi_i(x^{(j+1)}, y_i^{(j+1)})], \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad \Delta x^{(j)} = x^{(j+1)} - x^{(j)}. \quad (22.58)$$

Здесь β_i — четыре произвольных числа $0 \leq \beta_i \leq 1$. Отметим, что разностное представление (22.30)–(22.33) эквивалентно выбору всех $\beta_i = 1/2$. В данном методе в разностных аналогах уравнений гидростатического равновесия (22.53) и (22.54) полагается $\beta_1 = \beta_2 = 1/2$. В [592] показано, что разностная схема решения системы (22.58) с помощью линеаризации и метода итераций Ньютона, аналогичная методу Хенни, оказывается устойчивой при двух выборах β_3 и β_4 :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \beta_3 = 1, \quad \beta_4 = 0; \\ (2) \quad & \beta_3 = 0, \quad \beta_4 = 1. \end{aligned} \quad (22.59)$$

В этом случае одна из функций $y_3 = L_r$ либо $y_4 = \ln T$ вычисляется явно, а другая неявно по пространству:

$$\begin{aligned} (1) \quad & y_3^{(j+1)} - y_3^{(j)} = \Phi_3(x^{(j)}, y^{(j)}) \Delta x^{(j)}, \\ & y_4^{(j+1)} - y_4^{(j)} = \Phi_4(x^{(j+1)}, y^{(j+1)}) \Delta x^{(j)}; \\ (2) \quad & y_3^{(j+1)} - y_3^{(j)} = \Phi_3(x^{(j+1)}, y^{(j+1)}) \Delta x^{(j)}, \\ & y_4^{(j+1)} - y_4^{(j)} = \Phi_4(x^{(j)}, y^{(j)}) \Delta x^{(j)}. \end{aligned} \quad (22.60)$$

Шаг по времени можно проводить с помощью соотношений (22.27), (22.41), (22.42). В [592] рассматривались упрощенные граничные условия:

$$\begin{aligned} r = L_r = 0 \quad & \text{при} \quad m = 0, \\ P = T = 0 \quad & \text{при} \quad m = M. \end{aligned} \quad (22.61)$$

В [594] устойчивый метод распространен на динамические стадии эволюции. На этих стадиях в правую часть уравнения (22.53) добавляется

динамический член

$$\begin{aligned}
 & - \frac{m}{4\pi r^2 P} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \\
 & = - \frac{m}{4\pi r(t)P(t)} \left[\frac{\ln r(t) - 2 \ln r(t - \Delta t) + \ln r(t - 2 \Delta t)}{\Delta t^2} + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\ln r(t) - \ln r(t - \Delta t)}{\Delta t} \right)^2 \right], \quad (22.62)
 \end{aligned}$$

а система разностных уравнений сохраняет функциональный вид (22.58). При коэффициентах (22.59) решение системы методом Хенли оказывается устойчивым и при нарушении условия (22.52), что позволяет, например, осуществить плавный переход от статической к динамической эволюции при исследовании взрывов сверхновых (см. гл. 10).

§ 23. Равновесие вращающихся замагниченных звезд

Вращение наблюдается во многих звездах и является их неотъемлемым свойством [199]. В теории равновесия роль вращения сводится к нарушению сферической симметрии и связанному с этим принципиальному усложнению методов построения равновесных решений. В достаточно широкой области угловых моментов вращающиеся звезды обладают аксиальной симметрией. При слабой сжимаемости и больших вращательных моментах устойчивыми оказываются только трехосные фигуры, аналогичные эллипсоидам Якоби несжимаемой жидкости [220]. Напротив, при большой сжимаемости истечение вещества с экватора начинается раньше, чем станет энергетически выгодным образование трехосных фигур. Для политропных звезд*) с уравнением состояния $P = K\rho^{1+1/n}$ при $n < 0,808$ раньше образуется трехосная конфигурация, а при $n > 0,808$ раньше наступает истечение с экватора [437]. Теория эволюции быстровращающихся звезд далека от своего завершения. Фактически имеется лишь теория равновесных конфигураций баротропных звезд с уравнением состояния $P(\rho)$. Расчеты эволюции в большинстве своем ведутся при упрощающих предположениях, не всегда оправданных в случае быстрого вращения.

Звезды обладают, как правило, магнитным полем. Динамическое влияние поля относительно невелико, но оно может быть важным для установления закона вращения, меридиональной циркуляции, химического перемешивания, что сильно влияет на эволюцию. Еще более важна роль магнитного поля в различных проявлениях звездной активности: вспышек, нетеплового нагрева, образования хромосферы, короны и звездного ветра, появления мощных ультрафиолетовых избытков в спектрах звезд. Магнитное поле тесно связано с вращением, так как для его усиления динамомеханизмами роль вращения является определяющей.

*) Теория равновесия невращающихся политропных звезд построена Эмденом (1907) и подробно изложена в книге [218] (см. § 34).